Методы решения неравенств с одной переменной

(типовые задания С3) - 1

Методическая разработка Амачкиной А.А.
МОУ СОШ №12,
г. Балашиха, Московской области.

1. Алгебраические методы решения

Если исходить из определения неравенства, в котором в обеих частях записаны выражения с переменной, то при решении неравенств используют преобразования (возведение в четную или нечетную степень, логарифмирование, потенцирование), позволяющие привести неравенство к более простому виду. В процессе преобразований множество решений исходного неравенства либо не меняется, либо расширяется (можно получить посторонние решения), либо сужается (можно потерять решения). Поэтому важно знать, какие преобразования неравенства являются равносильными и при каких условиях.

1.1. Сведение неравенства к равносильной системе или совокупности систем

Как правило, преобразования используют для того, чтобы в неравенстве освободиться от знаков корней, от знаков модуля, от степеней, от знаков логарифма. Поэтому ниже приведены схемы решения некоторых стандартных неравенств определенного вида. При этом отметим, что на практике некоторые цепочки преобразований делают короче, пропуская некоторые очевидные преобразования. Например, вместо длинной цепочки преобразований

$$\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)}, \qquad n \in N, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt[2n]{f(x)}\right)^{2n} > \left(\sqrt[2n]{g(x)}\right)^{2n}, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases}$$

используя краткую схему решения

$$\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)}, \quad n \in N, \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

В общем случае, если решение неравенства не укладывается в стандартную схему, ход решения разбивают на несколько логически возможных случаев.

Пример 1. **(МИОО, 2009).** Решите неравенство

$$\left(x+\frac{3}{x}\right)*\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2 \geq 4\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2$$

Решение. Так как x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 , то область допустимых значений переменной x определяется условиями:

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ 5-x \geq 0, \\ \sqrt{5-x} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x \leq 5, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

Исходное неравенство при полученных ограничениях для переменной *x* *равно*сильно неравенству

$$\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2 * \left(x+\frac{3}{x}-4\right) \geq 0 \qquad (1)$$

Так как $\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2 \geq 0,$ *то рассмотрим два случая*

1. $\sqrt{x^2-6x+9}-1=0 \Leftrightarrow |x-3|=1,$ *что возможно*

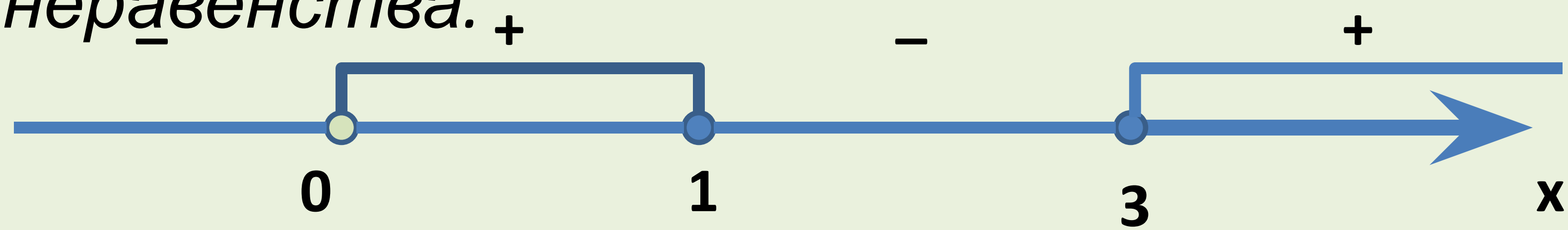
при x = 2 или x = 4 . Значит, с учетом полученных ранее ограничений, x = 2 – решение, так как в этом случае левая часть неравенства (1) равна нулю.

2. $\sqrt{x^2-6x+9}-1 \neq 0.$ *Тогда неравенство* (1)

равносильно неравенству

$$x+\frac{3}{x}-4\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x2-4x+3}{x}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-3)}{x}\geq 0.$$

На числовой прямой Ох дано графическое представление решения последнего неравенства.



Замечание. При решении неравенства $\frac{(x-1)(x-3)}{x}\geq 0.$

использован метод интервалов.

С учетом полученных ранее ограничений записываем ответ.

$$Ответ: \quad 0<x\leq 1, \quad x=2, \quad 3\leq x<4, \quad 4<x\leq 5.$$

Пример 2. **(МИЭТ, 2000).** *Решите неравенство*

$$(x+2)^2 \le 2\cdot(x+1)\sqrt{2x+3}$$

Решение. *Выполняя равносильные преобразования данного неравенства, получим:*

$$(x+2)^2 \le 2\cdot(x+1)\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow x^2+4x+4-2(x+1)\sqrt{2x+3} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2+2x+1-2(x+1)\sqrt{2x+3}+2x+3 \le 0$$

$$(x+1)^2-2(x+1)\sqrt{2x+3}+\left(\sqrt{2x+3}\right)^2 \le 0 \Leftrightarrow \left((x+1)-\sqrt{2x+3}\right)^2 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$x+1-\sqrt{2x+3}=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \ge 0, \\ 2x+3=(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \ge -1, \\ x^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$$

Неравенства, содержащие иррациональные выражения

Приведем некоторые стандартные схемы для решения иррациональных неравенств, в которых используют возведение в натуральную степень обеих частей неравенства.

