



# Векторная алгебра



Уильям Роуэн Гамильтон  
1805 — 1865

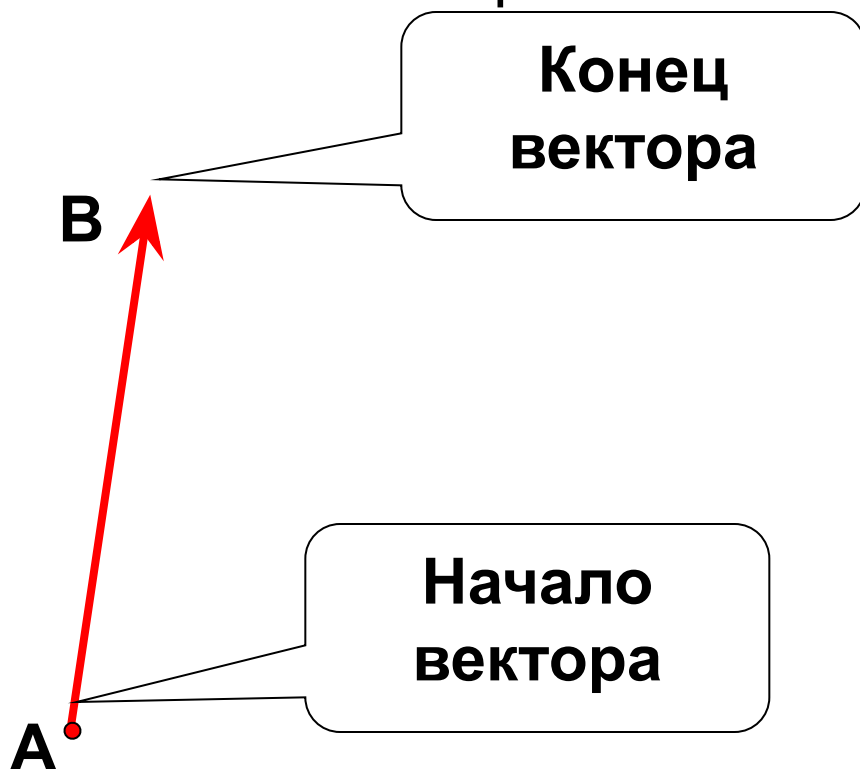
выдающийся ирландский математик и  
физик XIX века.

Термин **вектор**  
(от лат. Vector - “несущий”) впервые  
появился в 1845 г. у ирландского  
математика Уильяма Гамильтона



## § 1. Определение вектора.

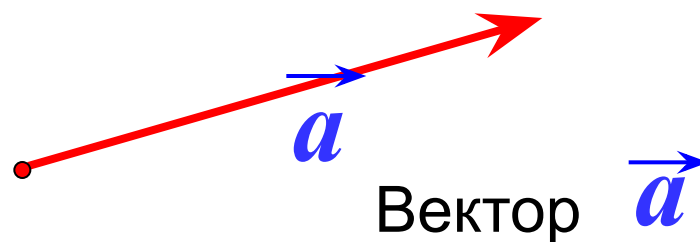
Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая – концом, называется направленным отрезком или вектором



Вектор  $\vec{AB}$

Длиной или модулем вектора называется длина отрезка АВ

$$|\vec{AB}| = AB$$





## § 1. Определение вектора.

Любая точка плоскости также является вектором.

В этом случае вектор называется нулевым

•  
**M**

Вектор  $\vec{MM}$

Вектор  $\vec{0}$

Начало нулевого вектора совпадает с его концом, поэтому нулевой вектор не имеет какого-либо определенного направления. Иначе говоря, любое направление можно считать направлением нулевого вектора.

Длина нулевого считается равной нулю

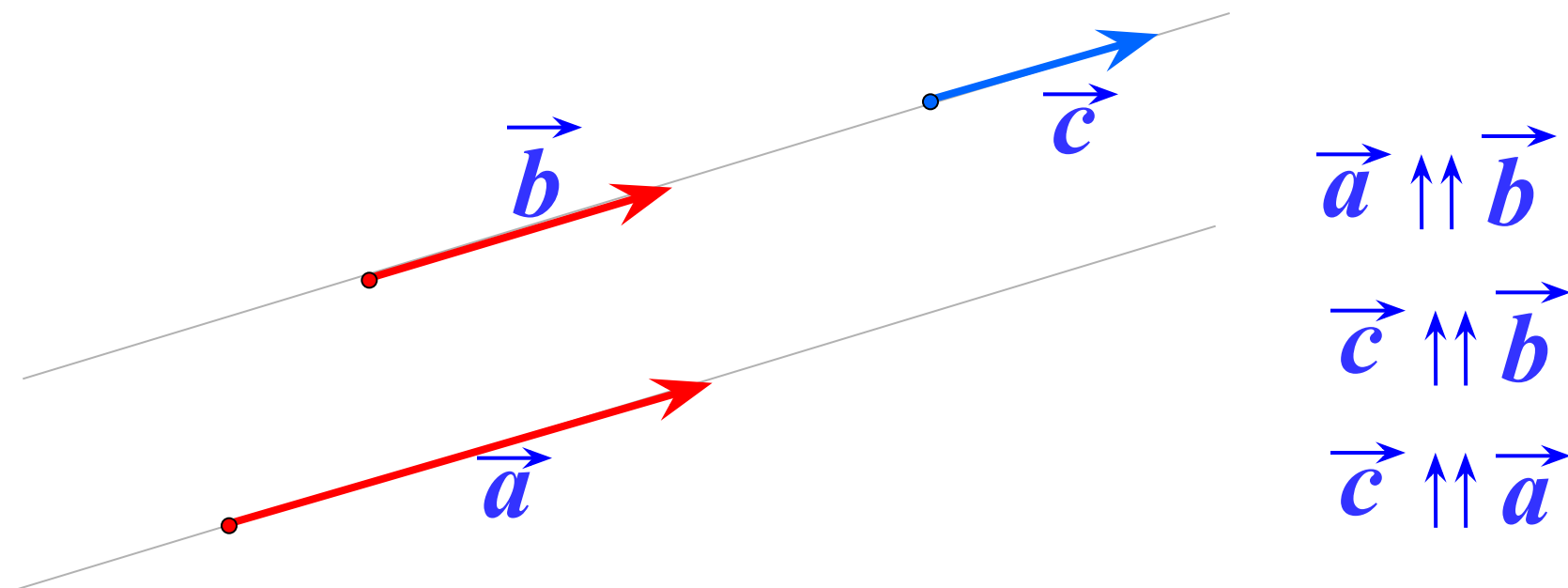
$$|\vec{MM}| = 0$$



## § 1. Определение вектора.

Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Коллинеарные, сонаправленные векторы



Нулевой вектор считается коллинеарным, сонаправленным с любым вектором.

$$\vec{0} \uparrow\uparrow \vec{a}$$

$$\vec{0} \uparrow\uparrow \vec{c}$$

$$\vec{0} \uparrow\uparrow \vec{b}$$

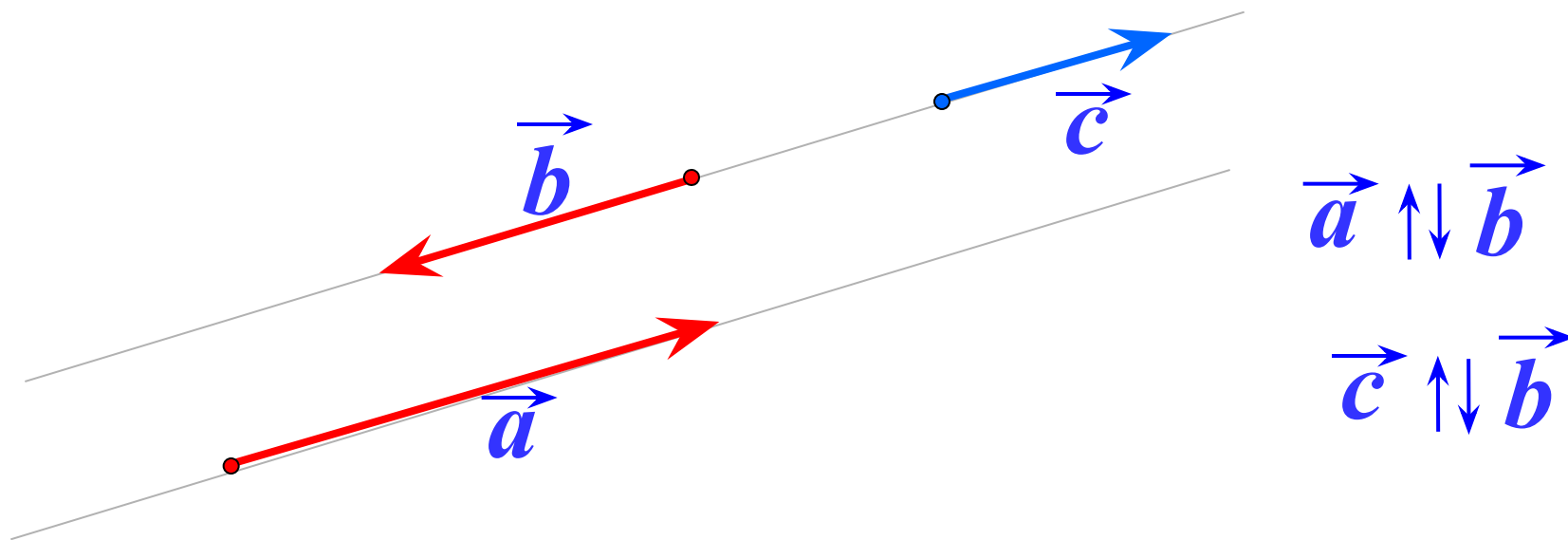




## § 1. Определение вектора.

Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Коллинеарные,  
противоположно направленные векторы

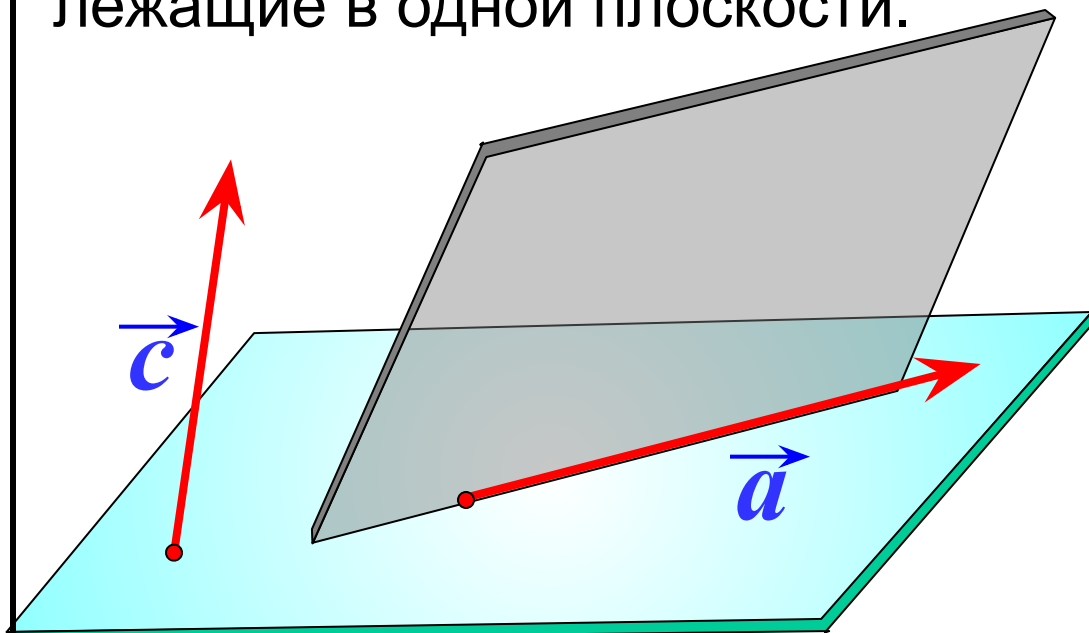




## § 1. Определение вектора.

Векторы называются компланарными, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.

Другими словами, векторы называются компланарными, если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости.

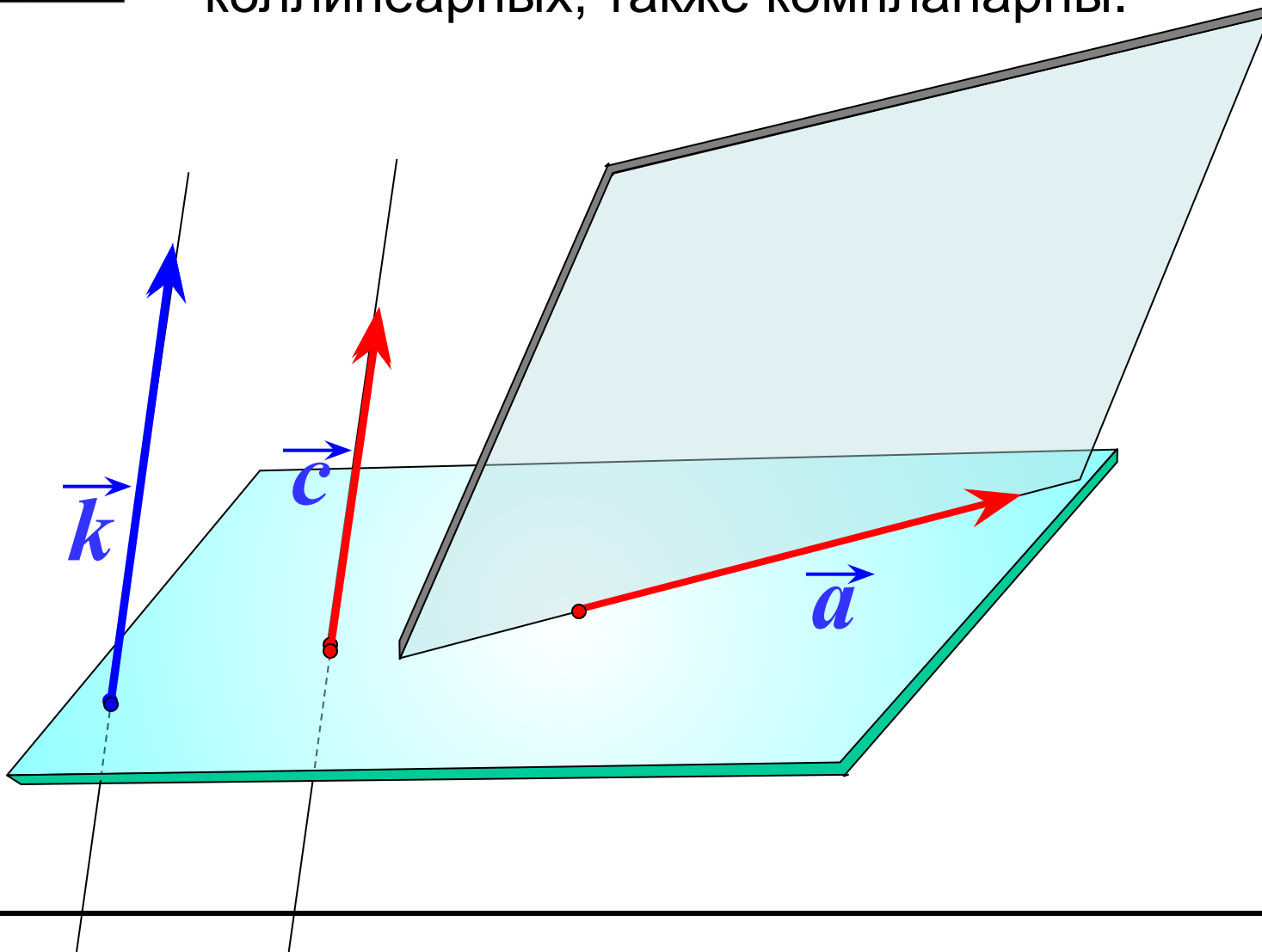


**Любые два вектора  
компланарны.**



## § 1. Определение вектора.

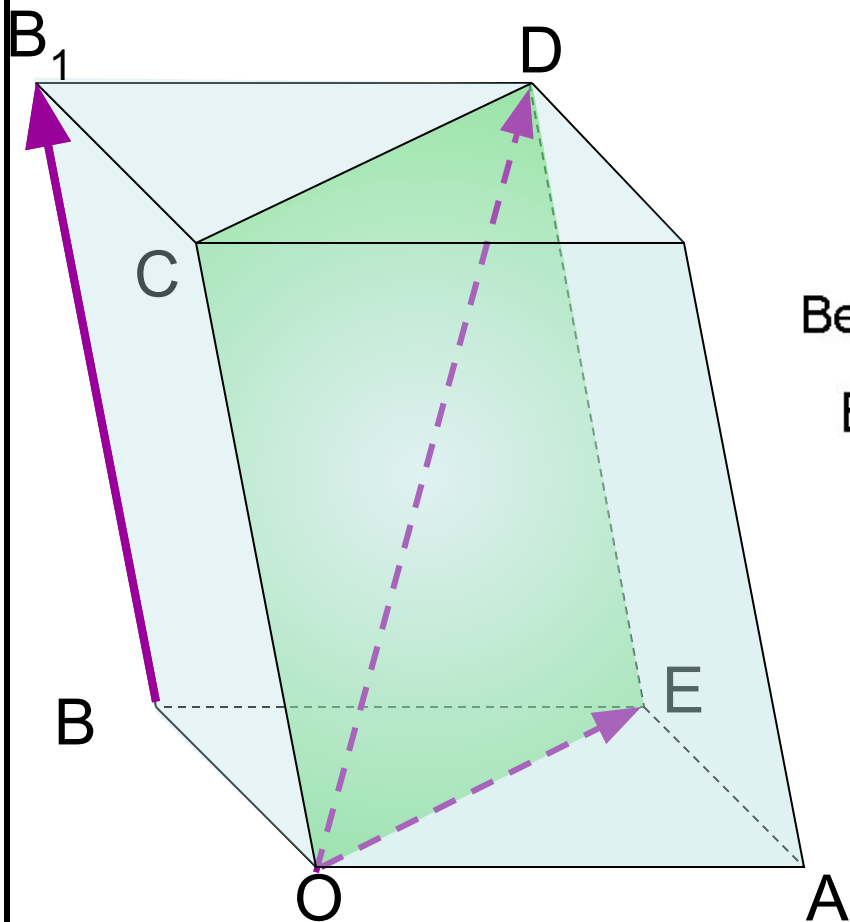
Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, также компланарны.





## § 1. Определение вектора.

Три произвольных вектора могут быть как компланарными, так и не компланарными.



