Векторная алгебра

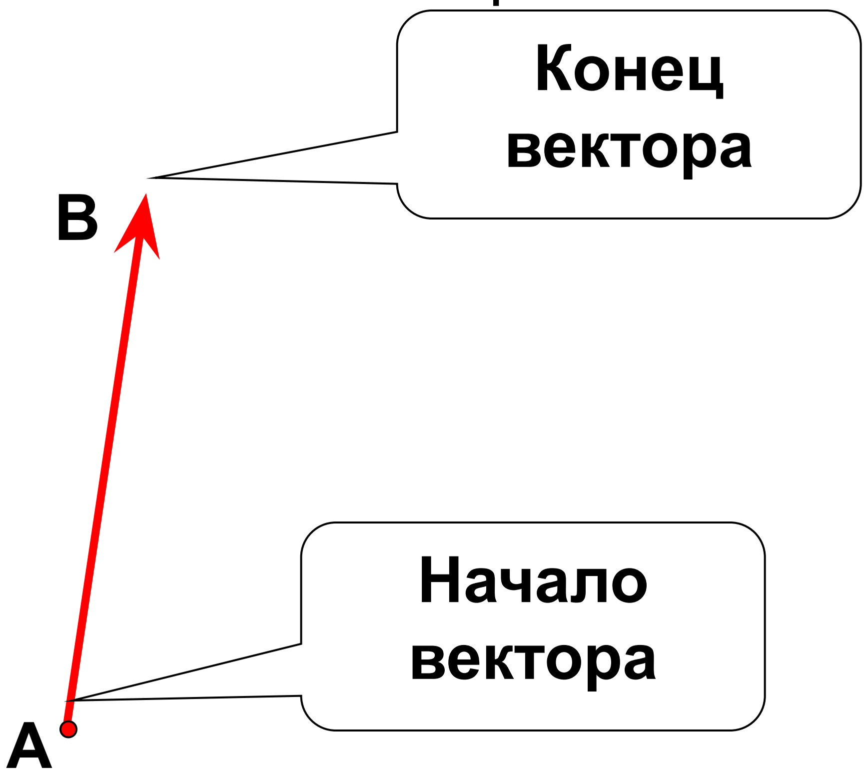
Уи́льям Ро́уэн Га́мильтон
1805 — 1865
выдающийся ирландский математик и физик XIX века.

Термин ***вектор***
(от лат. Vector -“несущий “) впервые появился в 1845 г. у ирландского математика Уильяма Гамильтона

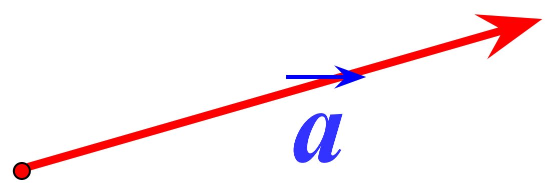
§ 1. Определение вектора.

Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая – концом, называется направленным отрезком или вектором

Вектор $\overrightarrow{AB}$



Длиной или модулем вектора называется длина отрезка AB $|\overrightarrow{AB}| = AB$



Вектор $\vec{a}$

§ 1. Определение вектора.

Любая точка плоскости также является вектором. В этом случае вектор называется нулевым

M

Вектор $\overrightarrow{MM}$

Вектор $\overrightarrow{0}$

Начало нулевого вектора совпадает с его концом, поэтому нулевой вектор не имеет какого-либо определенного направления. Иначе говоря, любое направление можно считать направлением нулевого вектора.