- $$\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \qquad (1)$$
- $$\sqrt[2n]{f(x)} \geq \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \qquad (2)$$
- $$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^{2n}(x), \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \qquad (3)$$

- $$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^{2n}(x), \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \qquad (3)$$
- $$\sqrt[2n]{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g^{2n}(x), \\ f(x) > 0 \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \qquad (4)$$
- $$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g^{2n}(x) \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \end{array} \right. \qquad (5)$$

- $$\sqrt[2n]{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq g^{2n}(x) \\ \quad g(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \end{array}\right. \qquad (6)$$
- $$\sqrt[2n+1]{f(x)} \vee \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \vee g(x); \qquad (7)$$
- $$\sqrt[2n+1]{f(x)} \vee g(x) \Leftrightarrow f(x) \vee g^{2n+1}(x), \qquad (8)$$

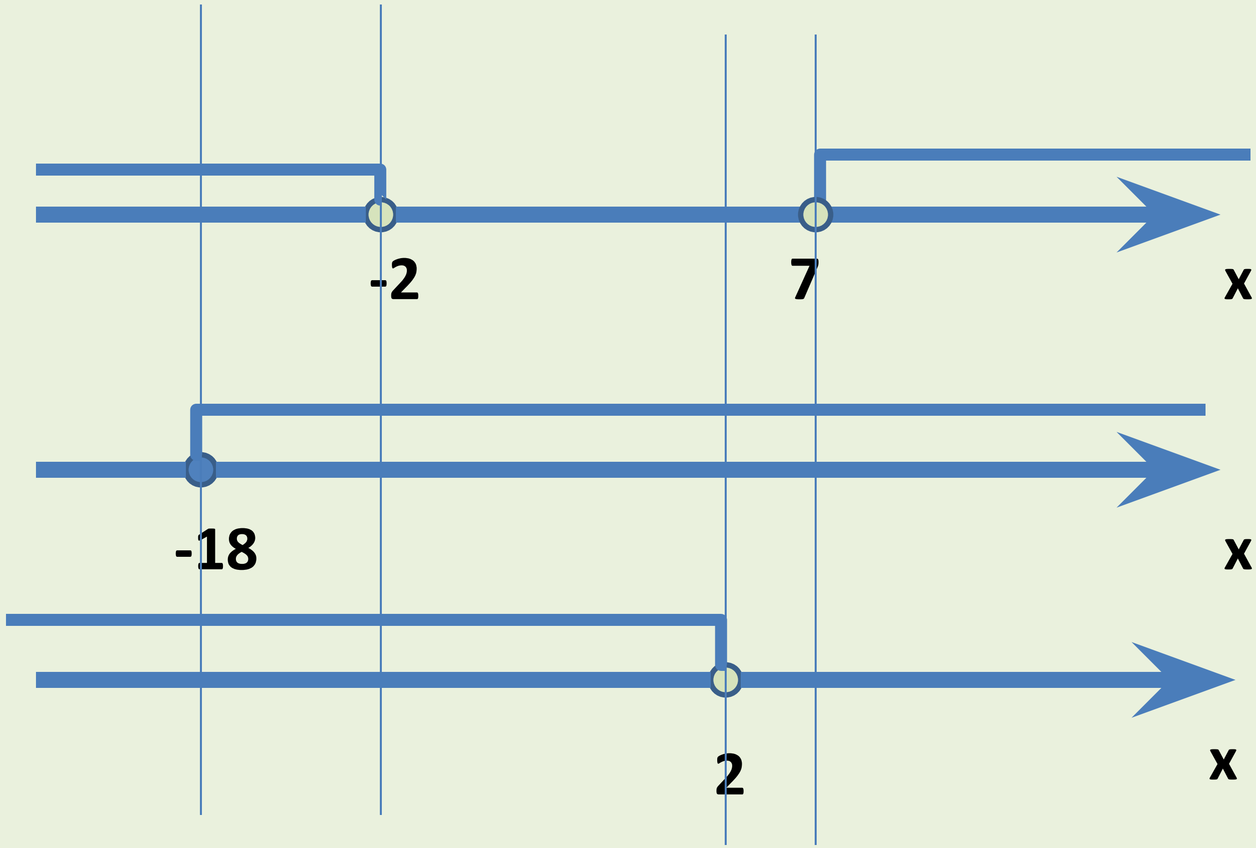
где символ $\vee$ *в схемах* $(7),(8)$ *заменяет один из зников неравенства:* $>, <, \geq, \leq$.

Пример 3. *Решите неравенство* $\sqrt{x+18} < 2-x.$

Решение. *Если 2 - x > 0 или 2 - x = 0 , то исходное неравенство не выполняется, так как* $\sqrt{x+18} \geq 0$

Пусть 2 - x > 0 , тогда при возведении обеих частей неравенства в квадрат получим на ее области определения и при условии 2 - x > 0 равносильное неравенство.

$$\begin{cases} x+18 < (2-x)^2, \\ x+18 \geq 0, \\ 2-x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)(x+2) > 0, \\ x \geq -18, \\ x < 2. \end{cases}$$



На рис. представлен способ графической интерпретации получения решения последней системы неравенств. В итоге получаем

$$-18 \le x < -2 \qquad \textit{решение} \qquad \textit{системы}.$$

Пример 4. **(МИЭТ, 1999).** *Решите неравенство*

$$\sqrt{x^2+10x+9} \ge x^2-2x-3.$$

Решение. *Используя схему (6), получим, что данное неравенство равносильно совокупности двух систем:*

$$(1)\begin{cases} x^2+10x+9 \ge \left(x^2-2x-3\right)^2, \\ x^2-2x-3 \ge 0. \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} x^2+10x+9 \ge 0, \\ x^2-2x-3 < 0. \end{cases}$$