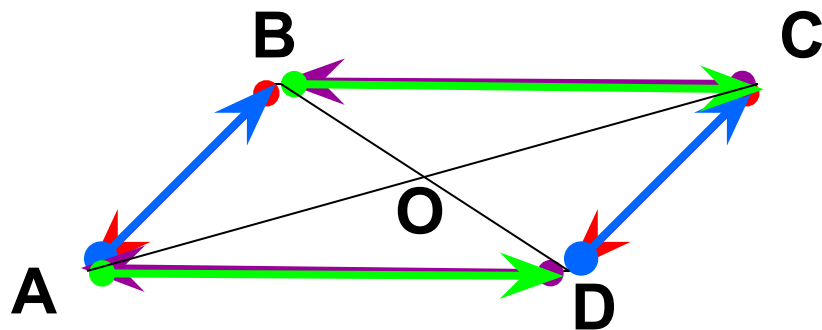
Векторы  $\vec{BB}_1$ ,  $\vec{OD}$  и  $\vec{OE}$  не компланарны

Векторы  $\vec{OC}$ ,  $\vec{OD}$  и  $\vec{OE}$  компланарны



## § 1. Определение вектора.

Векторы называются равными, если они сонаправлены и их длины равны.



$$1 \quad \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$$

$$2 \quad |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

ABCD – параллелограмм.

$$\vec{BA} = \vec{CD};$$

$$\vec{AB} = \vec{DC};$$

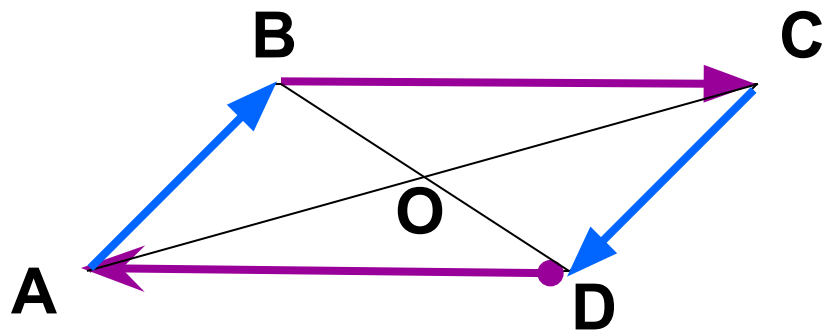
$$\vec{CB} = \vec{DA};$$

$$\vec{AD} = \vec{BC}.$$



## § 1. Определение вектора.

Векторы называются противоположными, если они противоположно направлены и их длины равны.



$$1 \quad \vec{a} \updownarrow \vec{b}$$

$$2 \quad |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

ABCD – параллелограмм.

$$\vec{DA} = -\vec{BC}; \quad \vec{AB} = -\vec{CD};$$

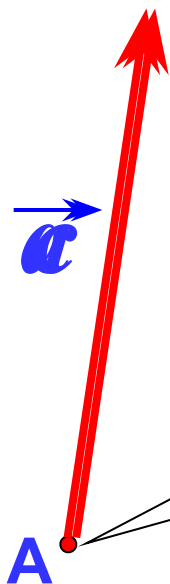


## § 1. Определение вектора.

Если точка  $A$  – начало вектора  $\vec{a}$ , то говорят, что

вектор  $\vec{a}$  отложен от точки  $A$

От любой точки  $M$  можно отложить вектор, равный данному вектору  $\vec{a}$ , и притом только один.



Вектор  $\vec{a}$  отложен от точки  $A$

$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c} \quad \vec{a} = \vec{c}$$

$M$

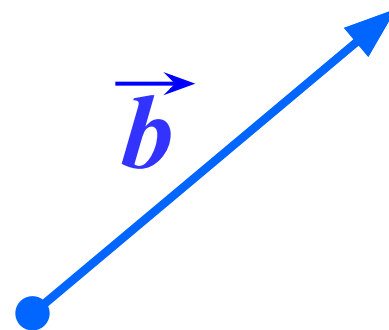
$$|\vec{a}| = |\vec{c}|$$



## § 1. Определение вектора.

### Угол между векторами

Углом  $\alpha$  между векторами называется наименьший угол, образуемый векторами при совмещении их начал.



$\vec{a}$

$\alpha$

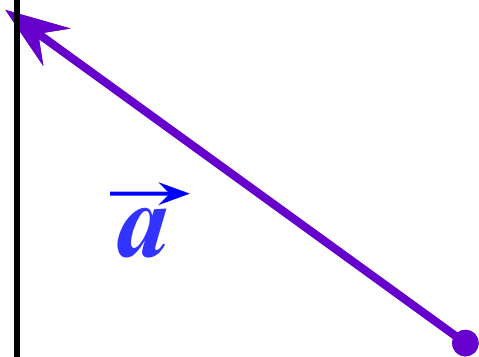
$\vec{b}$

$\bullet$  O

$\vec{a}$   $\vec{b} = \alpha$

Угол между векторами  
равен  $\alpha$

$\vec{a}$  и  $\vec{b}$



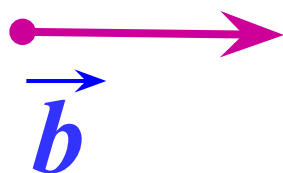
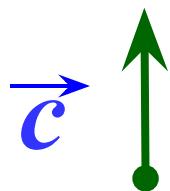




## § 1. Определение вектора.

Для коллинеарных векторов  $\alpha = 0$  или  $\alpha = 180^\circ$

Два вектора называются **ортогональными**, если угол между ними равен  $90^\circ$ .

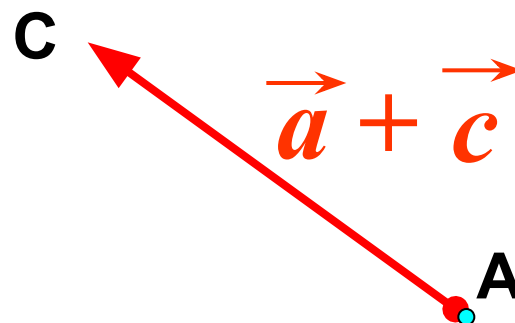
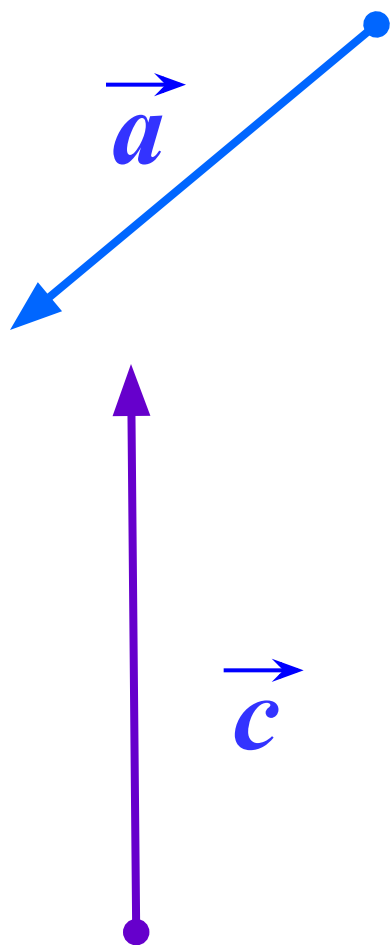


$$\vec{b} \perp \vec{c}$$



## § 2. Действия над векторами.

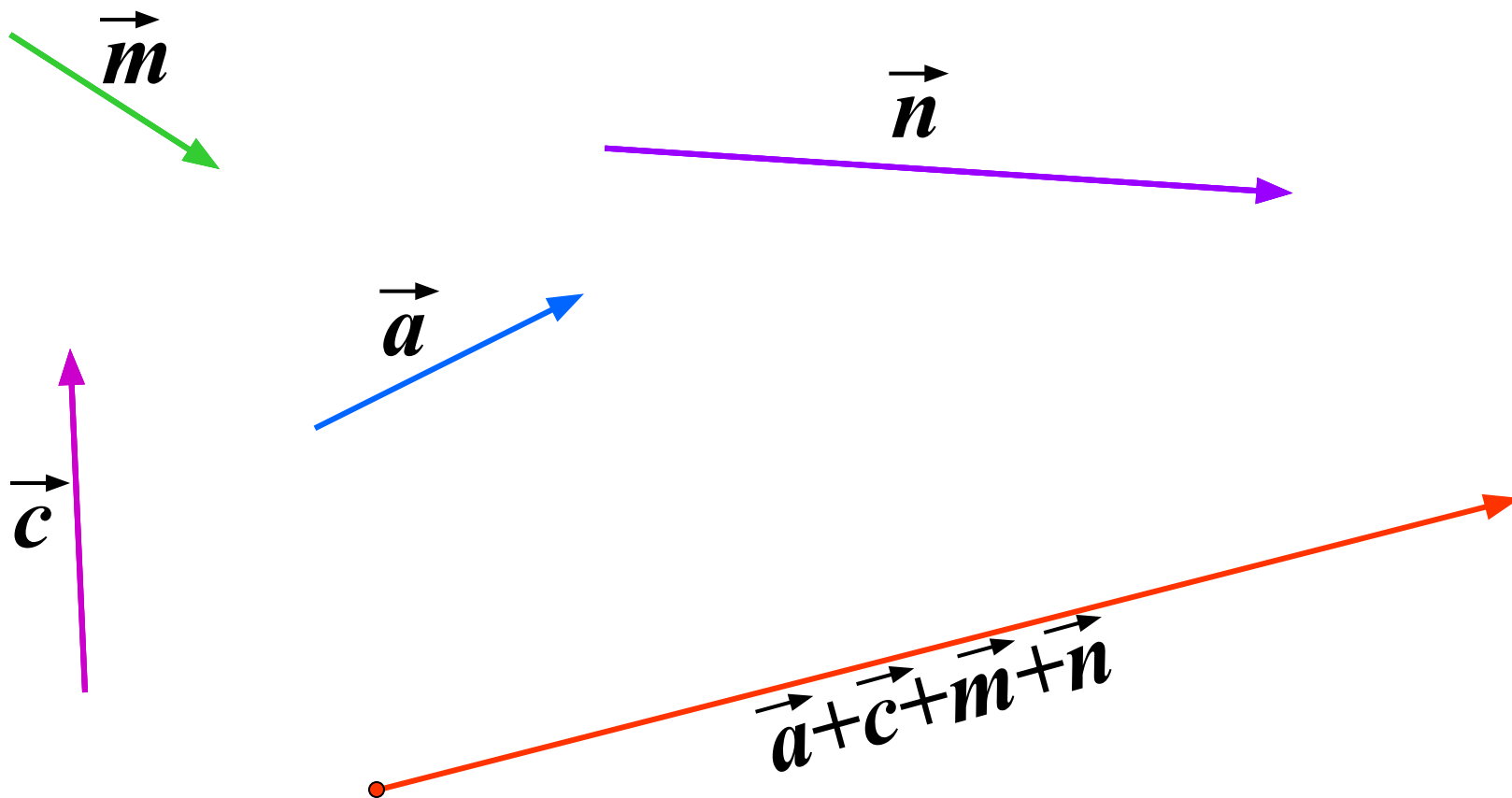
Сложение векторов. Правило треугольника.





## § 2. Действия над векторами.

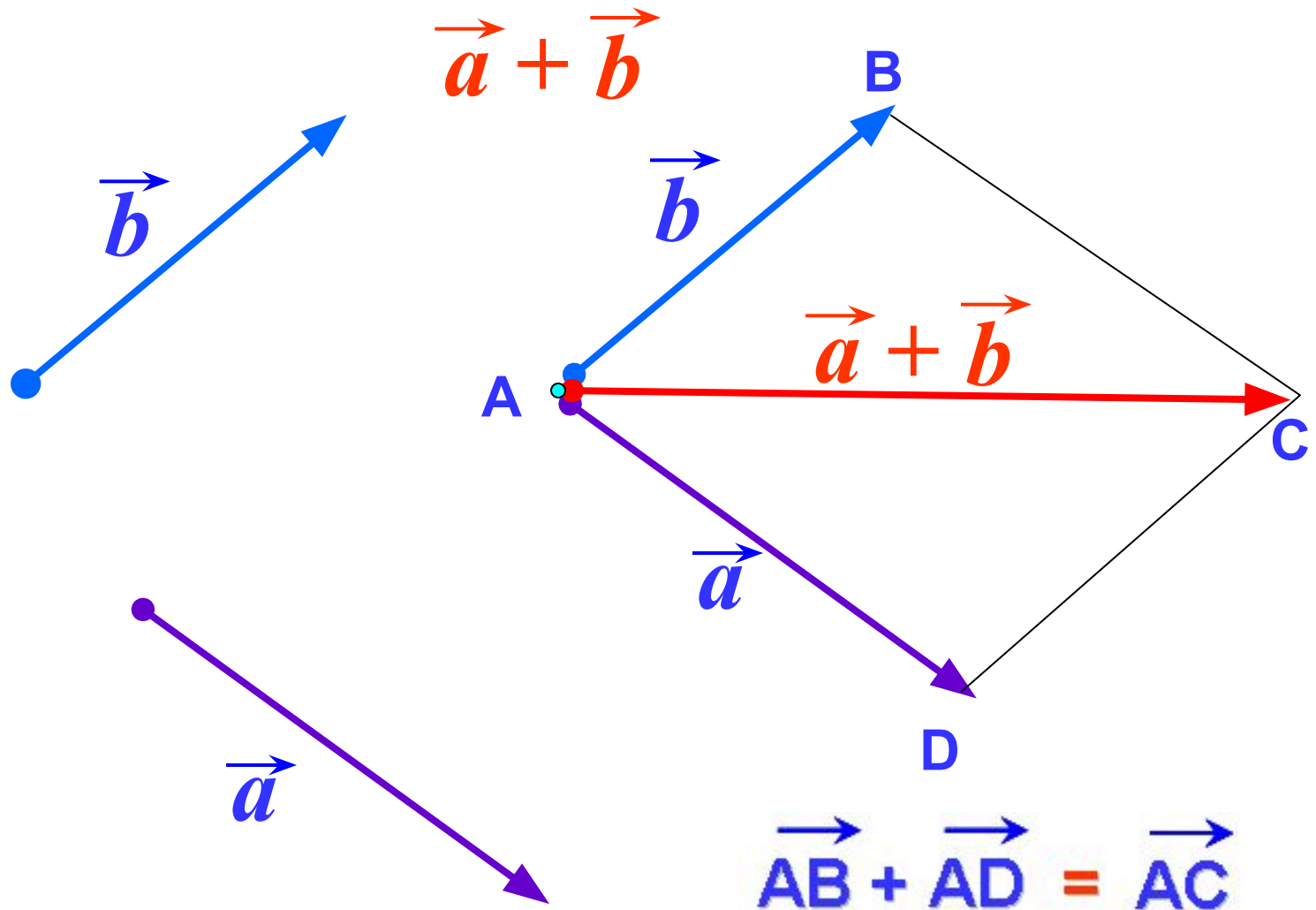
Сложение векторов. Правило многоугольника.





## § 2. Действия над векторами.

Сложение векторов. Правило параллелограмма.





## § 2. Действия над векторами.

Сложим первые две силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  (аксиома параллелограмма).  
Количество сил уменьшилось на единицу.

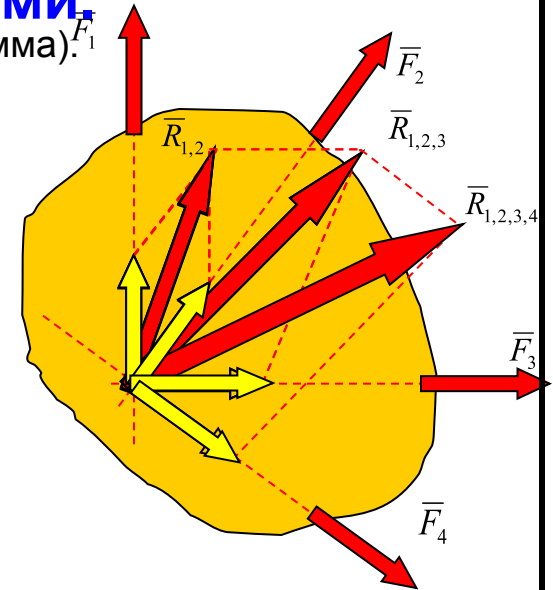
$$\vec{R}_{1,2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Сложим полученную равнодействующую  $\vec{R}_{1,2}$  со следующей силой  $\vec{F}_3$ .  
Количество сил вновь уменьшилось на единицу.

$$\vec{R}_{1,2,3} = \vec{R}_{1,2} + \vec{F}_3$$

Повторим эту же операцию со следующей силой  $\vec{F}_4$ .  
Осталась всего одна сила, эквивалентная исходной системе сил.

$$\vec{R}_{1,2,3,4} = \vec{R}_{1,2,3} + \vec{F}_4$$



Сложение сил построением параллелограммов можно заменить построением силового треугольника – выбирается одна из сил или изображается параллельно самой себе с началом в любой произвольной точке, все другие силы изображаются параллельными самим себе с началом, совпадающим с концом предыдущей силы.

Результатом такого сложения является вектор, направленный из начала первой силы к концу последней из сил.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \dots = \sum \vec{F}_i$$

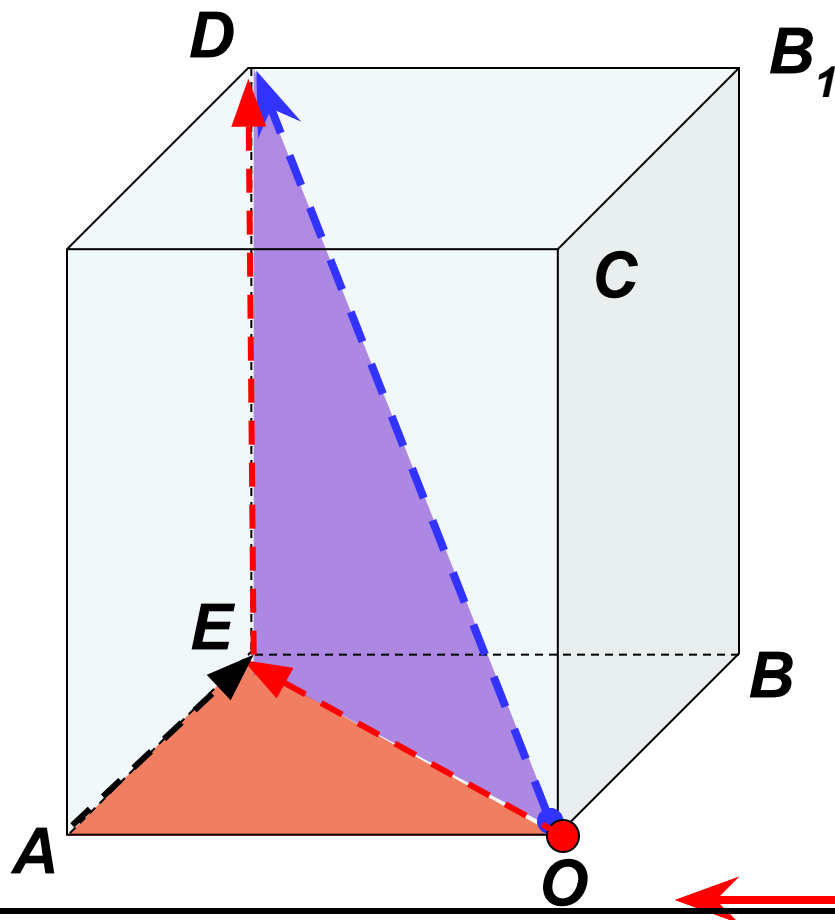


## § 2. Действия над векторами. Правило параллелепипеда.

из  $\triangle OAE$

$$\vec{OD} = \vec{OE} + \vec{ED} = (\vec{OA} + \vec{AE}) + \vec{ED} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} =$$