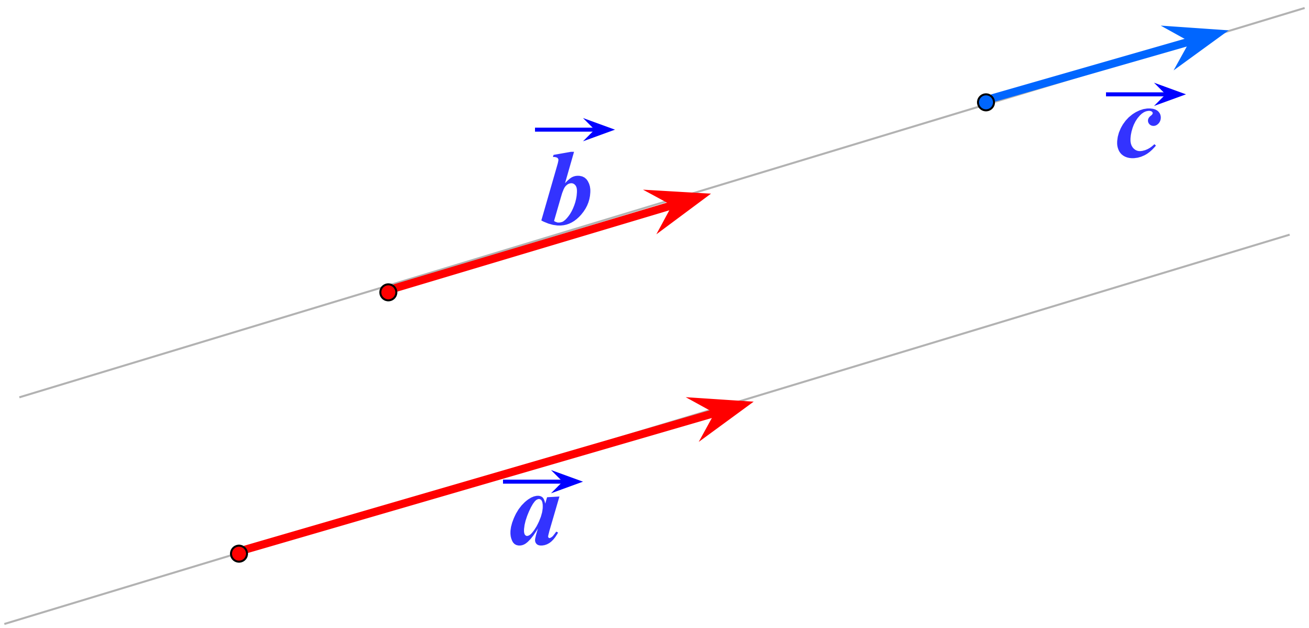
Длина нулевого считается равной нулю

$$|\overrightarrow{MM}| = 0$$

§ 1. Определение вектора.

Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Коллинеарные, сонаправленные векторы



$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

$\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{b}$

$\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{a}$

Нулевой вектор считается коллинеарным, сонаправленным с любым вектором.