Для системы (I) имеем:

$$x^2-2x-3 \ge 0 \quad \text{при} \quad x \in (-\infty;-1] \cup [3;\infty);$$

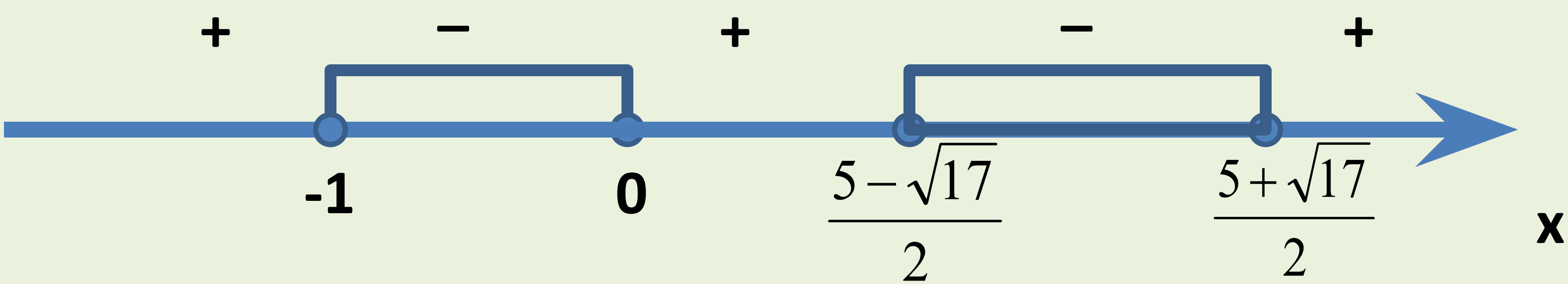
Первое неравенство системы (I) приводим к виду:

$$(x+1)(x+9) \geq (x+1)^2(x-3)2 \Leftrightarrow \quad (x+1)\left((x+1)(x-3)^2-(x+9)\right) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+1)x\left(x^2-5x+2\right) \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)x\left(x-\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right) \leq 0.$$

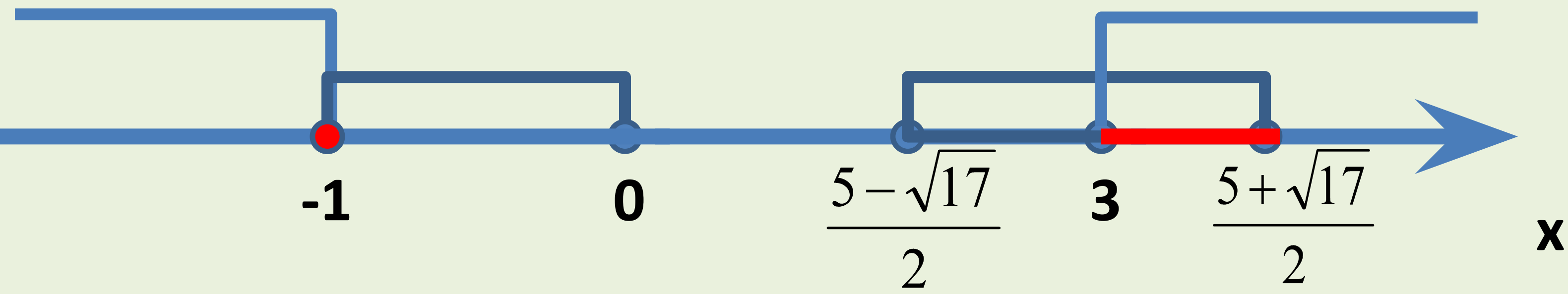
Заметим, что $0 < x - \dfrac{5-\sqrt{17}}{2} < \dfrac{1}{2}$, *а* $\dfrac{9}{2} < x - \dfrac{5+\sqrt{17}}{2} < 5$

На числовой прямой Ox дано графическое представление решения первого неравенства системы (I).



Тогда решением системы (I) все значения

$$x \in \{-1\} \cup \left[3; \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right].$$



Для системы (II) имеем:

$x^2 + 10x + 9 \geq 0$ при $x \in (-\infty; -9] \cup [-1; \infty);$

$x^2 - 2x - 3 < 0$ при $x \in (-1; 3).$

Следовательно, решением системы (II) будет $x \in (-1; 3)$

Объединяя решения (I) и (II), получаем ответ.

$$Ответ: \left[-1; \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right].$$

При решении данного в примере 4 неравенства использован формальный переход к равносильной совокупности по схеме (6). Рассмотрим содержательную сторону этого перехода. Если $x^2 - 2x - 3 \geq 0$, то обе части неравенства неотрицательны. После возведения в квадрат обеих частей неравенства получим на его области определения и при условии $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ равносильное не равенство, то есть систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 10x + 9 \geq \left(x^2 - 2x - 3\right)^2, \\ x^2 + 10x + 9 \geq 0, \\ x^2 - 2x - 3 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 10x + 9 \geq \left(x^2 - 2x - 3\right)^2, \\ x^2 - 2x - 3 \geq 0. \end{cases}$$

Пусть x_2-2x - 3 < 0. Так как $\sqrt{x^2+10x+9} \geq 0$, то исходное неравенство выполняется на области его определения, т.е. получаем систему неравенств