$$= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$



$\vec{a}$

$\vec{c}$

$\vec{b}$

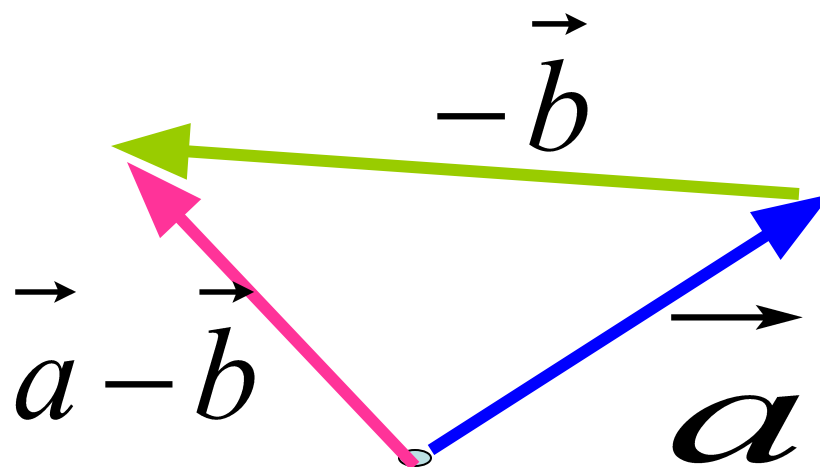


## § 2. Действия над векторами.

### Вычитание векторов



$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



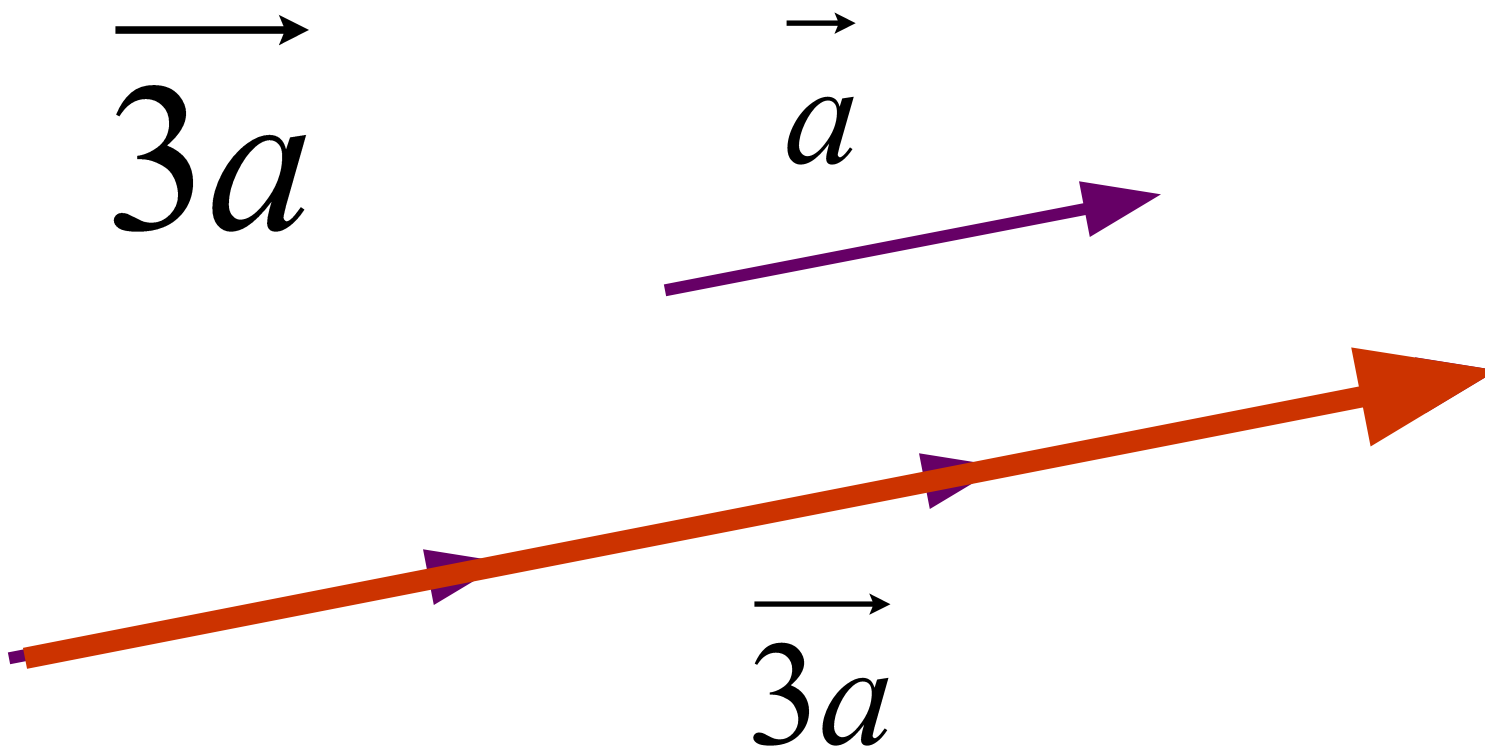


## § 2. Действия над векторами.

### Умножение вектора на число

Произведением вектора  $\vec{a}$  на число  $\alpha$  называется вектор, такой что:

$$1) |\vec{b}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|, \quad 2) \vec{b} \parallel \vec{a}.$$







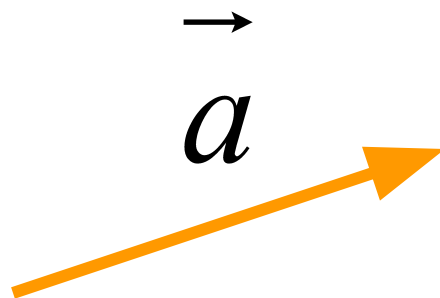
## § 2. Действия над векторами.

### Умножение вектора на число

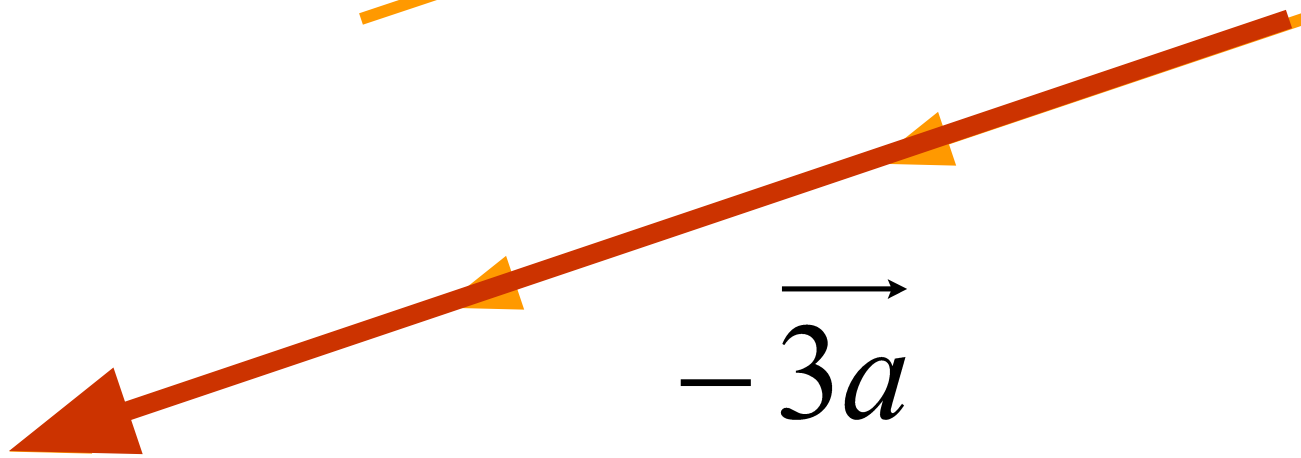
Произведением вектора  $\vec{a}$  на число  $\alpha$  называется вектор, такой что:

$$1) |\vec{b}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|, \quad 2) \vec{b} \parallel \vec{a}.$$

$\vec{-3a}$



$\vec{a}$



$\vec{-3a}$

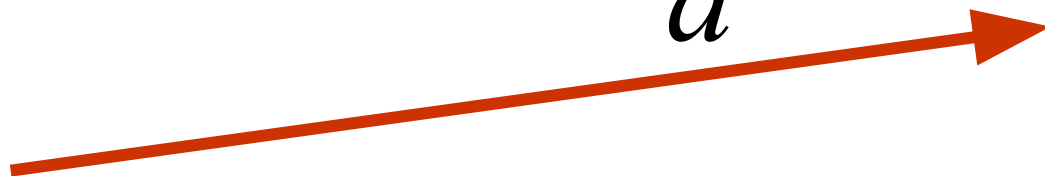


## § 2. Действия над векторами.

### Умножение вектора на число

$$\frac{1}{2} \vec{a}$$

$\vec{a}$



$$\frac{1}{2} \vec{a}$$

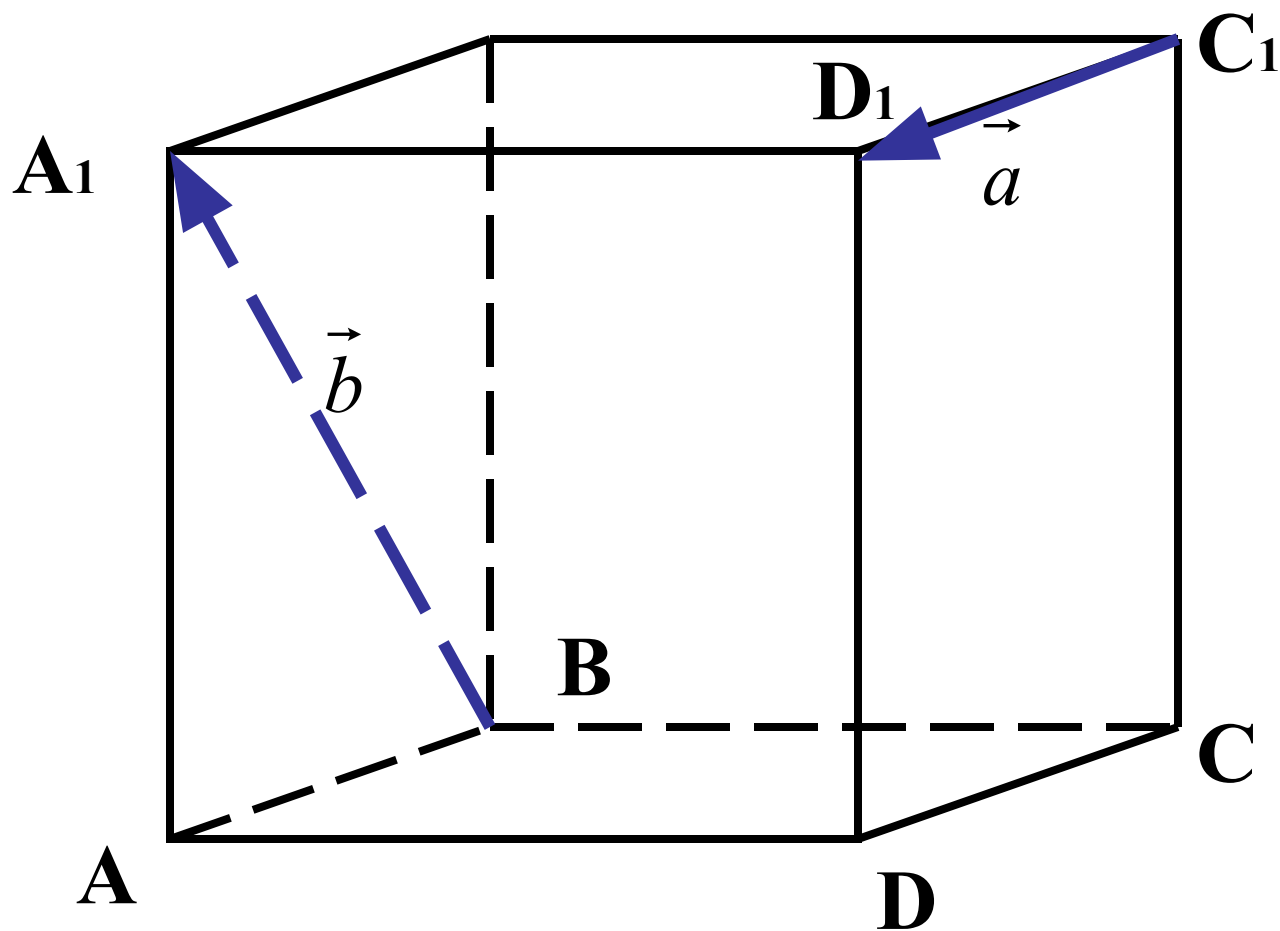
$$-\frac{1}{2} \vec{a}$$



$$-\frac{1}{2} \vec{a}$$



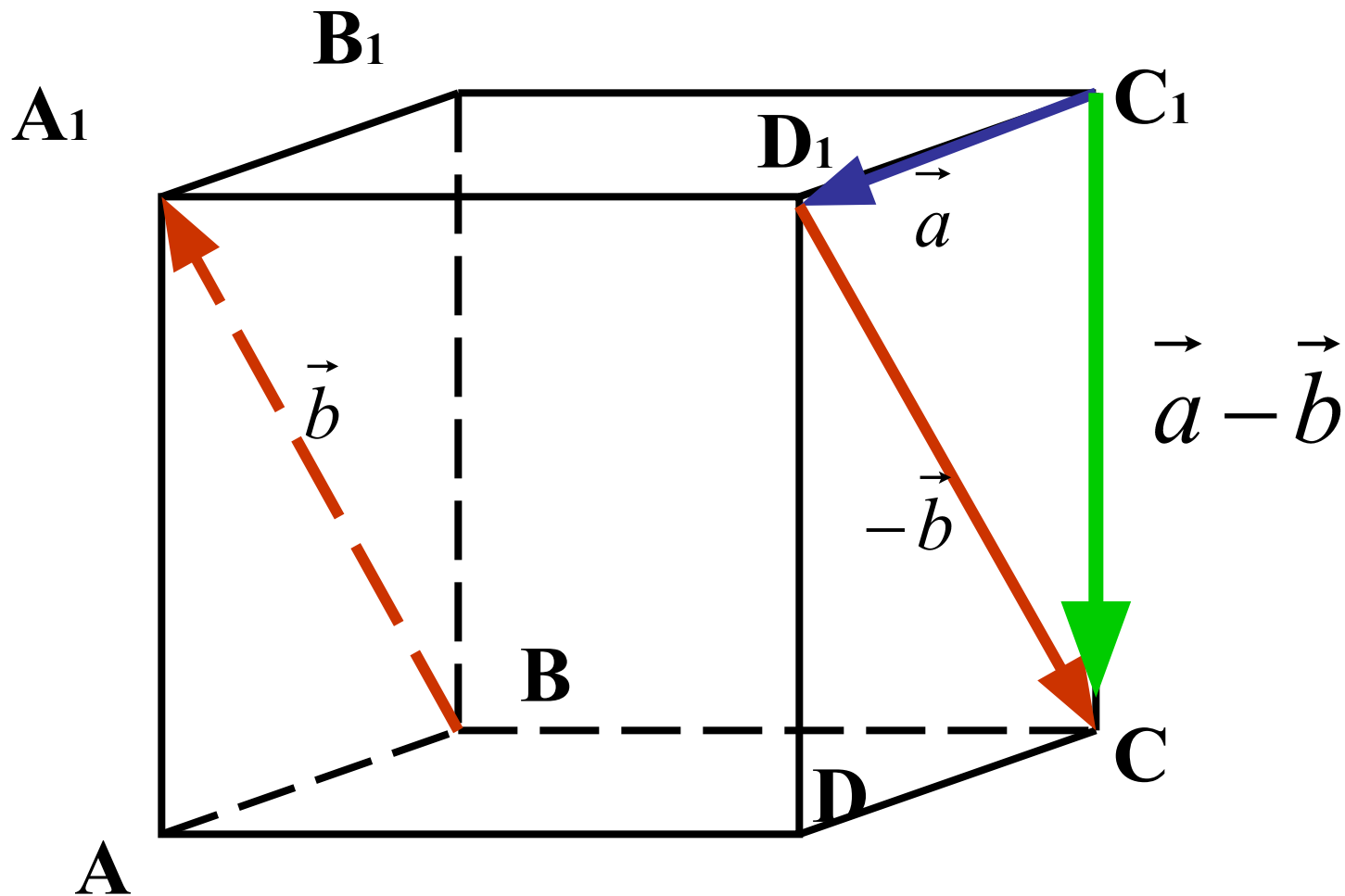
## § 2. Действия над векторами.





## § 2. Действия над векторами.

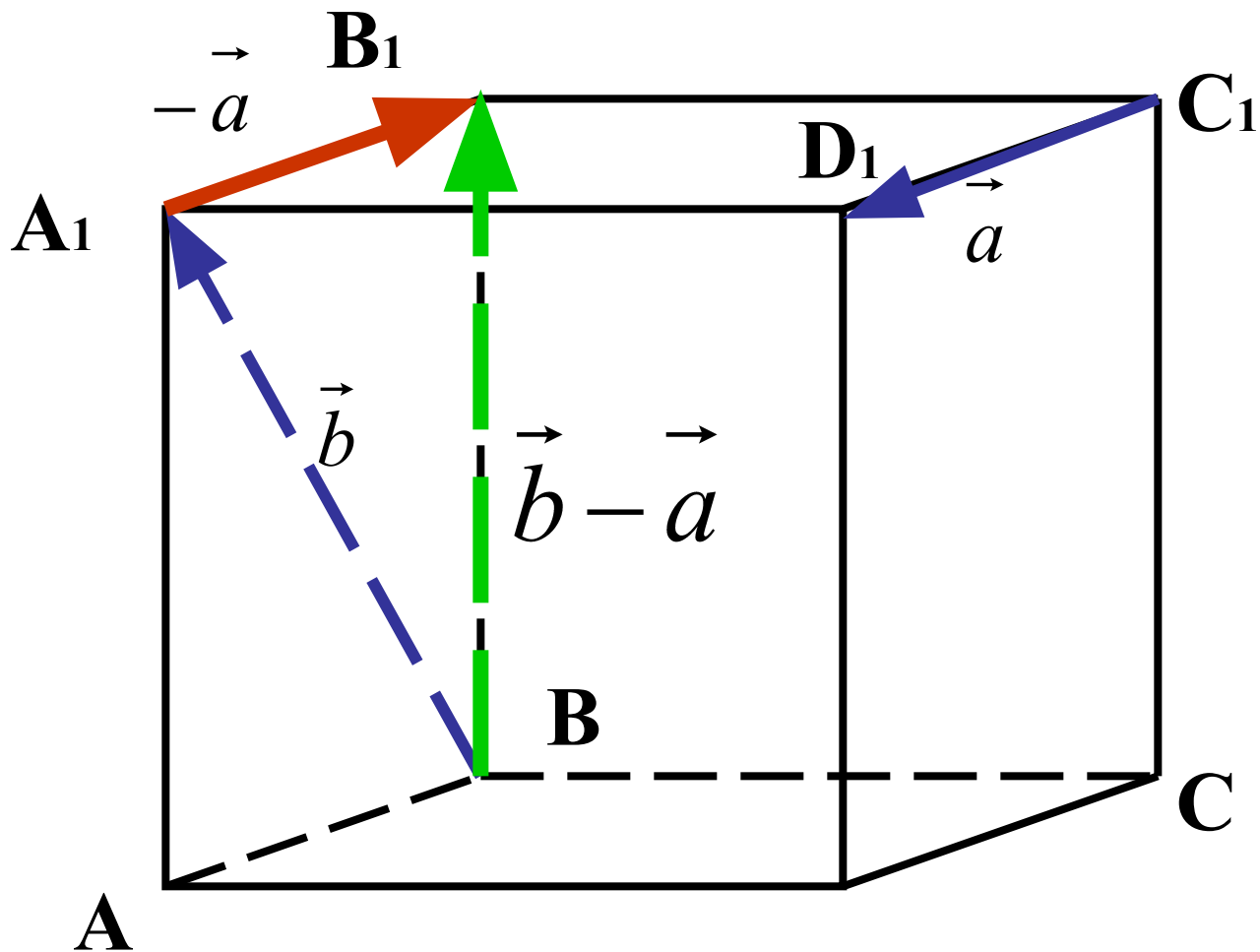
$$\vec{a} - \vec{b}$$





## § 2. Действия над векторами.

$$\vec{b} - \vec{a}$$





## § 3. Линейная зависимость векторов

Определение 1. *Линейной комбинацией* векторов  $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$

называется вектор

$$\overline{b} = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \dots + \lambda_n \overline{a_n},$$

где  $\lambda_i$  – некоторые числа.

Определение 2. Вектора  $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$  называются *линейно зависимыми*, если существуют действительные числа  $\lambda_i$ , такие, что хотя бы одно из них отлично от нуля, и при этом выполняется равенство:

$$\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \dots + \lambda_n \overline{a_n} = \overline{0}.$$

Определение 2. Вектора  $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$  называются *линейно независимыми*,

если из условия  $\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \dots + \lambda_n \overline{a_n} = \overline{0}$

следует тривиальная комбинация  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ .



### § 3. Линейная зависимость векторов

**Теорема 1.** Для линейной зависимости векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  необходимо и достаточно, чтобы один из них был линейной комбинацией остальных.

Доказательство.

Необходимость.

Пусть вектора линейно зависимы. Тогда существуют числа  $\lambda_j$ , не равные нулю одновременно, такие, что  $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = 0$ .

Пусть  $\lambda_1 \neq 0$ , тогда

$$\vec{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{a}_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \vec{a}_n, \quad \text{что доказывает необходимость.}$$

Достаточность.

Пусть для определенности  $\vec{a}_1 = \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$ .

Тогда  $(-1)\vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = 0$ , причем  $|-1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n| > 0$ .