$$\begin{cases} x^2+10x+9 \geq 0, \\ x^2-2x-3<0. \end{cases}$$

Пример 5. **(МИОО, 2009).** *Решите неравенство*

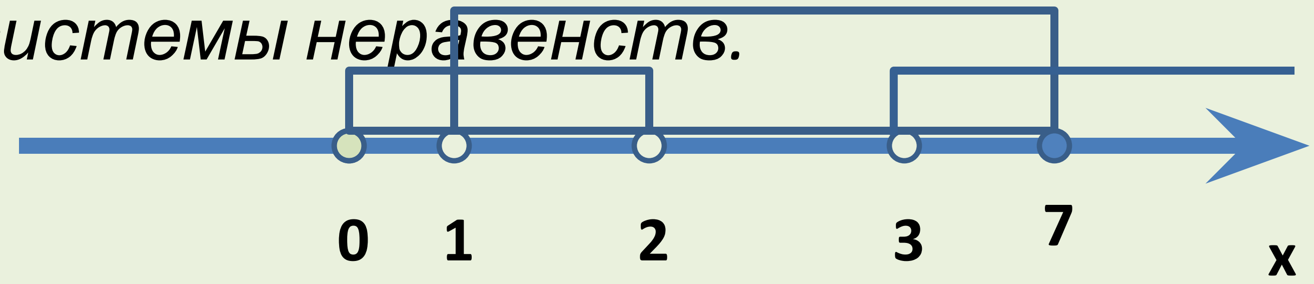
$$\sqrt{7-x}<\frac{\sqrt{x^3-6x^2+14x-7}}{\sqrt{x-1}}$$

Решение. *Выполняя равносильные переходы, получим*

$$\sqrt{7-x}<\frac{\sqrt{x^3-6x^2+14x-7}}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7-x}\cdot\sqrt{x-1}<\sqrt{x^3-6x^2+14x-7}, \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (7-x)(x-1)<x^3-6x^2+14x-7, \\ 7-x\geq 0, \\ x-1\geq 0, \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x3-5x2+6x>0, \\ 1<x\leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2)(x-3)>0, \\ 1<x\leq 7. \end{cases}$$

На рис. представлена графическая интерпретация получения решения последней системы неравенств.



$$Ответ: \quad 1 < x < 2, \qquad 3 < x \le 7.$$

Пример 6. *Решите неравенство* $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}>2$

Решение. Обозначим $\sqrt{x-2}=t,$ $где\ t\geq 0$. Тогда выразим x = t ^{2} + 2 и приведем данное неравенство к виду

$$\sqrt{2t^2+7}>t+2$$

Так как t + 2 > 0, то получаем равносильное неравенство 2t ^{2} + 7 >t ^{2} + 4t + 4 или t ^{2} - 4t +3 > 0 при $t\geq 0$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t<1 \\ t>3 \end{array}\right. \\ t\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\leq t<1 \\ t>3. \end{array}\right.$$

Возвращаемся к переменной

x :

$$\left[\begin{array}{l} 0 \le \sqrt{x-2} < 1 \\ \sqrt{x-1} > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le x-2 < 1 \\ x-2 > 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \le x < 3 \\ x > 11 \end{array}\right.$$

$$Ответ: \quad 2 \le x < 3, \quad x > 11.$$

Пример 7. **(МИЭТ, 2002).** *Решите неравенство*

$$\frac{1}{\sqrt{8-x}}-\frac{1}{\sqrt{2x+1}}>\frac{1}{\sqrt{8+15x-2x^2}}$$

Решение. *Область определения данного неравенства определяется условиями:*

$$\begin{cases} 8-x>0, \\ 2x+1>0, \\ 8+15x-2x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8-x>0, \\ 2x+1>0, \\ (2x+1)(8-x)>0 \end{cases} \Leftrightarrow -0.5<x<8$$

Запишем исходное неравенство в следующем виде

$$\frac{1}{\sqrt{8-x}}-\frac{1}{\sqrt{2x+1}}>\frac{1}{\sqrt{(8-x)(2x+1)}} \qquad (*)$$

Так как на области определения исходного неравенства $\sqrt{(8-x)(2x+1)}>0$, то, умножив обе части неравенства (*) на $\sqrt{(8-x)(2x+1)}$ получим неравенство, равносильное исходному:

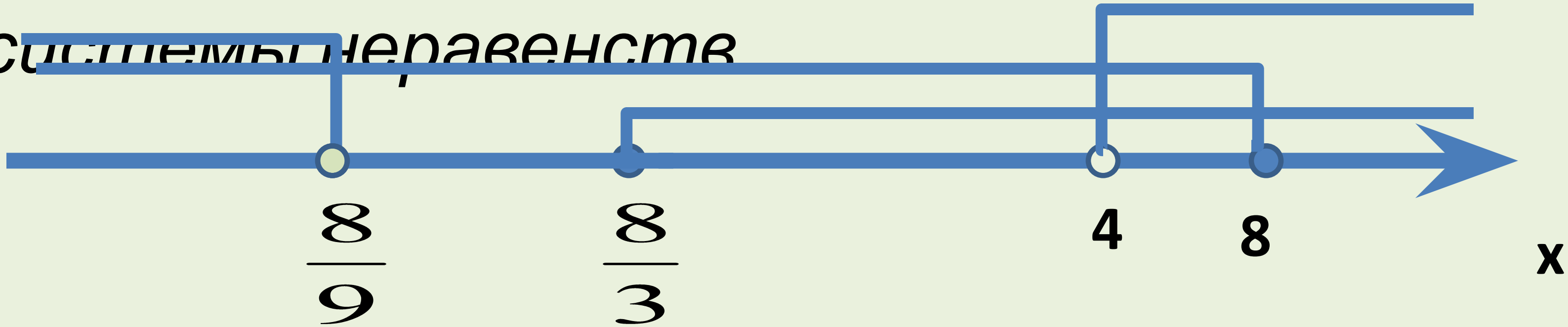
$$\frac{\sqrt{(8-x)(2x+1)}}{\sqrt{(8-x)}}-\frac{\sqrt{(8-x)(2x+1)}}{\sqrt{(2x+1)}}>1 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1}-\sqrt{8-x}>1$$

$$\sqrt{2x+1}>1+\sqrt{8-x}$$

Левая и правая части последнего неравенства неотрицательны при $-0,5<x<8$, поэтому после возведения их в квадрат и приведения подобных членов получим неравенство

$$2\sqrt{8-x} < 3x-8 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-8 \geq 0, \\ 8-x \geq 0, \\ 4(8-x) < (3x-8)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{8}{3}, \\ x \leq 8, \\ (9x-8)(x-4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < x \leq 8.$$

На рис. представлена графическая интерпретация получения решения последней системы неравенств



С учетом условия - 0,5 < x < 8 получаем ответ.

$$\textit{Ответ}: \quad 4 < x < 8.$$

Неравенства, содержащие показательные выражения

Приведем некоторые стандартные схемы для решения показательных неравенств, в которых используют логарифмирование обеих частей неравенства.

- $$\left(\varphi(x)\right)^{f(x)} > \left(\varphi(x)\right)^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x), \\ \varphi(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > f(x), \\ 0 < \varphi(x) < 1. \end{cases} \end{array}\right. \qquad (9)$$

$$\bullet\ (\varphi(x))^{f(x)} \geq (\varphi(x))^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ \varphi(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq f(x), \\ 0 < \varphi(x) < 1, \end{cases} \\ \varphi(x) = 1. \end{array}\right. \qquad (10)$$

В частности:

- *Если число* $a > 1$, *то*

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x). \qquad (11)$$

- *Если число* $0 < a < 1$, *то*

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x). \qquad (12)$$

$$\bullet \left(f(x)\right)^{\varphi(x)} > \left(g(x)\right)^{\varphi(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > f(x), \\ \varphi(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right. \qquad (13)$$

Пример 8. *Решите неравенство*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2\left(x^2-1\right)} > 1$$

Решение. *1-й способ. Область допустимых значений переменной x определяется условием:*

$$x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1, \\ x < -1. \end{array}\right.$$

При допустимых значениях переменной преобразуем левую часть данного неравенства

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2\left(x^2-1\right)} = \left(2^{-1}\right)^{\log_2\left(x^2-1\right)} = \left(2^{\log_2\left(x^2-1\right)}\right)^{-1} = \left(x^2-1\right)-1 = \frac{1}{x^2-1}$$

Получаем неравенство

$$\frac{1}{x^2-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-2}{x^2-1} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{2} < x < -1, \\ 1 < x < \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

2-й способ. Так как $1 > \frac{1}{2} > 0$ *и* $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1,$

то, используя схему (12), получаем:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2\left(x^2-1\right)} > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2\left(x^2-1\right)} > \left(\frac{1}{2}\right)^0 \Leftrightarrow \log_2\left(x^2-1\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x2-1<1, \\ x2-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x>1, \\ x<-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{2}<x<-1, \\ 1<x<\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

$$Ответ: \quad \left(-\sqrt{2};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{2}\right)$$

Замечание. *При решении неравенства $\log_2(x^2-1)<0$ использована стандартная схема решения логарифмических неравенств (см. раздел неравенства, содержащие логарифмические выражения»).*

Пример 9. *Решите неравенство* $(x^2 + x + 1)^x < 1.$

Решение. *Приведем неравенство к виду* $(x^2 + x + 1)^x < (x^2 + x + 1)^0$ *и воспользуемся схемой (9).*

$$\left(x^2 + x + 1\right)^x < 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x < 0, \\ x^2 + x + 1 > 1, \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x > 0, \\ 0 < x^2 + x + 1 < 1. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Решим систему (1) полученной совокупности:

$$\begin{cases} x < 0, \\ x^2 + x + 1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x(x+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < -1.$$

Решим систему (2) совокупности:

$$\begin{cases} x>0, \\ 0<x^2+x+1<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2+x+1>0 \\ x(x+1)<0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x(x+1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x+1<0 \end{cases} \text{нет решений.}$$

$$\text{Ответ:} \quad x<-1$$

*При решении данного неравенства использован формальный переход к равносильной совокупности по схеме (9). Рассмотрим содержательную сторону этого перехода. Выражение $(x^2 + x + 1)^x$ положительно, так как $x^2 + x + 1 > 0$ при всех значениях $x \ni$ **R** . Прологарифмируем обе части данного неравенства*

$\lg(x^2 + x + 1)^x < \lg 1 \qquad x \lg(x^2 + x + 1) < 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > 0, \\ \lg\left(x^2 + x + 1\right) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ \lg\left(x^2 + x + 1\right) > 0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > 0, \\ x^2 + x + 1 < 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x^2 + x + 1 > 1 \end{cases}\end{array}\right.$$

Неравенства, содержащие логарифмические выражения

Приведем некоторые стандартные схемы для решения логарифмических неравенств, в которых используют потенцирование обеих частей неравенства.

$$\bullet\ \log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x) > 0, \\ \varphi(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > f(x) > 0, \\ 0 < \varphi(x) < 1. \end{cases} \end{array}\right. \qquad (14)$$

В частности:

● *Если число* $a > 1$, *то*

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0. \qquad (15)$$

● *Если число 0 < a < 1, то*

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow g(x) > f(x) > 0. \qquad (16)$$

● $$\log_{\varphi(x)} f(x) \geq \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq g(x) > 0, \\ \varphi(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq f(x) > 0, \\ 0 < \varphi(x) < 1. \end{cases} \end{array}\right. \qquad (17)$$

В частности:

● *Если число a >1, то*

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0. \qquad (18)$$

● *Если число 0 < a < 1, то*

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow g(x) > f(x) > 0. \qquad (19)$$