Это и есть условие линейной зависимости.



## § 3. Линейная зависимость векторов

Для линейно зависимых векторов справедливы теоремы 2–6.

**Теорема 2.** Один вектор линейно зависим тогда и только тогда, когда он нулевой.

**Теорема 3.** Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

**Теорема 4.** Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Доказательство.

Необходимость.

Пусть три вектора  $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$  линейно зависимы. Тогда существуют не равные одновременно нулю три числа  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , такие, что

$$\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \lambda_3 \overline{a_3} = \overline{0}.$$

Тогда по теореме 1 один из векторов есть линейная комбинация двух остальных, и, значит, данные три вектора компланарны.

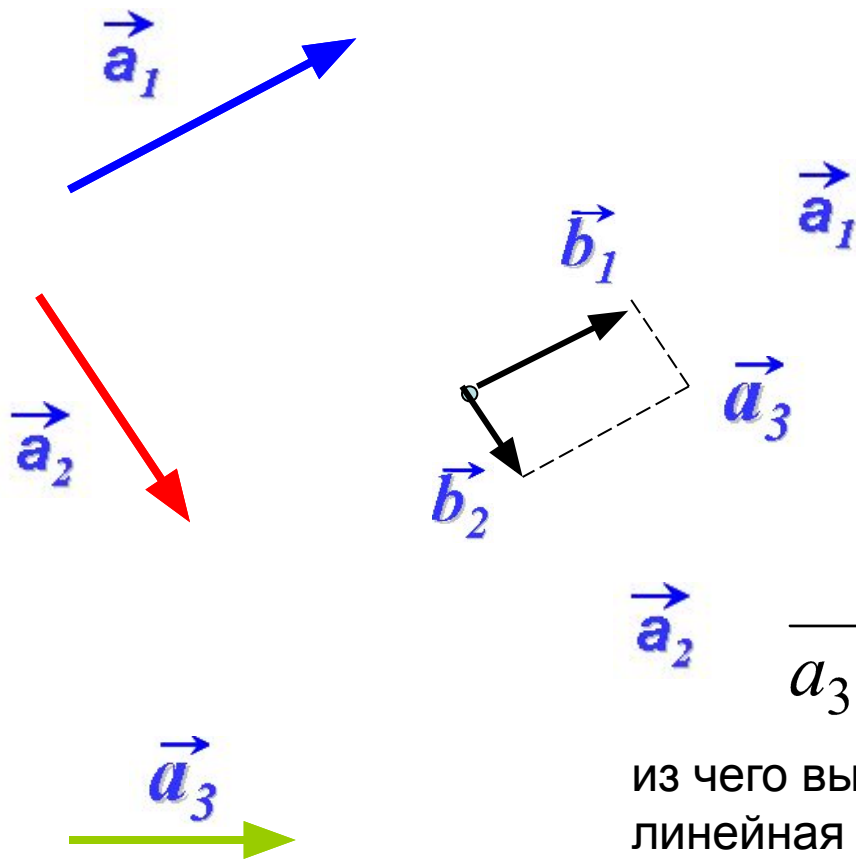




## § 3. Линейная зависимость векторов

Достаточность.

Пусть  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  компланарны, и пусть вектора  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  неколлинеарны.



$$\vec{a}_3 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$$

$$\vec{a}_1 \parallel \vec{b}_1 \Rightarrow \vec{b}_1 = \lambda_1 \vec{a}_1$$

$$\vec{a}_2 \parallel \vec{b}_2 \Rightarrow \vec{b}_2 = \lambda_2 \vec{a}_2$$

$$\vec{a}_3 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$$

из чего вытекает (вследствие теоремы 1)  
линейная зависимость векторов

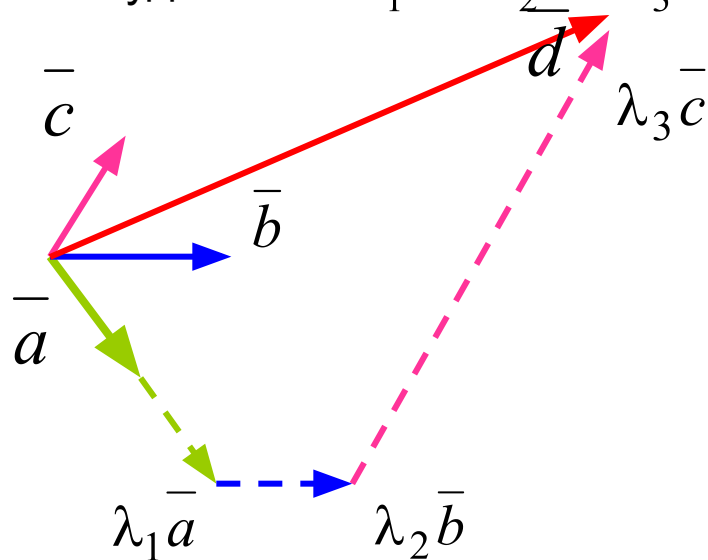


### § 3. Линейная зависимость векторов

**Теорема 5.** Любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы.

Действительно, можно подобрать, причем единственным образом, такие числа

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , что будет  $\vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}$ .



**Теорема 6.** Если среди векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  имеется хотя бы один нулевой вектор, то вектора  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  линейно зависимы.



## § 3. Линейная зависимость векторов

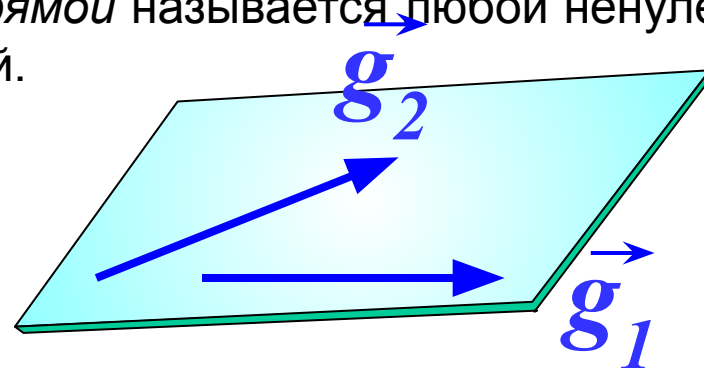
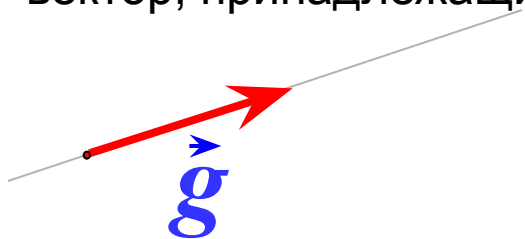
Свойства линейно независимых векторов:

- Один вектор линейно независим тогда и только тогда, когда он ненулевой.
- Два вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда они неколлинеарны.
- Три вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда они некомпланарны.



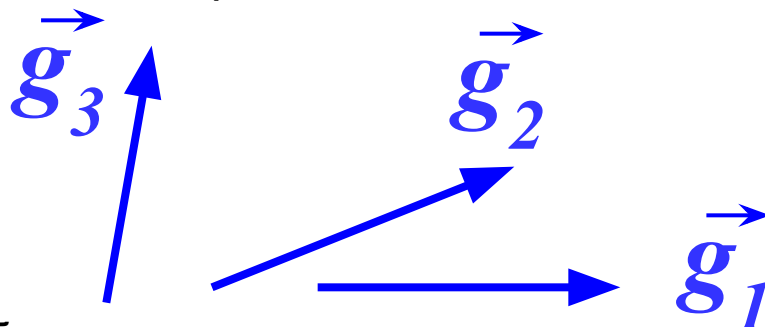
## § 4. Базис. Координаты вектора в базисе.

Определение 1. *Базисом на прямой* называется любой ненулевой вектор, принадлежащий этой прямой.



Определение 2. *Базисом на плоскости* называется любая пара линейно независимых векторов, лежащих на этой плоскости.

Определение 3. *Базисом в пространстве* называется любая тройка линейно независимых векторов.

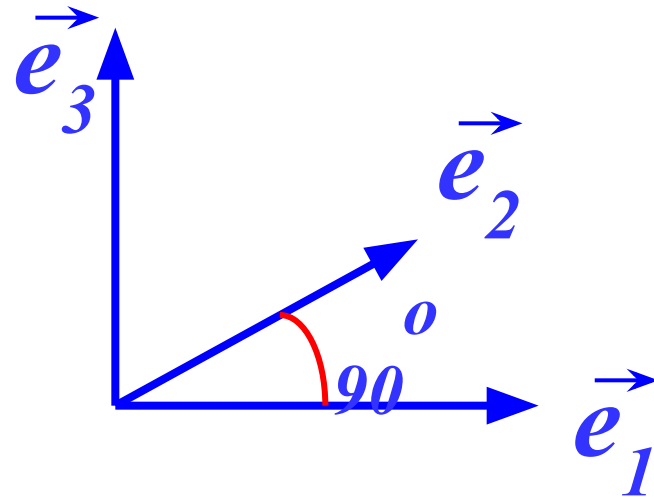
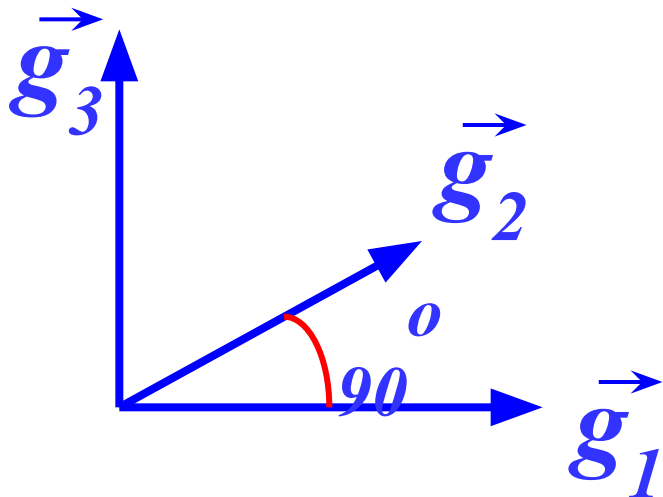


Будем обозначать базис в пространстве, составленный из линейно независимых векторов, как  $\{\overline{g_1}, \overline{g_2}, \overline{g_3}\}$ .



## § 4. Базис. Координаты вектора в базисе.

Определение 4. Базис называется *ортогональным*, если образующие его вектора попарно перпендикулярны.



Определение 5. Ортогональный базис называется *ортонормированным*, если образующие его вектора имеют единичную длину.

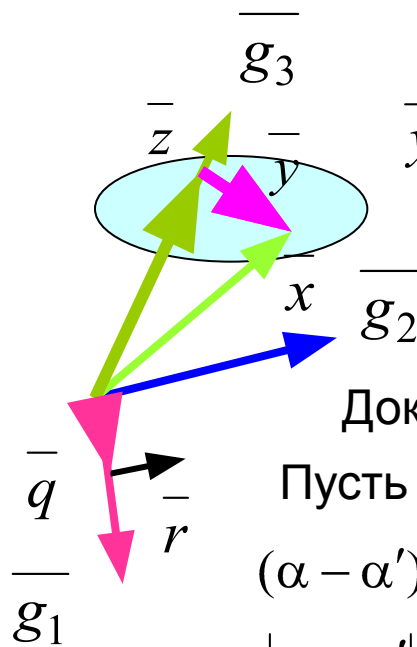
$$\begin{aligned} \left| \vec{e}_1 \right| &= 1 \\ \left| \vec{e}_2 \right| &= 1 \\ \left| \vec{e}_3 \right| &= 1 \end{aligned}$$



## § 4. Базис. Координаты вектора в базисе.

**Теорема 1.** Любой вектор  $\vec{x}$  в пространстве с базисом  $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$  может быть представлен, и причем единственным способом, в виде  $x = \alpha g_1 + \beta g_2 + \gamma g_3$ , где  $\alpha, \beta, \gamma$  – некоторые числа.

**Доказательство.** Докажем вначале, что такие числа существуют.



$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ , и в силу коллинеарности  $\vec{z} = \gamma \vec{g}_3$ .

$\vec{y} = \vec{q} + \vec{r}$ , и в силу коллинеарности  $\vec{q} = \alpha \vec{g}_1, \vec{r} = \beta \vec{g}_2$

Следовательно,  $\vec{y} = \alpha \vec{g}_1 + \beta \vec{g}_2$  и

$$\vec{x} = \alpha \vec{g}_1 + \beta \vec{g}_2 + \gamma \vec{g}_3.$$

Докажем единственность разложения по данному базису.

Пусть  $\vec{x} = \alpha \vec{g}_1 + \beta \vec{g}_2 + \gamma \vec{g}_3; \vec{x} = \alpha' \vec{g}_1 + \beta' \vec{g}_2 + \gamma' \vec{g}_3$ .

$$(\alpha - \alpha') \vec{g}_1 + (\beta - \beta') \vec{g}_2 + (\gamma - \gamma') \vec{g}_3 = 0,$$

$$|\alpha - \alpha'| + |\beta - \beta'| + |\gamma - \gamma'| \neq 0$$

Но это условие и означает, что вектора  $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$  являются линейно зависимыми и не могут образовывать базис. Это, в свою очередь, доказывает единственность разложения



## § 4. Базис. Координаты вектора в базисе.

Определение 6. Числа  $\alpha, \beta, \gamma$  в разложении  $\bar{x} = \alpha \bar{g}_1 + \beta \bar{g}_2 + \gamma \bar{g}_3$  называются *координатами* вектора  $\bar{x}$  в базисе  $\{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3\}$ .

Координаты – величины скалярные.

Для краткой записи вектора  $\bar{x} = \alpha \bar{g}_1 + \beta \bar{g}_2 + \gamma \bar{g}_3$  в координатном представлении будем использовать следующую форму:  $\bar{x}\{\alpha, \beta, \gamma\}$ , т. е. каждому вектору в данном базисе можно поставить во взаимно однозначное соответствие матрицу-строку.



## § 5. Действия с векторами в координатном представлении.

В каждом конкретном базисе  $\{\overline{g_1}, \overline{g_2}, \overline{g_3}\}$  каждый вектор находится во взаимно-однозначном соответствии с упорядоченной тройкой чисел  $\alpha, \beta, \gamma$  – своими координатами. Возникает вопрос о том, как выполнять операции с векторами в координатном представлении.

С другой стороны, ранее были изучены матрицы и операции над ними, и целесообразно было бы свести операции с векторами в координатном представлении к матричным операциям.

**Теорема 1.** Два вектора

$$\overline{x} = \xi_1 \overline{g_1} + \xi_2 \overline{g_2} + \xi_3 \overline{g_3} \quad \text{и} \quad \overline{y} = \eta_1 \overline{g_1} + \eta_2 \overline{g_2} + \eta_3 \overline{g_3}$$

равны тогда и только тогда, когда равны матрицы координат

$$\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}.$$





## § 5. Действия с векторами в координатном представлении.

**Теорема 2.** Пусть в некотором базисе даны два вектора  $\bar{x}\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$  и  $\bar{y}\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ . Тогда в этом базисе

$$1) \alpha \bar{x} = \{\alpha \xi_1, \alpha \xi_2, \alpha \xi_3\},$$

$$2) \bar{x} + \bar{y} = \{\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \xi_3 + \eta_3\}.$$

Иными словами: *при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число; при сложении векторов складываются их соответствующие координаты.*



## § 5. Действия с векторами в координатном представлении.

**Теорема 3.** Два вектора

$$\bar{x} = \xi_1 \bar{g}_1 + \xi_2 \bar{g}_2 + \xi_3 \bar{g}_3 \quad \bar{y} = \eta_1 \bar{g}_1 + \eta_2 \bar{g}_2 + \eta_3 \bar{g}_3 \quad \text{на}$$

плоскости линейно зависимы тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты в некотором базисе пропорциональны, т. е.

**Доказательство.** 
$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

**Необходимость.** Пусть вектора  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  линейно зависимы, тогда по теореме 3.1  $\bar{x} = \lambda \bar{y}$ , или в координатной форме 
$$\begin{cases} \xi_1 = \lambda \eta_1 \\ \xi_2 = \lambda \eta_2 \end{cases}$$
 Исключив  $\lambda$  из этих уравнений, получаем

$$\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = 0, \quad \text{что и означает равенство нулю определителя.}$$

**Достаточность.** Пусть 
$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} = 0.$$
 Тогда  $\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = 0$ ,

откуда 
$$\frac{\xi_1}{\eta_1} = \frac{\xi_2}{\eta_2}.$$
 Таким образом, вектора  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$

пропорциональны, а, значит, и линейно зависимы.



## § 5. Действия с векторами в координатном представлении.

**Теорема 4.** Три вектора в пространстве

$$\bar{x} = \xi_1 \bar{g}_1 + \xi_2 \bar{g}_2 + \xi_3 \bar{g}_3, \quad \bar{y} = \eta_1 \bar{g}_1 + \eta_2 \bar{g}_2 + \eta_3 \bar{g}_3 \quad \text{и} \quad \bar{z} = \kappa_1 \bar{g}_1 + \kappa_2 \bar{g}_2 + \kappa_3 \bar{g}_3$$

линейно зависимы тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \kappa_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \kappa_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \kappa_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Следствие. Равенства  $\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} = 0$  и  $\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \kappa_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \kappa_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \kappa_3 \end{vmatrix} = 0$

соответственно являются необходимыми и достаточными условиями коллинеарности пары векторов на плоскости и компланарности тройки векторов в пространстве.



## § 5. Действия с векторами в координатном представлении.

**Пример 1.** Показать, что вектора  $\bar{a}\{3; -1; 2\}$ ,  $\bar{b}\{1; -2; 0\}$ ,  $\bar{c}\{-1; 7; 1\}$  образуют базис в трехмерном пространстве.

**Решение.**

Вычислим определитель, столбцы которого представляют координаты векторов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Так как определитель отличен от нуля, то столбцы линейно независимы, т. е. указанные вектора образуют базис.



## § 5. Действия с векторами в координатном представлении.

**Пример 2.**

Разложить вектор  $\vec{c}$  по базису  $\{\vec{p}; \vec{q}; \vec{r}\}$ , где  $\vec{c}\{11; -6; 5\}$ ,  
 $\vec{p}\{3; -2; 1\}$ ,  $\vec{q}\{-1; 1; -2\}$ ,  $\vec{r}\{2; 1; -3\}$ .

**Решение.**

Разложим вектор  $\vec{c}$  по базису  $\{\vec{p}; \vec{q}; \vec{r}\}$  с неопределенными коэффициентами  $\alpha, \beta, \gamma$ :

$$\vec{c} = \alpha \vec{p} + \beta \vec{q} + \gamma \vec{r}.$$

В координатах это разложение представляет собой систему трех уравнений относительно  $\alpha, \beta, \gamma$ :

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta + 2\gamma = 11 \\ -2\alpha + \beta + \gamma = -6 \\ \alpha - 2\beta - 3\gamma = 5 \end{cases}$$

Имеем:

$\Delta = 8$ ;  $\Delta_{\alpha} = 16$ ;  $\Delta_{\beta} = -24$ ;  $\Delta_{\gamma} = 8$ ; откуда по правилу Крамера

$$\alpha = 2; \quad \beta = -3; \quad \gamma = 1.$$

Ответ:  $\vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$ .

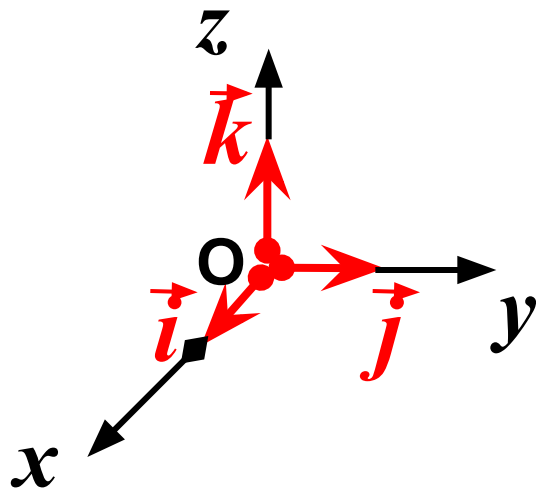


## § 6. Декартова система координат.

Определение 1. Совокупность базиса  $\{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3\}$  и точки  $O$ ,

в которую помещены начала всех базисных векторов, называется *декартовой системой координат* и обозначается  $\{O, \bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3\}$ .