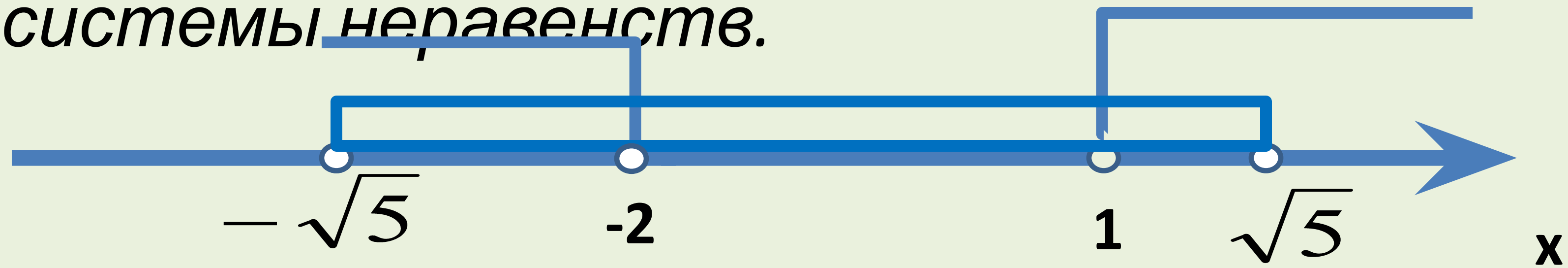
Пример 10. *Решите неравенство*

$\log_{0.1}(x^2+x-2)>\log_{0.1}(x+3)$

Решение. *Так как основание 0,1 логарифмов, стоящих в обеих частях неравенства, удовлетворяют условию 0 < 0,1 < 1, то, используя схему (19), получаем, что данное неравенство равносильно системе*

$$\begin{cases} x^2+x-2<x+3, \\ x^2+x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)<0, \\ \left(x-1\right)\left(x+2\right)>0. \end{cases}$$

На рис. представлена графическая интерпретация получения решения последней системы неравенств.



$Ответ: \left(-\sqrt{5};-2\right)\cup\left(1;\sqrt{5}\right)$

Пример 11. **(МИОО, 2009).** *Решите неравенство*

$$\log_x(7-x)<\log_x\left(x^3-6x^2+14x-7\right)-\log_x(x-1)$$

Решение. *Выполняя равносильные переходы, получим, что данное неравенство равносильно следующей системе неравенств*

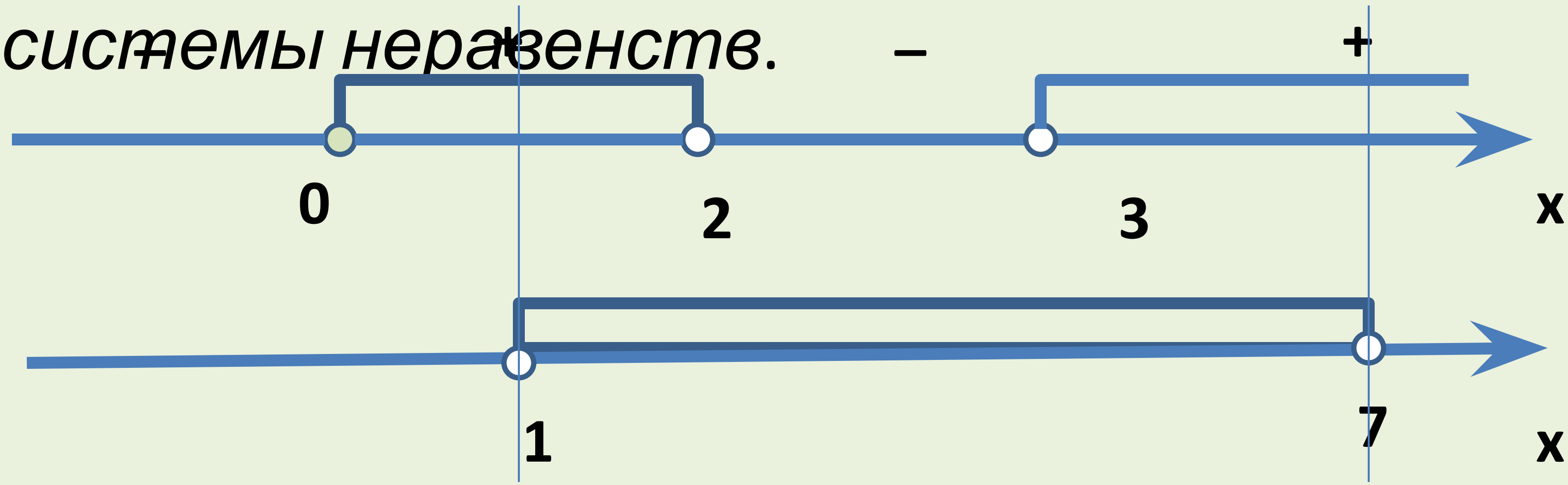
$$\begin{cases}\log_x((7-x)(x-1))<\log_x\left(x^3-6x^2+14x-7\right),\\ x>1.\end{cases}$$

В соответствии со схемой (17) для решения необходимо рассмотреть только случай, когда основание больше единицы, поэтому полученная система равносильна следующей

$$\begin{cases} (7-x)(x-1) < x^3 - 6x^2 + 14x - 7, \\ \quad 1 < x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 5x^2 + 6x > 0, \\ 1 < x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x(x-2)(x-3) > 0, \\ 1 < x < 7. \end{cases}$$

На рис. представлена графическая интерпретация получения решения последней системы неравенств.



$$\textit{Ответ}: \quad (1;2) \cup (3;7)$$

Пример 12. **(ЕГЭ 2010).** Решите неравенство

$$\frac{2\log_{2^{x-1}}|x|}{\log_{2^{x-1}}(x-7)} \le \frac{\log_3(x+12)}{\log_3(x+7)}.$$