Определение 2. Система координат  $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ , состоящая из ортонормированного ортогонального базиса и точки  $O$ , называется *прямоугольной декартовой системой координат*.



*$Ox$  – ось абсцисс*

*$Oy$  – ось ординат*

*$Oz$  – ось аппликат*



## § 6. Декартова система координат.



Рене́ Дека́рт  
1596 — 1650,  
— французский математик,,  
создатель аналитической  
геометрии и современной  
алгебраической символики,

Родился в городе Лаэ (ныне г. Декарт).

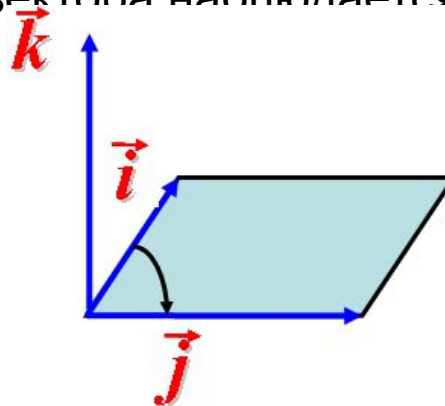
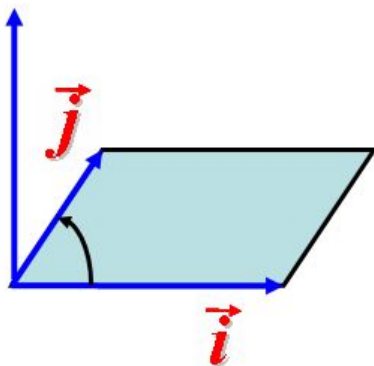
Декарт ввел математическую символику, близкую к современной. Коэффициенты он обозначал  $a, b, c, \dots$ , а неизвестные —  $x, y, z$ . Натуральный показатель степени принял современный вид. Появилась черта над подкоренным выражением.



## § 6. Декартова система координат.

$$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$$

Определение. Упорядоченная тройка ортов называется *правой*, если при совмещении начал векторов кратчайший поворот первого вектора ко второму с конца третьего вектора наблюдается против часовой стрелки.  $\vec{k}$



Определение. Упорядоченная тройка ортов  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  называется *левой*, если при совмещении начал векторов кратчайший поворот первого вектора ко второму с конца третьего вектора наблюдается по часовой стрелки.





## § 6. Декартова система координат.

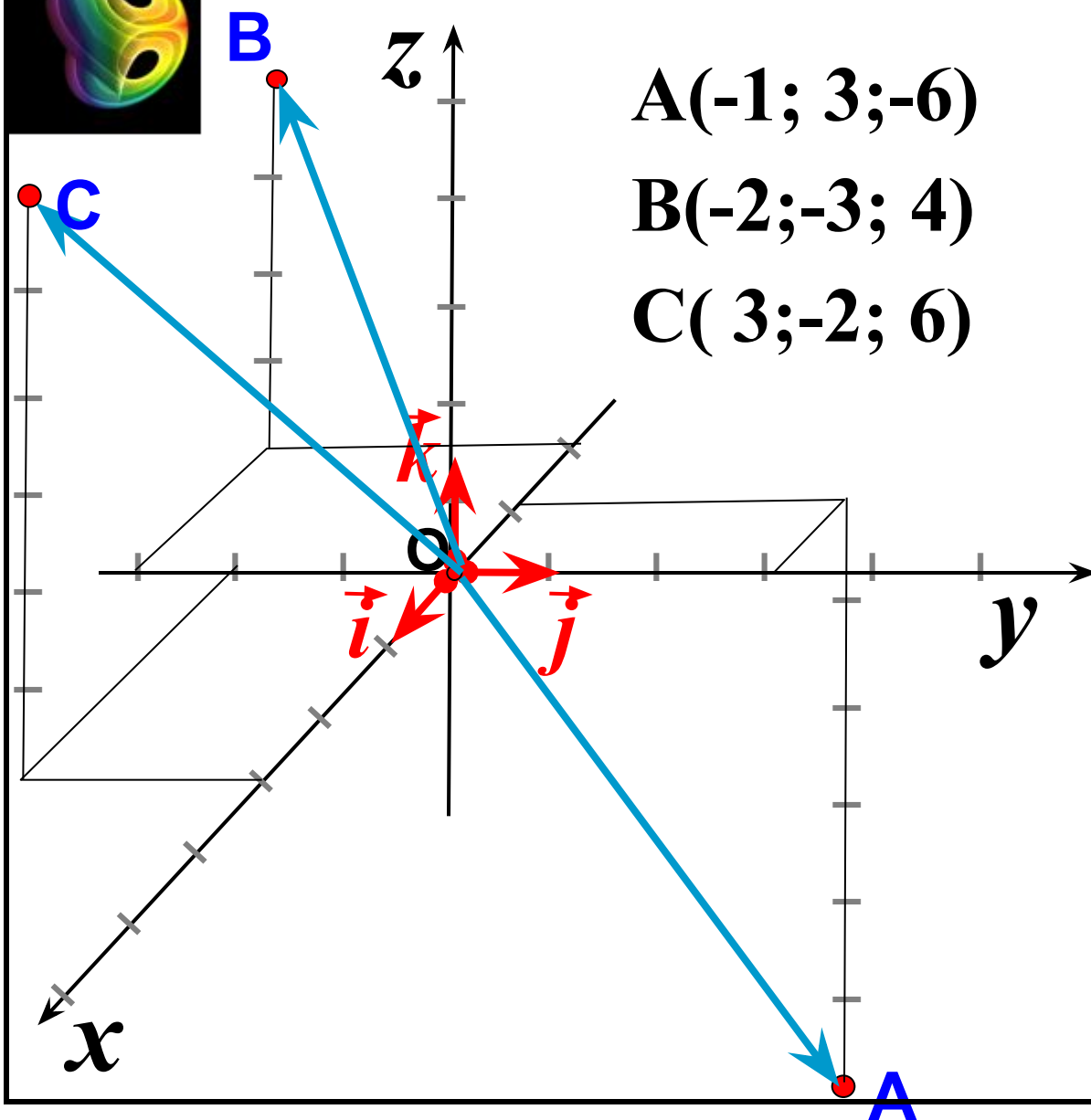
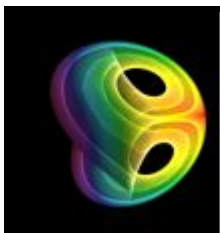
Если задана система координат  $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ , то произвольной точке  $M$  в пространстве можно поставить во взаимно однозначное соответствие вектор  $\bar{r}$ , начало которого находится в точке  $O$ , а конец в точке  $M$ .

Определение 3. Вектор  $\bar{r} = \overline{OM}$  называется *радиус-вектором* точки  $M$  в системе координат  $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ .

Определение 4. Координаты радиус-вектора точки  $M$  называются *координатами точки*  $M$  в системе координат  $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ .



## § 6. Декартова система координат.



$$A(-1; 3; -6)$$

$$B(-2; -3; 4)$$

$$C(3; -2; 6)$$

$$\vec{OA}\{-1; 3; -6\}$$

$$\vec{OB}\{-2; -3; 4\}$$

$$\vec{OC}\{3; -2; 6\}$$



## § 6. Декартова система координат.

Задача 1. Выразить координаты вектора  $\vec{AB}$  через координаты его начала  $A$  и конца  $B$ .

Из  $\triangle AOB$ ,  $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{OA} + \vec{OB}$

$B(x_2; y_2; z_2)$

$$\vec{OA}\{x_1; y_1; z_1\}$$

$$\vec{OB}\{x_2; y_2; z_2\}$$

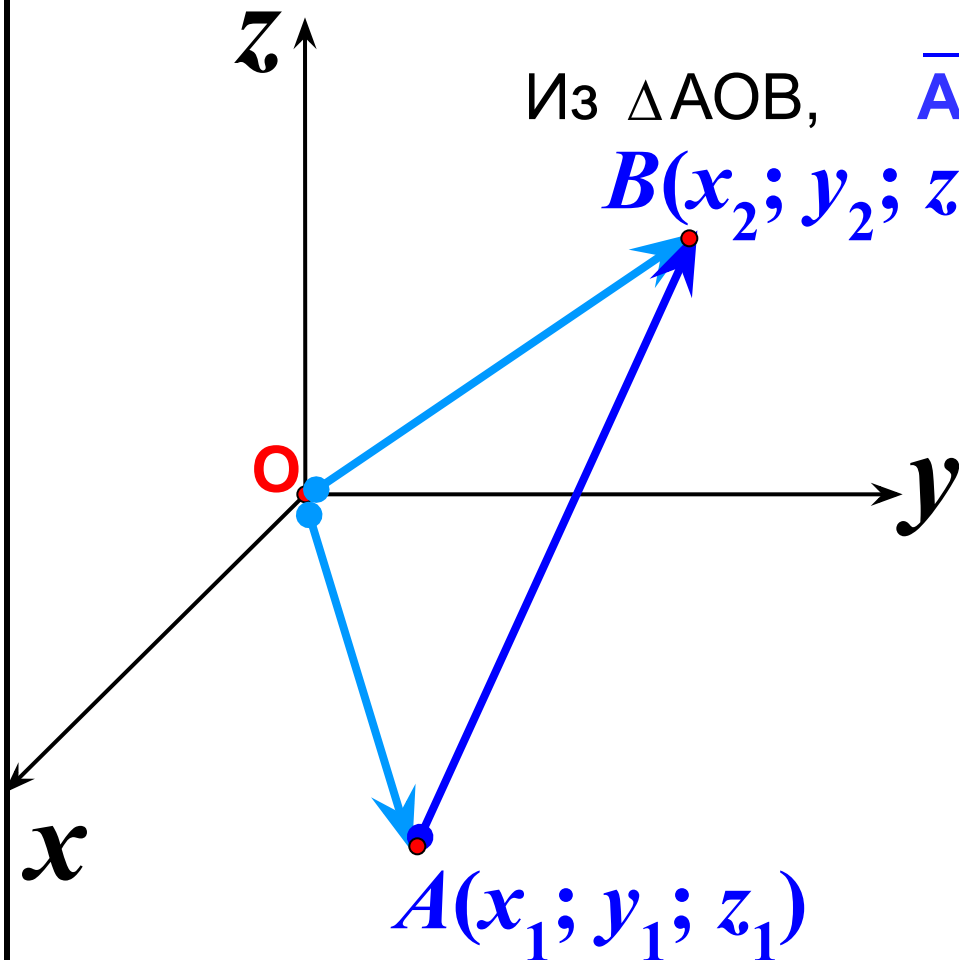
$$+\vec{-OA}\{-x_1; -y_1; -z_1\}$$

+

$$\vec{OB}\{x_2; y_2; z_2\}$$

---

$$\vec{AB}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$





## § 6. Декартова система координат.

### Задача 2

(условие коллинеарности двух векторов в координатной форме).

Пусть два вектора  $\vec{a} \{a_x, a_y, a_z\}$  и  $\vec{b} \{b_x, b_y, b_z\}$  коллинеарны.

Тогда по теореме 3.1 существует такое число  $\lambda$ , при котором

$$\vec{a} = \lambda \vec{b}, \text{ т. е. } a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \lambda (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}),$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \lambda b_x \\ a_y &= \lambda b_y \\ a_z &= \lambda b_z \end{aligned} \right\} \text{ или } \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda$$

– условие коллинеарности двух векторов.

**Если два вектора коллинеарны, то их координаты пропорциональны.**



## § 6. Декартова система координат.

Пример 1. Коллинеарны ли вектора

$$\vec{a} \{2; 6; -3\}; \vec{b} \{6; 18; -9\}$$

$$\frac{2}{6} = \frac{6}{18} = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3} \quad \vec{b} = 3\vec{a} \text{ или } \vec{a} = \frac{1}{3}\vec{b}$$

Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны.

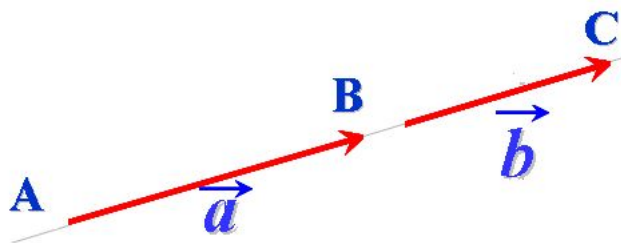


## § 6. Декартова система координат.

### Пример 2.

В декартовой системе координат  $A(1,3,0)$ ,  $B(2,0,-1)$ ,  $C(3,-3,-2)$ . Доказать, что точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  лежат на одной прямой.

Решение



Очевидно, точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  лежат на одной прямой, если векторы  $\overline{AB}\{\xi_1, \eta_1, \kappa_1\}$  и  $\overline{AC}\{\xi_2, \eta_2, \kappa_2\}$  коллинеарны.

Для этого необходимо выполнение условия:

$$\overline{AB} = \alpha \cdot \overline{AC}.$$

Отсюда следует (теорема 5.2), что координаты векторов  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$  должны быть пропорциональны.

$$\overline{AB}\{1, -3, -1\}; \overline{AC}\{2, -6, -2\}; \quad \frac{1}{2} = \frac{-3}{-6} = \frac{-1}{-2}.$$

Таким образом, точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  лежат на одной прямой.



## § 6. Декартова система координат.

### Задача 3

(деление отрезка в данном отношении). В декартовой системе координат заданы точки  $A(x_1, y_1, z_1)$ ,  $B(x_2, y_2, z_2)$ .  
Найти координаты точки  $M(x, y, z)$ , делящей отрезок  $AB$  в отношении  $\lambda$ :

$$|\overline{AM}| / |\overline{MB}| = \lambda.$$

Решение

Векторы  $\overline{AM}$  и  $\overline{MB}$  коллинеарны, сонаправлены, отношение их длин равно  $\lambda$ .

Тогда  $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$ .

Переходя к равенству соответствующих координат, получим:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x); \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y); \quad z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

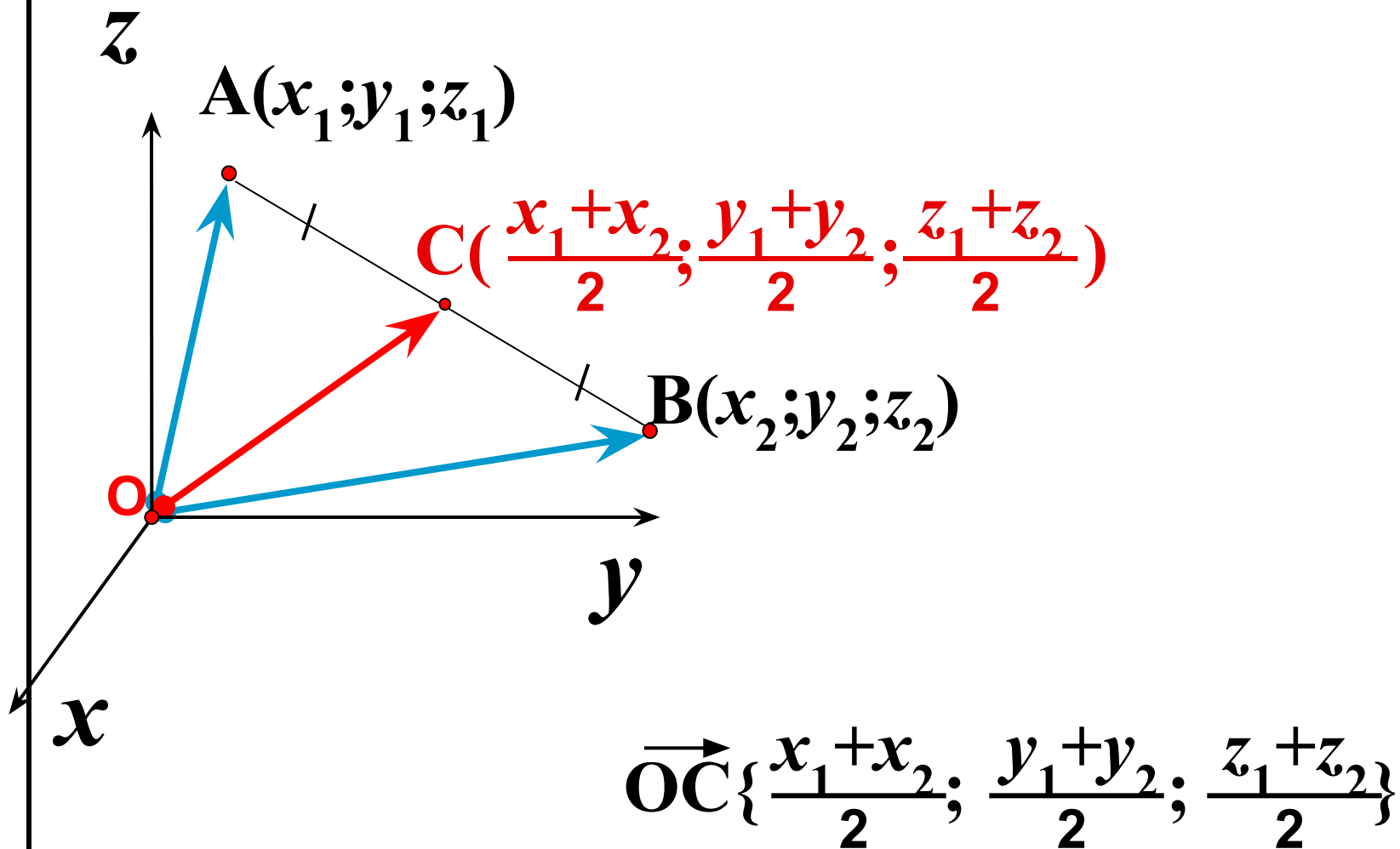
Выражая отсюда  $x, y, z$ , получим для координат точки  $M$ :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$



## § 6. Декартова система координат.

В частности, координаты середины отрезка ( $\lambda=1$ ) равны полусумме соответствующих координат его концов.





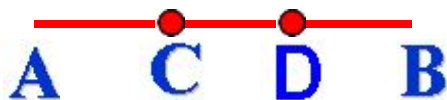


## § 6. Декартова система координат.

**Пример.**

Разделить отрезок  $AB$  ( $A(3,5; 1)$ ,  $B(2; 2)$ ) на три равные части.

**Решение**



$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

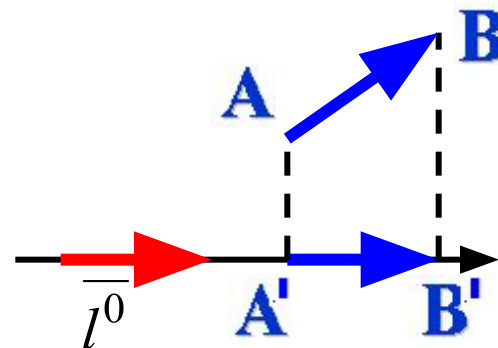
$$\lambda_c = \frac{|AC|}{|CB|} = \frac{1}{2}, \quad x_c = \frac{3,5 + 0,5 \cdot 2}{1 + 0,5} = 3, \quad y_c = \frac{1 + 0,5 \cdot 2}{1 + 0,5} = \frac{4}{3}.$$

$$\lambda_D = \frac{|AD|}{|DB|} = 2, \quad x_D = \frac{3,5 + 2 \cdot 2}{1 + 2} = 2,5; \quad y_D = \frac{1 + 2 \cdot 2}{1 + 2} = \frac{5}{3}.$$



## § 7. Проекция вектора на ось.

Пусть вектор  $\overline{AB}$  лежит на некоторой оси  $l$ . Направление орта  $\overline{l^0}$  соответствует направлению оси.



Определение 1. *Проекцией вектора*, лежащего на оси, на эту ось называется число, по абсолютной величине равное длине вектора и взятое со знаком плюс, если направление вектора совпадает с направлением оси и со знаком минус, если они противоположны.

Пусть вектор  $\overline{AB}$  не лежит на некоторой оси  $l$ . Из точек  $A$  и  $B$  опустим перпендикуляры на ось. Вектор  $\overline{A'B'}$  называется *компонентой вектора* по оси  $l$ .  $\overline{AB}$

Определение 2. *Проекцией вектора, не лежащего на оси  $l$* , на эту ось называется проекция его компоненты по оси  $l$  на эту же ось.

Проекция вектора на ось обычно обозначается так:  $\text{пр}_l \overline{AB}$ .



## § 7. Проекция вектора на ось.

Свойства проекций вектора на ось:

1. Проекция вектора на ось равна произведению длины вектора на косинус угла между вектором и осью:

$$\text{пр}_l \overline{AB} = |\overline{AB}| \cos \theta, \text{ где } \theta \text{ – угол между вектором и осью.}$$

2. Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций этих векторов на эту же ось, т. е.  $\text{пр}_l(\overline{a} + \overline{b}) = \text{пр}_l \overline{a} + \text{пр}_l \overline{b}$ .

3. Проекция на ось вектора, умноженного на число, равна произведению проекции вектора на это число, т. е.

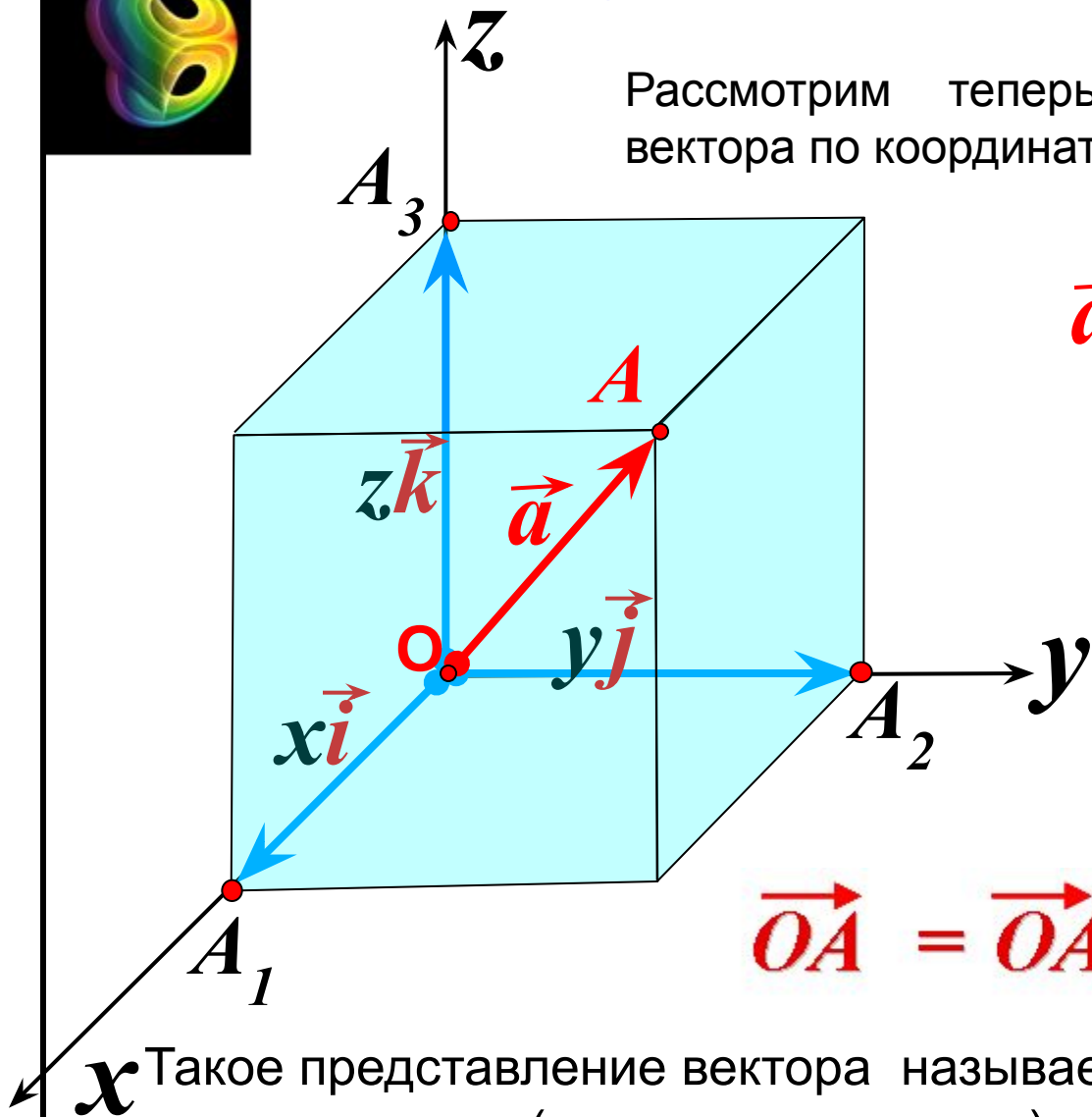
$$\text{пр}_l(\lambda \overline{a}) = \lambda \text{пр}_l \overline{a}.$$

4. Проекции на ось двух равных векторов равны между собой.



## § 7. Проекция вектора на ось.

Рассмотрим теперь вопрос о разложении вектора по координатным осям.



$$\vec{a} \{x; y; z\}$$

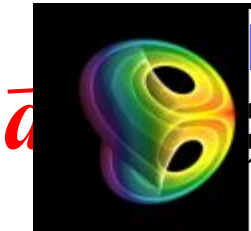
$$\vec{OA}_1 = x\vec{i}$$

$$\vec{OA}_2 = y\vec{j}$$

$$\vec{OA}_3 = z\vec{k}$$

$$\vec{OA} = \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \vec{OA}_3$$

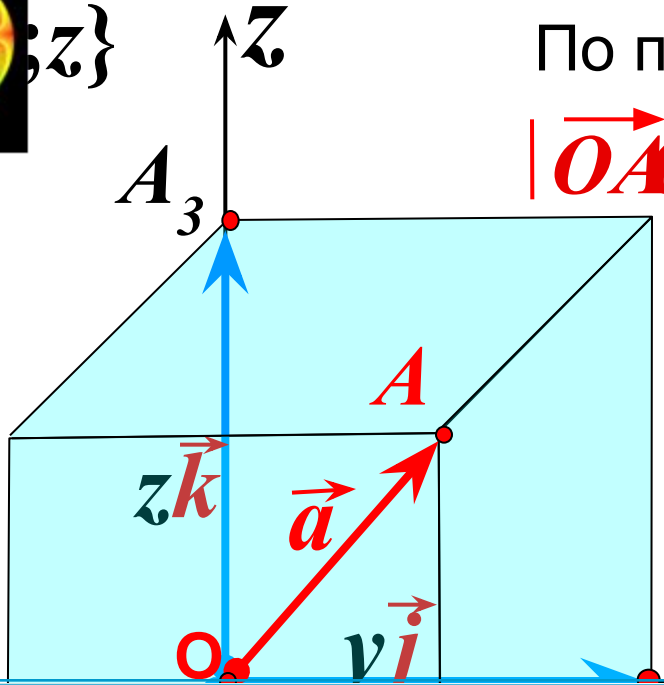
**x** Такое представление вектора называется разложением его на *компоненты* (или *составляющие*) по координатным осям.



# Вычисление длины вектора по его координатам

По правилу параллелепипеда

$$|\vec{OA}|^2 = |\vec{OA}_1|^2 + |\vec{OA}_2|^2 + |\vec{OA}_3|^2$$



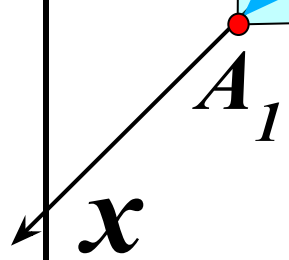
$$|\vec{OA}_1| = |xi| = |x|$$

$$|\vec{OA}_2| = |yj| = |y|$$

Длина вектора равна квадратному корню из суммы квадратов его координат.

$$|\vec{a}|^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2}$$

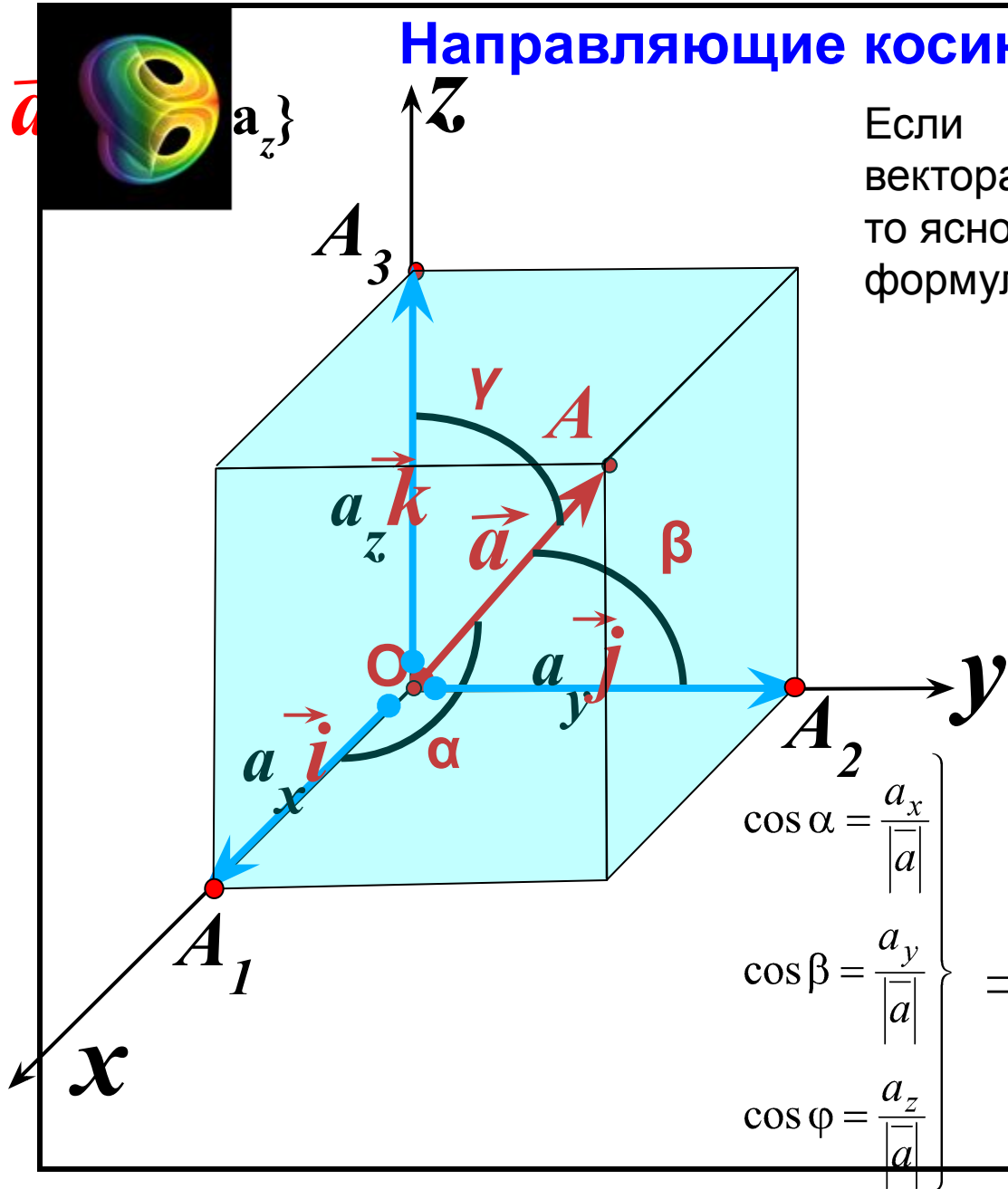


## Направляющие косинусы вектора.

Если  $a_x; a_y; a_z$  – проекции вектора на координатные оси, то ясно, что имеют место формулы:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= |\vec{a}| \cos \alpha \\ a_y &= |\vec{a}| \cos \beta \\ a_z &= |\vec{a}| \cos \gamma \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a_x}{|\vec{a}|} \\ \cos \beta &= \frac{a_y}{|\vec{a}|} \\ \cos \gamma &= \frac{a_z}{|\vec{a}|} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$





## § 7. Проекция вектора на ось.

**Пример 1.** Даны точки  $A(1, -1, 2)$  и  $B(3, 2, 3)$ .

Найти: Координаты вектора  $\overline{AB}$ :

$$\overline{AB} \{3 - 1, 2 - (-1), 3 - 2\} = \overline{AB} \{2, 3, 1\}.$$

Найти: Длину вектора  $\overline{AB}$ :

Так как  $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ , значит  $|\overline{AB}| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$ .

Найти: Разложение вектора  $\overline{AB}$  по базису;

Так как  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ , значит  $\overline{AB} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ .

Найти: Направляющие косинусы вектора  $\overline{AB}$ :

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{14}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

Найти: Единичный вектор (орт), соответствующий вектору  $\overline{AB}$ :

Так как  $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ , значит  $\vec{a}^0 \left\{ \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}} \right\}$ .



## § 7. Проекция вектора на ось.

Пример 2.

Дан вектор  $\overline{AB} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$  и точки  $B(1, 2, -1)$  и  $C(2, 2, 5)$ .

Найти координаты вектора  $\overline{AC}$ .

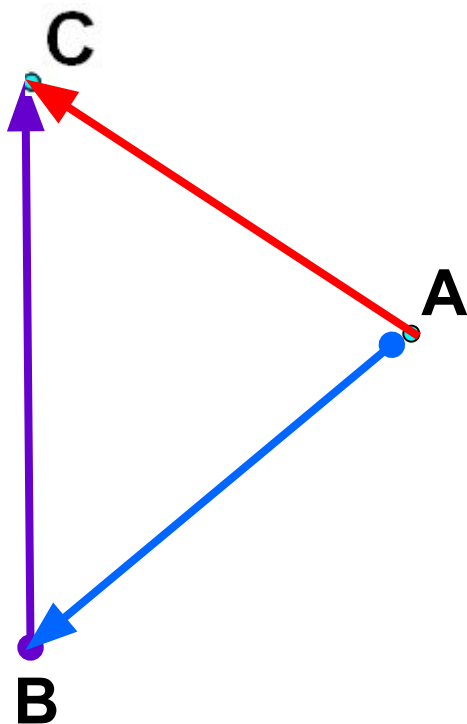
Решение

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Найдем координаты вектора  $\overline{BC}$ :

$$\overline{BC} \{1, 0, 6\}.$$

$$\overline{AC} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k} + \bar{i} + 6\bar{k} = 2\bar{i} + \bar{j} + 8\bar{k}.$$







## § 7. Проекция вектора на ось.

### Пример 3.

Выяснить, при каких значениях параметров  $\lambda$  и  $\mu$  вектора  $\vec{a} = \lambda\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$  и  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \mu\vec{k}$  коллинеарны.

### Решение

Два вектора коллинеарны, если существует некая константа  $c$  такая, что имеет место соотношение

$$\vec{a} = c\vec{b}.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} = c(\vec{i} + \vec{j} + \mu\vec{k}),$$

откуда

$$(\lambda - c)\vec{i} + (2 - c)\vec{j} + (3 - \mu c)\vec{k} = \vec{0}.$$

Так как орты линейно независимы, ибо они представляют собою базис, то должны обращаться в нуль коэффициенты этой линейной комбинации, т. е.

$$\begin{cases} \lambda - c = 0 \\ 2 - c = 0 \\ 3 - \mu c = 0 \end{cases}, \quad \text{откуда} \quad \lambda = 2, \mu = \frac{3}{2}.$$



## § 8. Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a} \vec{b}})$$

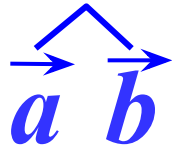
Если хотя бы один из векторов равен нулю, то скалярное произведение этих векторов равно нулю (по определению).

**Скалярное произведение векторов – число (скаляр).**

**Скаляр – лат. *scale* – лестница, шкала.**

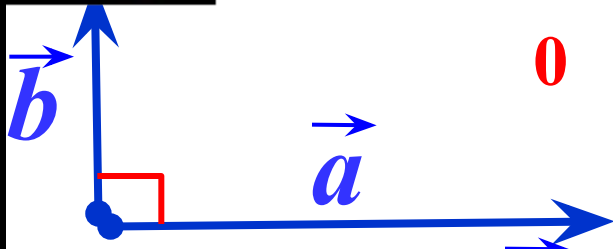
**Ввел в 1845г. У. Гамильтон, ирландский математик.**

## § 8. Скалярное произведение векторов.



90  
0

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$



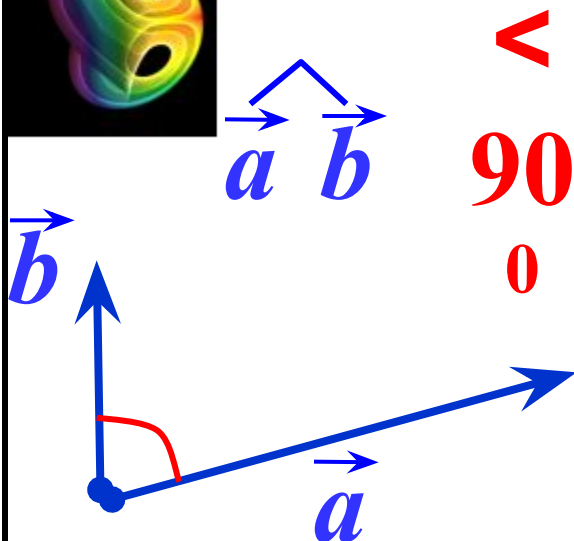
Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  перпендикулярны, то скалярное произведение векторов равно нулю.

Обратно: если  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , то векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  перпендикулярны.

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$$

## § 8. Скалярное произведение векторов.

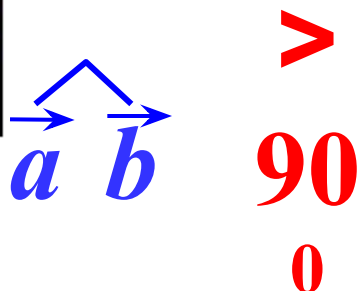


$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

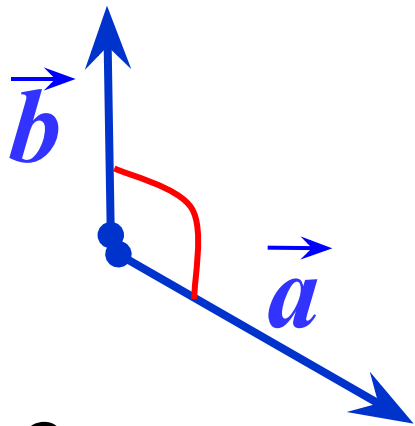
Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда, когда угол между векторами **острый**.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \iff \vec{a} \cdot \vec{b} < 90$$

## § 8. Скалярное произведение векторов.



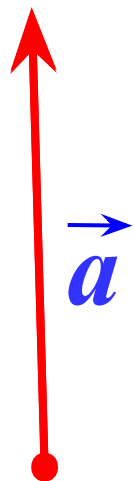
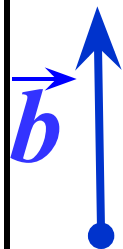
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha \quad \begin{matrix} < \\ 0 \end{matrix}$$



Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой**.