Решение. *В соответствии с определением логарифма, входящие в неравенство выражения имеют смысл при выполнении условий:*

$$\begin{cases} |x| \ne 0, \\ 2^{x-1} \ne 1, \\ x+7>0, \\ x+7 \ne 1, \\ x+12>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \ne 0, \\ x-1 \ne 0, \\ x>-7, \\ x \ne -6, \\ x>-12 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-7;-6)\cup(-6;0)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$$

Так как при допустимых значениях переменной x по свойствам логарифма справедливы равенства:

$$\frac{2\log_{2^{x-1}}|x|}{\log_{2^{x-1}}(x+7)}=\log_{x+7}|x| \quad \text{и} \quad \frac{\log_3(x+12)}{\log_3(x+7)}=\log_{x+7}(x+12),$$

то исходное неравенство приводится к виду

$$2\log_{x+7}|x|\le\log_{x+7}(x+12)\Leftrightarrow\log_{x+7}x^2\le\log_{x+7}(x+12).$$

Последнее неравенство равносильно совокупности двух систем на множестве $(-7;-6)\cup(-6;0)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x+7<1,\\ x^2\ge x+12\end{cases}\\ \begin{cases}x+7>1,\\ x^2\le x+12\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-7<x<-6,\\ x^2-x-12\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x>-6,\\ x^2-x-12\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-7<x<-6,\\ (x-4)(x+3)\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x>-6,\\ (x-4)(x+3)\le 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} -7 < x < -6, \\ -3 \le x \le 4. \end{array}\right.$$

С учетом области определения данного неравенства

$$(-7;-6)\cup(-6;0)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$$

получаем ответ.

$$Ответ: \quad (-7;-6)\cup[-3;0)\cup(0;1)\cup(1;4]$$

Неравенства, содержащие выражения с модулями

Пример 13. **(МИЭТ, 2002).** *Решите неравенство*

$$\frac{1}{|x-9|} \le \frac{x-3}{4x-11}.$$

Решение. *Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:*

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 9, \\ \dfrac{1}{x-9} \le \dfrac{x-3}{4x-11} \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x < 9, \\ \dfrac{1}{x-9} \le \dfrac{x-3}{4x-11} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 9, \\ \dfrac{x^2-16x+38}{(x-9)(4x-11)} \ge 0, \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x < 9, \\ \dfrac{(x-4)^2}{(x-9)(4x-11)} \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 9, \\ \dfrac{\left(x-8+\sqrt{26}\right)\left(x-8-\sqrt{26}\right)}{(x-9)(4x-11)} \geq 0, \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x < 9, \\ \dfrac{(x-4)^2}{(x-9)(4x-11)} \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 8+\sqrt{26}, \\ x < 2.75, \\ x = 4. \end{array}\right.$$

$Ответ: \quad x < 2.75, \quad x = 4, \quad x \geq 8+\sqrt{26}$

Приведем некоторые стандартные схемы для решения неравенств с модулями, которые опираются на определение модуля, его геометрический смысл и свойства.

- $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x) \end{cases} \quad (20)$
- $|f(x)| \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge -g(x) \end{cases} \quad (21)$
- $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right. \quad (22)$
- $|f(x)| \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x), \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right. \quad (23)$

- $|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) > g^2(x) \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) > 0;$ (24)
- $|f(x)| \ge |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) \ge g^2(x) \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \ge 0.$ (25)

Пример 14. *Решите неравенство*

$$\left|x^7 + 4x^5 + x^2 + 2x - 3\right| < x^7 + 4x^5 - x^2 - 2x + 3.$$

Решение. *Используя схему (20) получаем, что данное неравенство равносильно системе неравенств*

$$\begin{cases} x^7 + 4x^5 + x^2 + 2x - 3 < x^7 + 4x^5 - x^2 - 2x + 3. \\ x^7 + 4x^5 + x^2 + 2x - 3 > -(x^7 + 4x^5 - x^2 - 2x + 3.) \end{cases}$$

или после приведения подобных членов

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 < 0, \\ x^5(x^2 + 4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < 1, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Пример 15. *Решите неравенство* $\log_9(2x+1)+\left|\log_3(2x+1)\right|-1\geq 0$

Решение. Данное неравенство равносильно следующему $\left|\log_3(2x+1)\right|\geq 1-\log_9(2x+1)$

Используя схему (23), получаем, что это неравенство, а значит и исходное, равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l}\log_3(2x+1)\geq 1-\log_9(2x+1),\\ \log_3(2x+1)\leq -\left(1-\log_9(2x+1)\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3(2x+1)\geq 1-0.5\log_3(2x+1),\\ \log_3(2x+1)\leq 0.5\log_3(2x+1)-1\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\log_3(2x+1)\geq \frac{2}{3},\\ \log_3(2x+1)\leq -2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+1\geq\sqrt[3]{9}\\ 0<2x+1\leq\frac{1}{9}.\end{array}\right.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}<x<-\frac{4}{9},\quad x\geq\frac{\sqrt[3]{9}-1}{2}.$

Пример 16. *Решите неравенство*

$$\left|\left|2^x + x - 2\right| - 1\right| > 2^x - x - 1.$$

Решение. *Используя схему (22), получаем, что данное неравенство равносильно совокупности неравенств*

$$\left[\begin{array}{l} \left|2^x + x - 2\right| - 1 > 2^x - x - 1, \\ \left|2^x + x - 2\right| - 1 < 2^x - x - 1. \end{array}\right.$$

Используя схемы (20) и (22), получаем, что эта совокупность равносильна следующей.