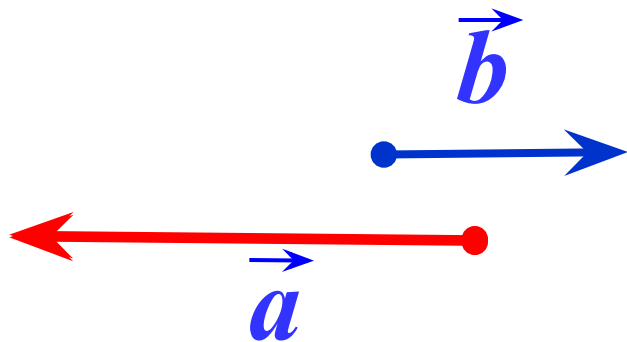
$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} > \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & 90 \\ & 0 \end{matrix}$$

## § 8. Скалярное произведение векторов.



Если  $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$   $\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 0^\circ$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$



Если  $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}$

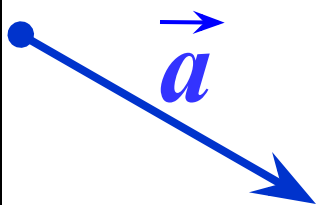
$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 180^\circ$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 180^\circ = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

## § 8. Скалярное произведение векторов.



$$\vec{a} \cdot \vec{a} = 0^0$$



$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0^0 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

Скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{a}$  называется **скалярным квадратом** вектора  $\vec{a}$  и обозначается  $\vec{a}^2$

Таким образом,  $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$  откуда  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$ .

**Длина вектора равен квадратному корню из его скалярного квадрата.**



## § 8. Скалярное произведение векторов.

Свойства скалярного произведения:

$$1) \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot \text{пр}_{\bar{a}} \bar{b} = |\bar{b}| \cdot \text{пр}_{\bar{b}} \bar{a}.$$

Действительно,  $\text{пр}_{\bar{b}} \bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos(\bar{a} \wedge \bar{b})$ , тогда

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\bar{a} \wedge \bar{b}) = |\bar{b}| \cdot \text{пр}_{\bar{b}} \bar{a}.$$

Отсюда следует формула для нахождения проекции одного вектора на другой:

$$\text{пр}_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}.$$

2) Переместительное или коммутативное свойство:  $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}.$

3) Сочетательное (ассоциативное) свойство:  $(\lambda \bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (\lambda \bar{b}) = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b}).$

4) Распределительное (дистрибутивное) свойство относительно сложения векторов:

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}.$$





## § 8. Скалярное произведение векторов.

Выведем формулу скалярного произведения в координатной форме.

$$\vec{a} \{a_x; a_y; a_z\} \quad \vec{b} \{b_x; b_y; b_z\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) =$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

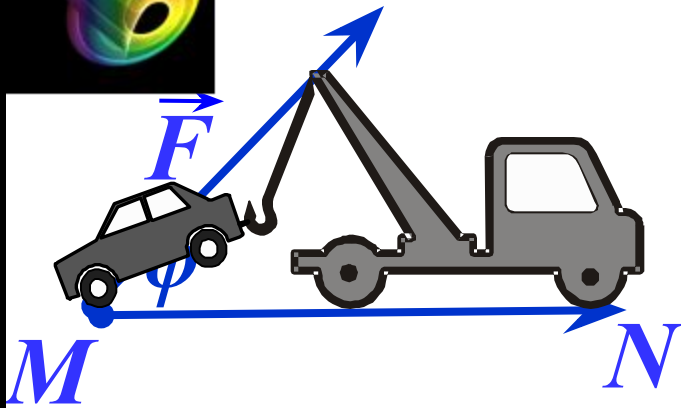
т.к.

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0, \quad \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0.$$

В частности,

$$|\vec{a}| = \sqrt{a^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

## § 8. Скалярное произведение векторов.



Скалярное произведение векторов встречается в физике. Например, из курса механики известно, что работа  $A$  постоянной силы  $\vec{F}$  при перемещении тела из точки  $M$  в точку  $N$  равна произведению силы  $\vec{F}$  и перемещения  $\vec{MN}$  на косинус угла между ними.

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{MN}| \cos \phi$$

$$A = \vec{F} \cdot \vec{MN}$$



## § 8. Скалярное произведение векторов.

Скалярное произведение двух векторов позволяет решить следующие задачи векторной алгебры:

### 1. Нахождение угла между двумя векторами.

$$\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \arccos \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \arccos \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Отсюда нетрудно получить **условие ортогональности (перпендикулярности)** двух векторов в координатной форме:

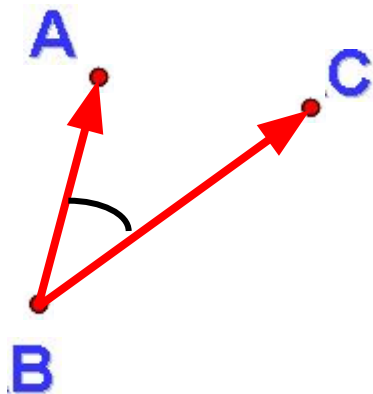
$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$



## § 8. Скалярное произведение векторов.

**Пример 1.** Даны вершины треугольника:  $A(2; -1; 3)$ ,  $B(1; 1; 1)$ ,  $C(0; 0; 5)$ . Найти  $\angle ABC$ .

Решение



$$\cos \angle ABC = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{BC}|}.$$

$$\overline{BA} \{1, -2, 2\}, \quad |\overline{BA}| = \sqrt{1+4+4} = 3,$$

$$\overline{BC} \{-1, -1, 4\}, \quad |\overline{BC}| = \sqrt{1+1+16} = 3\sqrt{2},$$

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = -1 + 2 + 8 = 9,$$

$$\cos \angle ABC = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \angle ABC = 45^\circ.$$

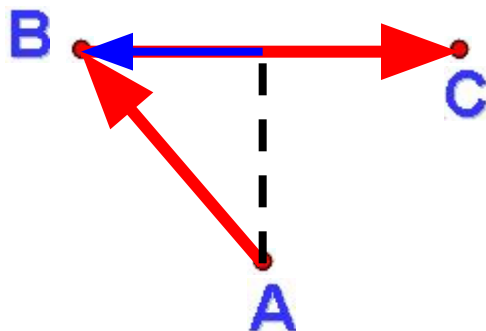


## § 8. Скалярное произведение векторов.

2. Нахождение проекции одного вектора на направление другого

**Пример 2.** Даны три точки  $A(2; 3; 5)$ ,  $B(1; 2; 2)$ ,  $C(3; 5; 4)$ . Найти  $\text{пр}_{\overline{BC}} \overline{AB}$ .

Решение



$$\overline{BC} \{2, 3, 2\}, \quad |\overline{BC}| = \sqrt{4 + 9 + 4} = \sqrt{17},$$

$$\overline{AB} \{-1, -1, -3\}, \quad |\overline{AB}| = \sqrt{1 + 1 + 9} = \sqrt{11},$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{BC} = -2 - 3 - 6 = -11,$$

$$\text{пр}_{\overline{BC}} \overline{AB} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BC}|} = -\frac{11}{\sqrt{17}}.$$



## § 8. Скалярное произведение векторов.

### 3. Нахождение длины вектора.

**Пример 3.** Дан вектор  $\vec{a} = \vec{m} + \vec{n}$ ,  $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 2$ ,  $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$ .

Найти длину вектора  $\vec{a}$ .

**Решение**

$|\vec{a}| = \sqrt{a^2}$ . Найдем скалярный квадрат вектора  $\vec{a}$ .

$$a^2 = (\vec{m} + \vec{n}) \cdot (\vec{m} + \vec{n}) = m^2 + 2\vec{m} \cdot \vec{n} + n^2 =$$

$$= |\vec{m}|^2 + 2|\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cos(\vec{m} \wedge \vec{n}) + |\vec{n}|^2 = 4 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cos \frac{\pi}{3} + 4 = 8 + 8 \cdot \frac{1}{2} = 12.$$

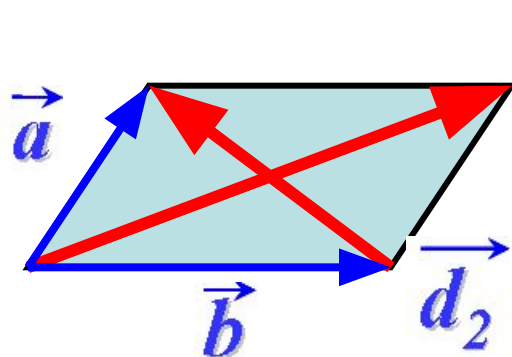
$$|\vec{a}| = \sqrt{a^2} = 2\sqrt{3}.$$



## § 8. Скалярное произведение векторов.

Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$  и  $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$ , где  $\vec{m}, \vec{n}$  – единичные векторы, угол между которыми равен  $60^\circ$ .

Решение



$$\begin{aligned}\vec{d}_1 &= \vec{a} + \vec{b} & \vec{d}_1 &= 3\vec{m} - \vec{n} \\ \vec{d}_2 &= \vec{a} - \vec{b} & \vec{d}_2 &= \vec{m} + 3\vec{n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\vec{d}_1|^2 &= (3\vec{m} - \vec{n}) \cdot (3\vec{m} - \vec{n}) = 9|\vec{m}|^2 - 6\vec{m} \cdot \vec{n} + |\vec{n}|^2 = \\ &= 9|\vec{m}|^2 - 6|\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cos(\vec{m} \wedge \vec{n}) + |\vec{n}|^2 = 9 - 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 1 = 7. & |\vec{d}_1| &= \sqrt{7} \\ |\vec{d}_2|^2 &= (\vec{m} + 3\vec{n}) \cdot (\vec{m} + 3\vec{n}) = |\vec{m}|^2 + 6|\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cos(\vec{m} \wedge \vec{n}) + 9|\vec{n}|^2 = 13. \\ & & |\vec{d}_2| &= \sqrt{13}\end{aligned}$$



## § 8. Скалярное произведение векторов.

### Доказательство ортогональности векторов

**Пример 5.** При каком значении  $\alpha$  ортогональны вектора  $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$  и  $\vec{a} = 2\vec{i} + \alpha\vec{j} + 2\vec{k}$ .

#### Решение

Принимая во внимание условие ортогональности двух векторов  $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$ , получим  $1 \cdot 2 + 2 \cdot \alpha + 1 \cdot 2 = 0$ .  $\alpha = -2$

### 5) Задачи с механическим содержанием

**Пример 6.** Даны три постоянные силы  $\vec{F}_1 \{5; 3; -2\}$ ,  $\vec{F}_2 \{2; -4; 6\}$ ,  $\vec{F}_3 \{1; 7; 3\}$ , приложенные в одной точке. Найти работу равнодействующей этих сил на прямолинейном перемещении из положения  $M_1(4,4,6)$  в положение  $M_2(7,5,2)$ .

#### Решение

Равнодействующая сила  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 7\vec{k}$ .

Вектор перемещения  $\vec{S} = \overline{M_1 M_2} \{3, 1, -4\}$ .

Искомая работа  $A = \vec{F} \cdot \vec{S} = 8 \cdot 3 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot (-4) = 2$ .





## § 9. Векторное произведение векторов.

Введем еще одну операцию над векторами. Эта операция существует только в трехмерном векторном пространстве, на плоскости она не определена.

Векторным произведением двух ненулевых векторов  $\vec{a} \times \vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$ ,

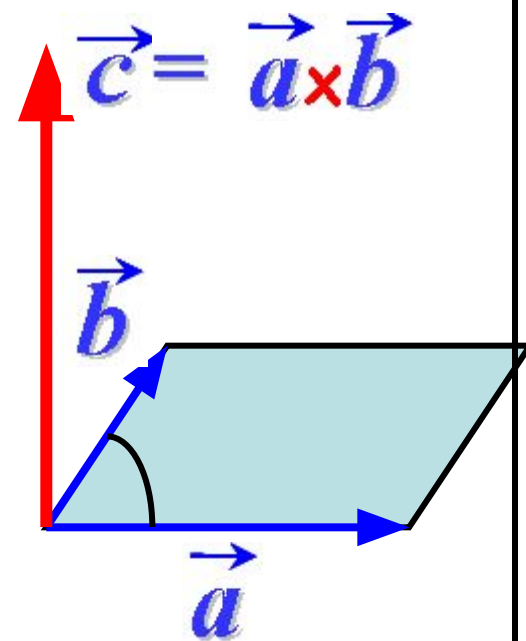
удовлетворяющий трем требованиям:

1)  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\widehat{a, b})$

2)  $\vec{c} \perp (\vec{a}, \vec{b})$

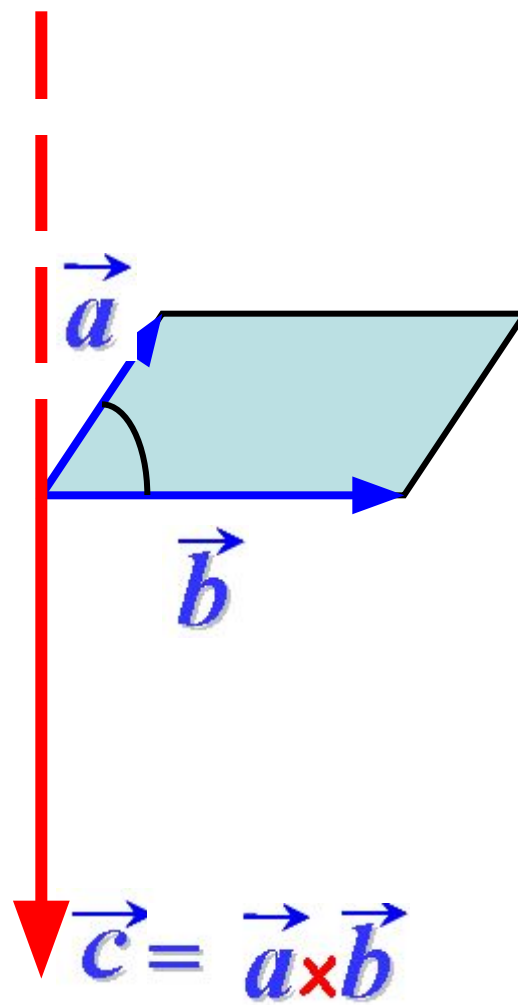
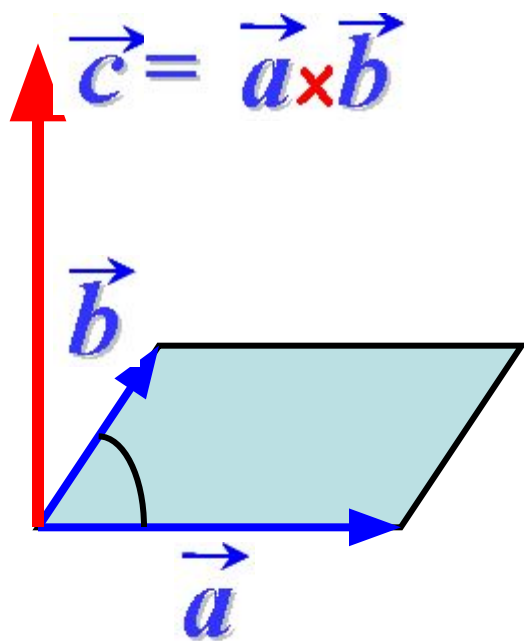
3) Тройка векторов  
является правой.

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$$





## § 9. Векторное произведение векторов.





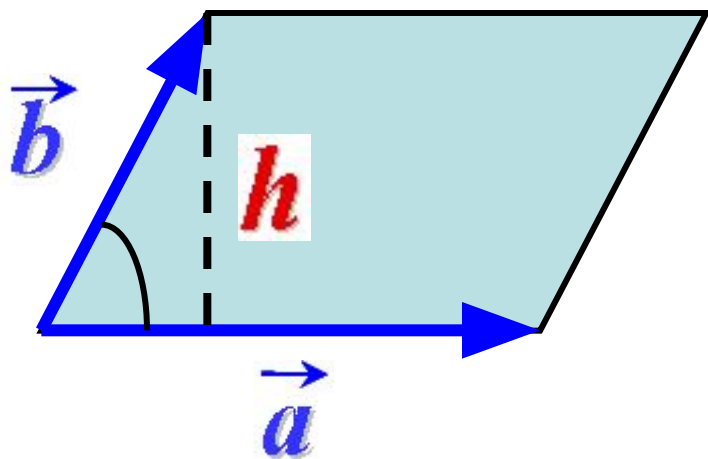
## § 9. Векторное произведение векторов.

Геометрический смысл векторного произведения.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\widehat{a \ b})$$

$$|\vec{b}| \sin(\widehat{a \ b}) = h$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot h = S$$



Для неколлинеарных векторов модуль их векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах.



## § 9. Векторное произведение векторов.

Свойства векторного произведения:

$$1) \quad \bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}.$$

*Свойство очевидно, так как синус – функция нечетная.*

**2) Свойство сочетательности относительно скалярного множителя:**

$$\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda\bar{b}).$$

**3) Распределительное свойство относительно сложения векторов:**

$$\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c},$$

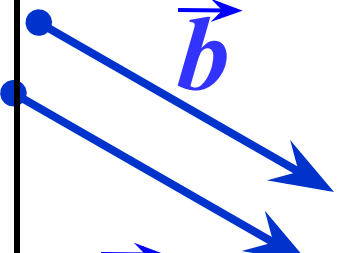
$$(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{c} + \bar{d}) = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c} + \bar{a} \times \bar{d} + \bar{b} \times \bar{d}.$$



## § 8. Векторное произведение векторов.

Если вектора коллинеарные, то

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \mathbf{0}^0, 180^0$$


$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin 0^0 = \mathbf{0}$$

Признак коллинеарности векторов:

Для того чтобы два ненулевых вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение было бы равно нулю.

В частности, имеем для ортов:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \mathbf{0}$$



## § 9. Векторное произведение векторов.

Рассмотрим векторные произведения различных ортов.

Очевидно, что векторное произведение двух различных ортов будет равно третьему орту, взятому:

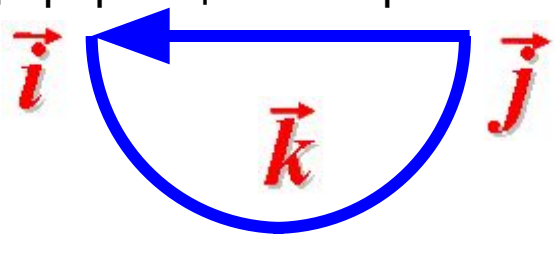
- со знаком **+**, если тройка ортов правая;
- со знаком **-**, если тройка ортов левая.

Если векторы правой тройки изменять непрерывно, то в любой момент такой деформации эта тройка векторов будет оставаться правой тройкой.



Тогда  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$      $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$   
 $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

Если векторы левой тройки изменять непрерывно, то в любой момент такой деформации эта тройка векторов будет оставаться левой тройкой.



Тогда  $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$      $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$   
 $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$



## § 9. Векторное произведение векторов.

Выразим теперь векторное произведение через координаты векторов, его составляющих.

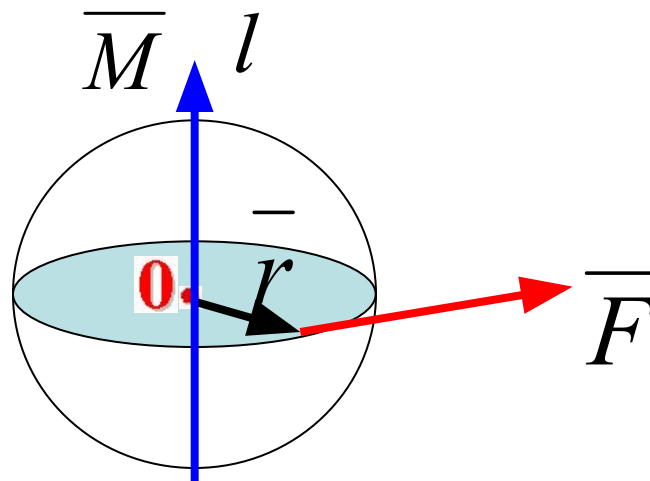
$$\begin{aligned}\bar{a} \times \bar{b} &= (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) \times (b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}) = \\ &= a_x b_x \bar{i} \times \bar{i} + a_y b_x \bar{j} \times \bar{i} + a_z b_x \bar{k} \times \bar{i} + a_x b_y \bar{i} \times \bar{j} + a_y b_y \bar{j} \times \bar{j} + a_z b_y \bar{k} \times \bar{j} + \\ &\quad + a_x b_z \bar{i} \times \bar{k} + a_y b_z \bar{j} \times \bar{k} + a_z b_z \bar{k} \times \bar{k} = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \bar{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \bar{k} = \end{aligned} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$



## § 9. Векторное произведение векторов.

Векторное произведение имеет простую механическую интерпретацию.



Если сила  $\vec{F}$  поворачивает тело вокруг оси  $l$ , то момент  $\vec{M}$  силы  $\vec{F}$  относительно т. О, равен

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$





## § 9. Векторное произведение векторов.

Векторное произведение двух векторов позволяет решить следующие задачи векторной алгебры.

### 1) *Нахождение площади параллелограмма и треугольника*

Действительно, площадь параллелограмма, сторонами которого служат векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , равна модулю их векторного произведения

$$S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}|,$$

а площадь треугольника со сторонами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  вычисляется по формуле

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

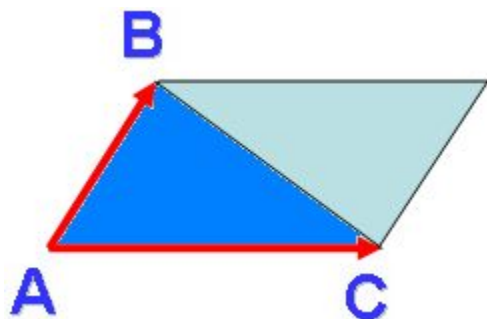


## § 9. Векторное произведение векторов.

Пример 1.

Найти площадь треугольника с вершинами в точках  $A(0, 1, 2)$ ,  $B(0, 4, -1)$ ,  $C(2, 1, -1)$ .

Решение



$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|,$$

$$\overline{AB} \{0, 3, -3\}; \quad \overline{AC} \{2, 0, -3\}.$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \{-9, -6, -6\},$$

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{81 + 36 + 36} = \sqrt{153},$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{\sqrt{153}}{2} \approx 6,18$$



## § 9. Векторное произведение векторов.

**Пример 2.** Найти площадь треугольника, построенного на векторах

$2\bar{a} + \bar{b}$  и  $\bar{b}$ , если известно, что

$$|\bar{a}| = 1, |\bar{b}| = 2, \left(\bar{a} \wedge \bar{b}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

**Решение**

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \left| (2\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{b} \right|,$$

$$(2\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{b} = 2\bar{a} \times \bar{b} + \bar{b} \times \bar{b} = 2\bar{a} \times \bar{b},$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \left| 2\bar{a} \times \bar{b} \right| = |\bar{a}| |\bar{b}| \sin \left( \bar{a} \wedge \bar{b} \right) = 2 \sin \frac{\pi}{6} = 1.$$

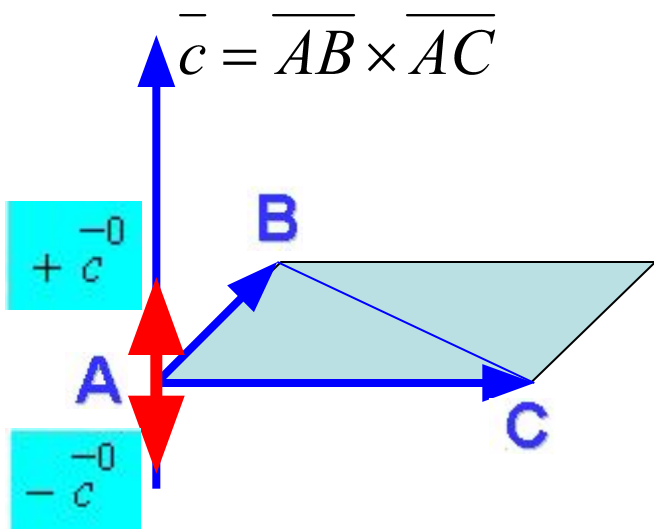


## § 9. Векторное произведение векторов.

### 2) Нахождение векторов, перпендикулярных данной плоскости

**Пример 3.** Найти единичный вектор, перпендикулярный к плоскости, в которой лежат точки  $A(0, 1, 2)$ ,  $B(0, 4, -1)$ ,  $C(2, 1, -1)$ .

Решение



В силу определения векторного произведения векторов

$$\bar{c} = \overline{AB} \times \overline{AC}.$$

$$\overline{AB} \{0, 3, -3\}, \quad \overline{AC} \{2, 0, -3\},$$

$$\bar{c} = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \{-9, -6, -6\},$$

Поставленной задаче удовлетворяют два единичных вектора

$$\pm \bar{c} = \pm \frac{-9\bar{i} - 6\bar{j} - 6\bar{k}}{\sqrt{153}}.$$



## § 9. Векторное произведение векторов.

### 3) Доказательство коллинеарности векторов

**Пример 4.** Коллинеарны ли векторы  $\bar{c}_1 = \bar{a} - \bar{b}$  и  $\bar{c}_2 = 2\bar{a} + \bar{b}$  построенные по векторам  $\bar{a}\{2, 1, 1\}$  и  $\bar{b}\{0, 3, 1\}$ ?

**Решение**

Условие коллинеарности:  $\bar{c}_1 \times \bar{c}_2 = 0$ .  $\bar{c}_1\{2, -2, 0\}$ ,  $\bar{c}_2\{4, 5, 3\}$ .

$$\bar{c}_1 \times \bar{c}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -6\bar{i} - 6\bar{j} + 18\bar{k} \neq 0, \text{ т. е. вектора неколлинеарны.}$$

### 4) Задачи механического содержания

**Пример 5.** Сила  $\bar{F}\{4; 2; 1\}$  приложена в точке  $B\{3; 2; 4\}$ . Найти момент этой силы относительно точки  $A\{5; -1; 6\}$ .

**Решение**

$$\overline{AB}\{-2; 3; -2\}, \quad \overline{M}_A(\bar{F}) = \overline{AB} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7\bar{i} - 6\bar{j} - 16\bar{k}.$$



$a, b, c$

## § 10. Смешанное произведение векторов.

Определение 1.

Смешанным произведением ненулевых векторов  $\vec{a}$  называется скалярное произведение вектора  $\vec{a}$  и векторного произведения вектора  $\vec{b}$  на вектор  $\vec{c}$ , т. е. выражение

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Свойства смешанного произведения:

- 1) Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке перемножаемых векторов.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

- 2) При перестановке двух соседних векторов модуль смешанного произведения не меняется, а знак меняется на противоположный, т. к. тройка меняет свою ориентацию.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b})$$

- 3)  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ , т.е. порядок знаков умножения не важен.

Поэтому принято смешанное произведение обозначать  $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ .



## § 10. Смешанное произведение векторов.

Выразим теперь смешанное произведение через координаты векторов, его составляющих.

$$\bar{b} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, \quad \text{или} \quad \bar{b} \times \bar{c} = \left\{ \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \right\}.$$

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} + a_y \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$



## § 10. Смешанное произведение векторов.

**Теорема 1.** Смешанное произведение векторов равно нулю тогда и только тогда, когда вектора  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  компланарны.

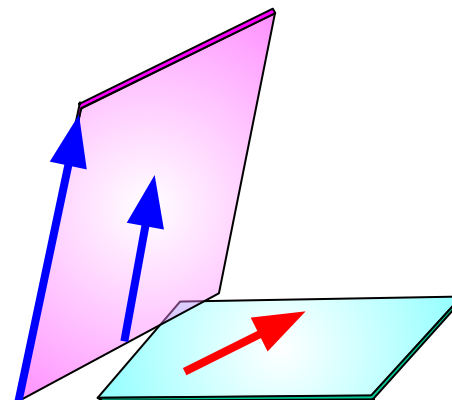
Доказательство.

Необходимость.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0.$$

Возможны два случая.

1)  $\vec{b} \times \vec{c} = 0$ , т.е. вектора коллинеарны,

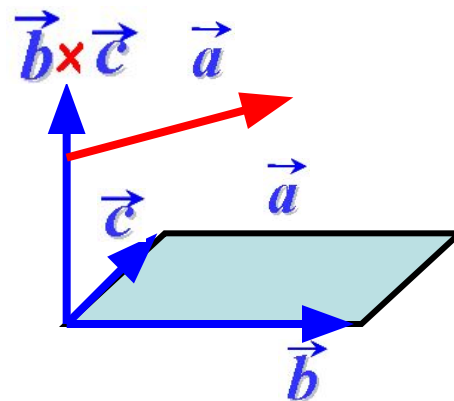


а три вектора, два из которых коллинеарны, всегда компланарны.

2)  $\vec{b} \times \vec{c} \neq 0$ , но  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ .

Тогда  $\vec{a} \perp (\vec{b} \times \vec{c})$ .

Это значит, что три вектора лежат в одной плоскости.





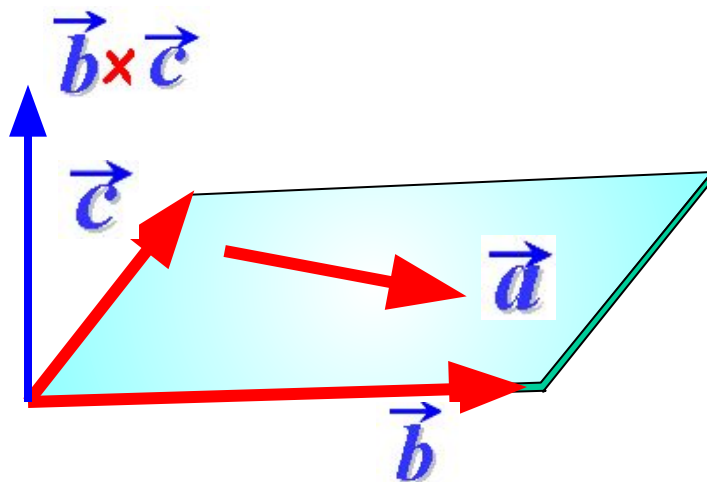


## § 10. Смешанное произведение векторов.

Достаточность.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  - компланарны.

Тогда их можно поместить в одной плоскости.



Вектор  $\vec{b} \times \vec{c}$  перпендикулярен плоскости, а, следовательно, и  $\vec{a}$

Тогда по правилам скалярного произведения  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ .

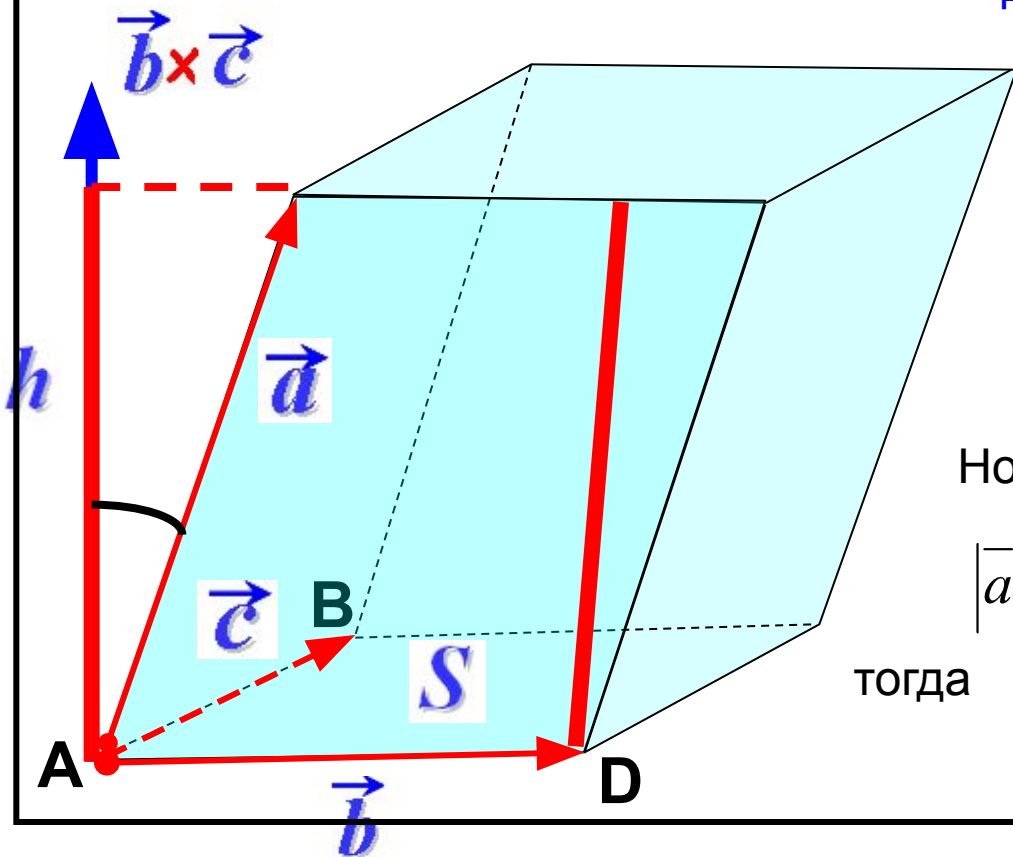


## § 10. Смешанное произведение векторов.

Установим геометрический смысл смешанного произведения векторов.

**Теорема 2.** Смешанное произведение  $\overline{abc}$  некопланарных векторов равно объему параллелепипеда, сторонами которого служат эти вектора, взятому со знаком  $+$ , если тройка векторов правая, и со знаком  $-$ , если тройка левая.

Доказательство.



$$\begin{aligned} \overline{abc} &= \overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) = \\ &= |\overline{a}| \cdot |\overline{b} \times \overline{c}| \cdot \cos(\overline{a}, \overline{b} \times \overline{c}) = \\ &= |\overline{a}| \cdot \cos(\overline{a}, \overline{b} \times \overline{c}) \cdot |\overline{b} \times \overline{c}|. \end{aligned}$$

Но

$$|\overline{a}| \cdot \cos(\overline{a}, \overline{b} \times \overline{c}) = \pm h, \quad |\overline{b} \times \overline{c}| = S,$$

тогда

$$\overline{abc} = \pm S \cdot h = \pm V.$$



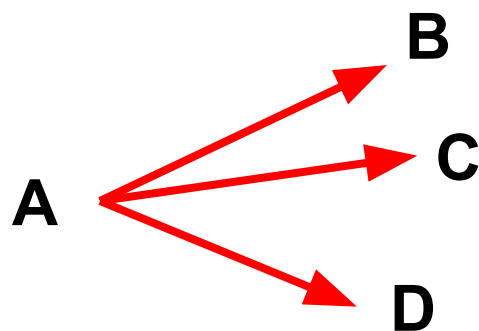
## § 10. Смешанное произведение векторов.

Смешанное произведение трех векторов позволяет решить следующие задачи векторной алгебры:

### 1) Доказательство компланарности (линейной зависимости) трех векторов

**Пример 1.** Показать, что точки  $A(1, 2, 1)$ ,  $B(3, 3, 3)$ ,  $C(4, 1, 2)$  и  $D(5, 4, 5)$  лежат в одной плоскости.

Решение



$$\overline{AB}\{2; 1; 2\}, \overline{AC}\{3; -1; 1\}, \overline{AD}\{4; 2; 4\}.$$

Если точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  лежат в одной плоскости, то и вектора лежат в одной плоскости, а тогда смешанное произведение этих векторов равно нулю.

$$\left( \overline{AB} \overline{AC} \overline{AD} \right) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, точки лежат в одной плоскости.



## § 10. Смешанное произведение векторов.

**Пример 2.** Доказать, что вектора  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$  и  $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$  линейно зависимы и найти эту линейную зависимость.

Решение

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Следовательно, векторы компланарны,}$$

а значит, они линейно зависимы,

т. е. существуют константы  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\nu$  такие, что  $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = 0$ .

$$\lambda(\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) + \mu(3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}) + \nu(\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}) = 0,$$

$$(\lambda + 3\mu + \nu)\vec{i} + (\lambda + 4\mu + 2\nu)\vec{j} + (2\lambda + \mu - 3\nu)\vec{k} = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda + 3\mu + \nu = 0 \\ \lambda + 4\mu + 2\nu = 0 \\ 2\lambda + \mu - 3\nu = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda + 3\mu + \nu = 0 \\ \mu + \nu = 0 \\ -5\mu - 5\nu = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda + 3\mu + \nu = 0 \\ \mu = -\nu \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda - 3\nu + \nu = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = 2\nu \\ \mu = -\nu \end{array}$$

Данная система имеет бесчисленное множество решений.

$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = 2\nu\vec{a} - \nu\vec{b} + \nu\vec{c} = 0.$$

откуда получим искомую линейную зависимость:  $2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 0$



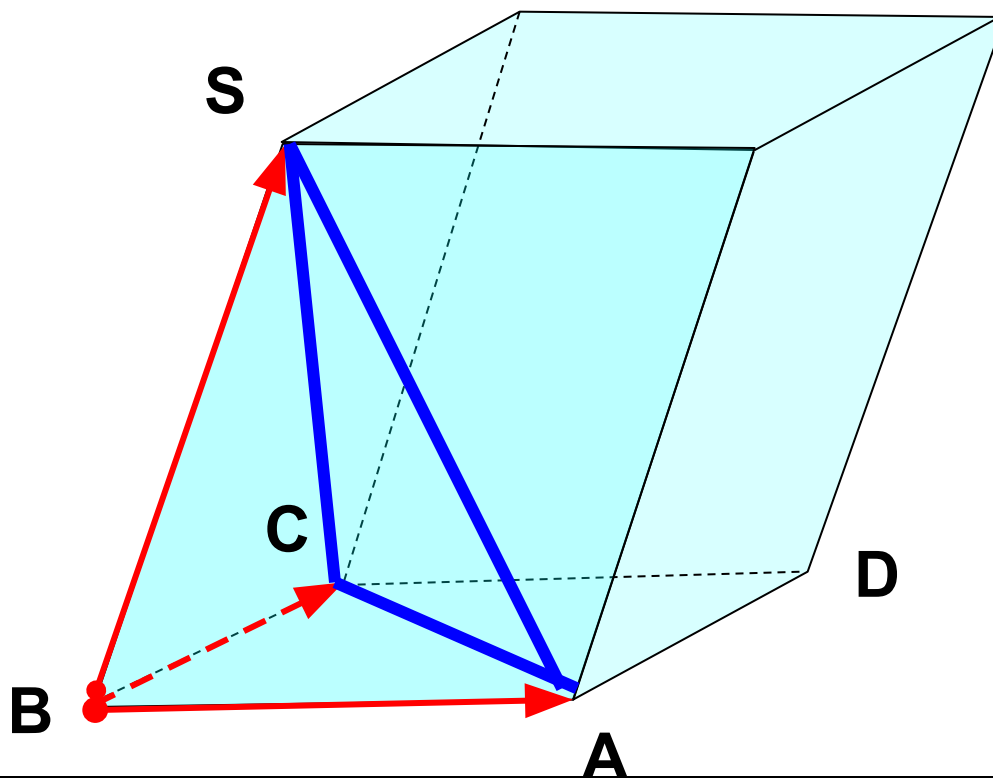
## § 10. Смешанное произведение векторов.

### 2) Нахождение объема параллелепипеда и тетраэдра

Объем параллелепипеда вычисляется по формуле  $V = S_{ABCD} \cdot h$ ,

а объем пирамиды —  $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot h$ . Так как  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ , то

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} V.$$





## § 10. Смешанное произведение векторов.

**Пример 3.** В пирамиде  $ABCD$  найти высоту, опущенную из вершины  $A$ , если в прямоугольной декартовой системе координат  $A(2, 1, 0)$ ,  $B(2, -1, 2)$ ,  $C(0, 1, 3)$ ,  $D(-1, 1, 0)$ .

Решение

$$\overline{DA}\{3, 0, 0\}, \quad \overline{DB}\{3, -2, 2\} \quad \overline{DC}\{1, 0, 3\},$$

$$\overline{DB} \times \overline{DC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \{-6, -7, 2\},$$

$$S = \frac{1}{2} |\overline{DB} \times \overline{DC}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-6)^2 + (-7)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{89},$$

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |-18| = |-3|.$$

Знак «-» показывает, что тройка векторов левая.

$$H = \frac{3 \cdot V}{S} = \frac{3 \cdot 3}{\sqrt{89}/2} \approx 1,91.$$