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 2^x + x - 2 > 2^x - x, \\ 2^x + x - 2 < -2^x + x, \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{l} 2^x + x - 2 > -2^x + x + 2, \\ 2^x + x - 2 < 2^x - x - 2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x > 1, \\ 2^{x+1} < 2, \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{l} 2^{x+1} < 2, \\ x > 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x > 1, \\ x < 0, \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{l} x < 1, \\ x > 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\text{Ответ:} \quad (-\infty;0)\cup(0;1)\cup(1;+\infty]$$

Для решения неравенств вида:

$$\left|f_1(x)\right| + \left|f_2(x)\right| + \ldots\ldots + \left|f_n(x)\right| \vee g(x),$$

где символ \/ заменяет один из знаков неравенств: $>, <, \geq, \leq$, применяют метод промежутков. Для этого находят ОДЗ неравенства, определяют точки разрыва функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ……, $f_n(x)$ и находят корни совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x) = 0, \end{array}\right.$$

На каждом из промежутков, на которые найденные точки разбивают ОДЗ, функции, стоящие под знаком модуля, имеют постоянный знак. Поэтому исходное неравенство на каждом промежутке заменяется на неравенство, не содержащее знаков абсолютной величины и равносильное исходному.

Пример 17. Решите неравенство $|x-1|+|x-2|>3+x$

Решение. Решением совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x-1=0, \\ x-2=0 \end{array}\right.$$

являются числа 1 и 2.

Эти числа разбивают числовую прямую на три промежутка $(-\infty;1)$, $[1;2)$ *и* $[2;+\infty)$

Освобождаясь от знаков модулей, с учетом знаков выражений под знаком модуля решим данное неравенство на каждом из этих промежутков

Если x<1, то исходное неравенство равносильно неравенству - x +1- x + 2 > 3 + x , x < 0 . Получаем, что x < 0 есть решение исходного неравенства на рассматриваемом промежутке.

Если $1 \leq x < 2$, то исходное неравенство равносильно неравенству x -1- x + 2 > 3+ x , x <-2 . Следовательно, на этом промежутке решений нет.

Если $x \geq 2$, то исходное неравенство равносильно неравенству

x -1+ x - 2 > 3+ x , x > 6 .

Получаем, что x > 6 есть решение исходного уравнения на рассматриваемом промежутке.

Объединяя полученные решения, запишем ответ.

$$Ответ: \quad x < 0, \qquad x > 6.$$

Расщепление неравенств

Если левая часть неравенства представляет собой произведение двух выражений, а правая часть равна нулю, то схема решения неравенства опирается на правило знаков при умножении (делении) положительных или отрицательных чисел.

- $$f(x) * g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) \leq 0. \end{cases} \end{array} \right. \qquad (26)$$

- $$f(x)\cdot g(x)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ g(x)\le 0,\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\le 0,\\ g(x)\ge 0.\end{cases}\end{array}\right. \quad (27)$$

- $$\frac{f(x)}{g(x)}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ g(x)> 0,\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\le 0,\\ g(x)< 0.\end{cases}\end{array}\right. \quad (28)$$

- $$\frac{f(x)}{g(x)}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ g(x)< 0,\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\le 0,\\ g(x)> 0.\end{cases}\end{array}\right. \quad (29)$$

Пример 18. *Решите неравенство*

$$\left(x+\frac{3}{x}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)\geq 4\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right).$$

Решение. *Приведем данное неравенство к* следующему виду:

$$\left(x+\frac{3}{x}-4\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)\geq 0.$$

В соответствии со схемой полученное неравенство равносильно совокупности систем (I) и (II):

$$(I)\begin{cases} x+\dfrac{3}{x}-4\geq 0, & (1)\\ \dfrac{|x-3|-1}{\sqrt{5-x}-1}\geq 0; & (2)\end{cases}\qquad (II)\begin{cases} x+\dfrac{3}{x}-4\leq 0, & (3)\\ \dfrac{|x-3|-1}{\sqrt{5-x}-1}\leq 0; & (4)\end{cases}$$

Решим каждое неравенство системы (I).
Для неравенства (1) имеем:

$$x+\frac{3}{x}-4\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-3)}{x}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x\leq 1, \\ x\geq 3. \end{array}\right.$$

Для неравенства (2)
имеем:

$$\frac{|x-3|-1}{\sqrt{5-x}-1}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x-3|-1\geq 0, \\ \sqrt{5-x}-1>0, \end{cases} \\ \\ \begin{cases} |x-3|-1\leq 0, \\ \sqrt{5-x}-1<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x-3|\geq 1, \\ \sqrt{5-x}>1, \end{cases} \\ \\ \begin{cases} |x-3|\leq 1, \\ \sqrt{5-x}<1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq 4, \\ x \leq 2, \end{array}\right. \\ x < 4, \end{cases} \\ \begin{cases} 2 \leq x \leq 4, \\ 4 < x \leq 5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \qquad x \leq 2$$

Значит все значения x принадлежат (0; 1] – решения системы (I).

Найдем решение системы (II). Для неравенства (3), используя решение (1), имеем:

$$x+\frac{3}{x}-4\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-3)}{x}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0, \\ 1\le x\le 3 \end{array}\right.$$

Для неравенства (4), используя решение (2) и учитывая ограничения

$$\begin{cases} 5-x\ge 0, \\ \sqrt{5-x}\ne 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 5, \\ x\ne 4 \end{cases}$$ имеем :

$$\frac{|x-3|-1}{\sqrt{5-x}-1}\le 0 \Leftrightarrow x\in[2;4)\cup(4;5]$$

Значит все значения $x\in[2;3)$ решения системы (II). Объединяя решения систем (I) и (II), получаем ответ.

$$Ответ: \quad (0;1]\cup[2;3].$$

Используемая литература:

Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Методы решения неравенств с одной переменной.