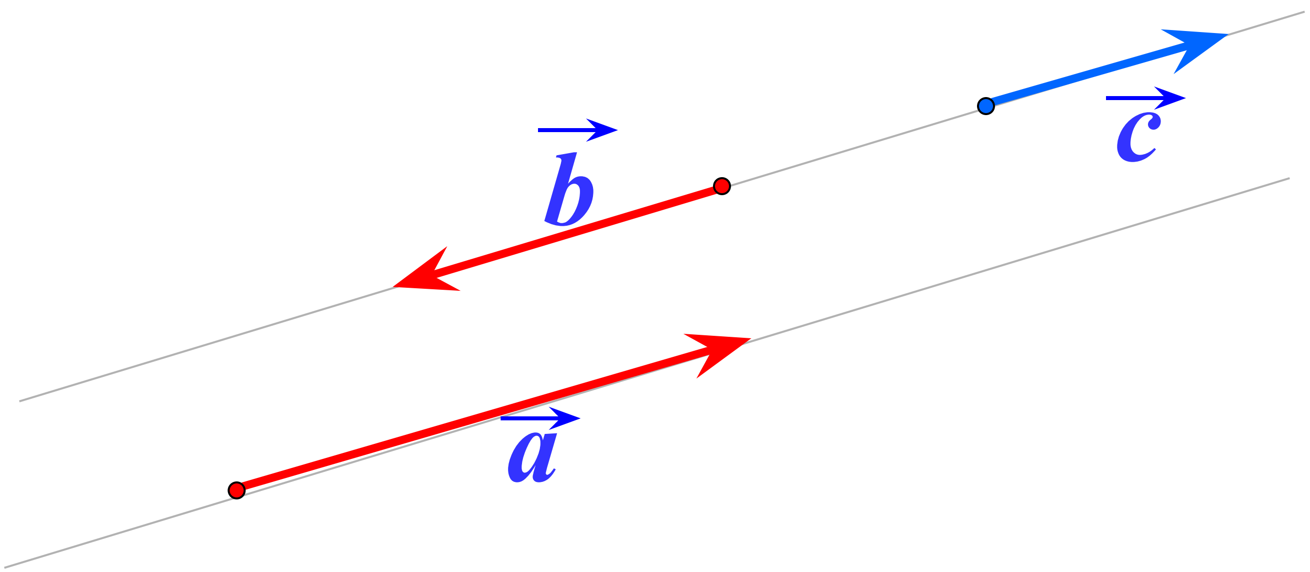
$\vec{o} \uparrow\uparrow \vec{a}$ $\quad$ $\vec{o} \uparrow\uparrow \vec{c}$ $\quad$ $\vec{o} \uparrow\uparrow \vec{b}$

§ 1. Определение вектора.

Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Коллинеарные,

противоположно направленные векторы



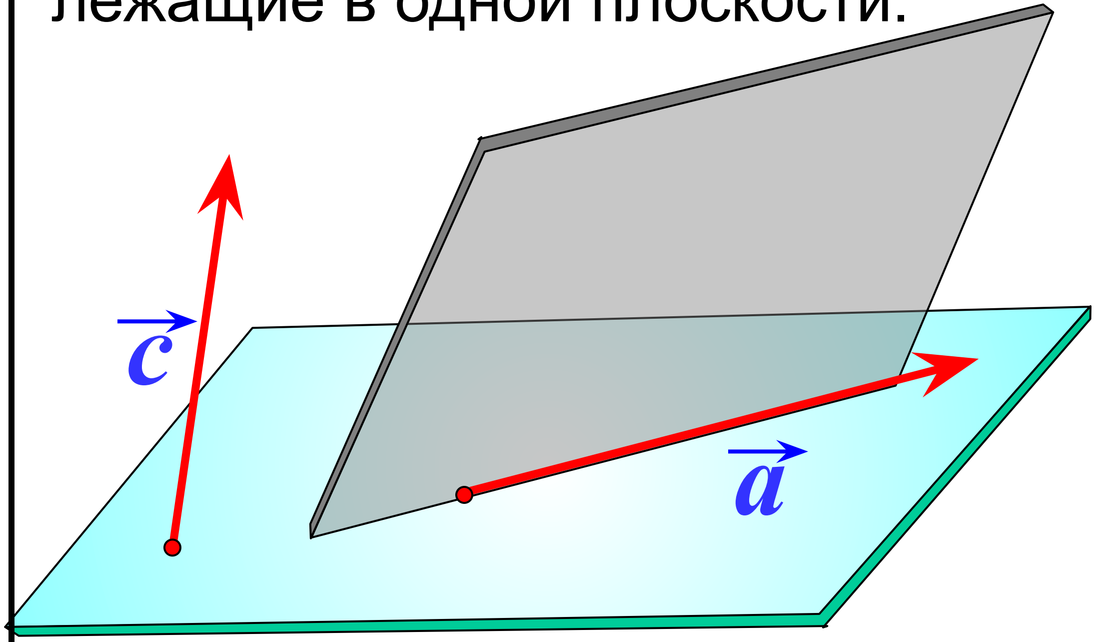
$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$

$\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{b}$

§ 1. Определение вектора.

Векторы называются компланарными, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.

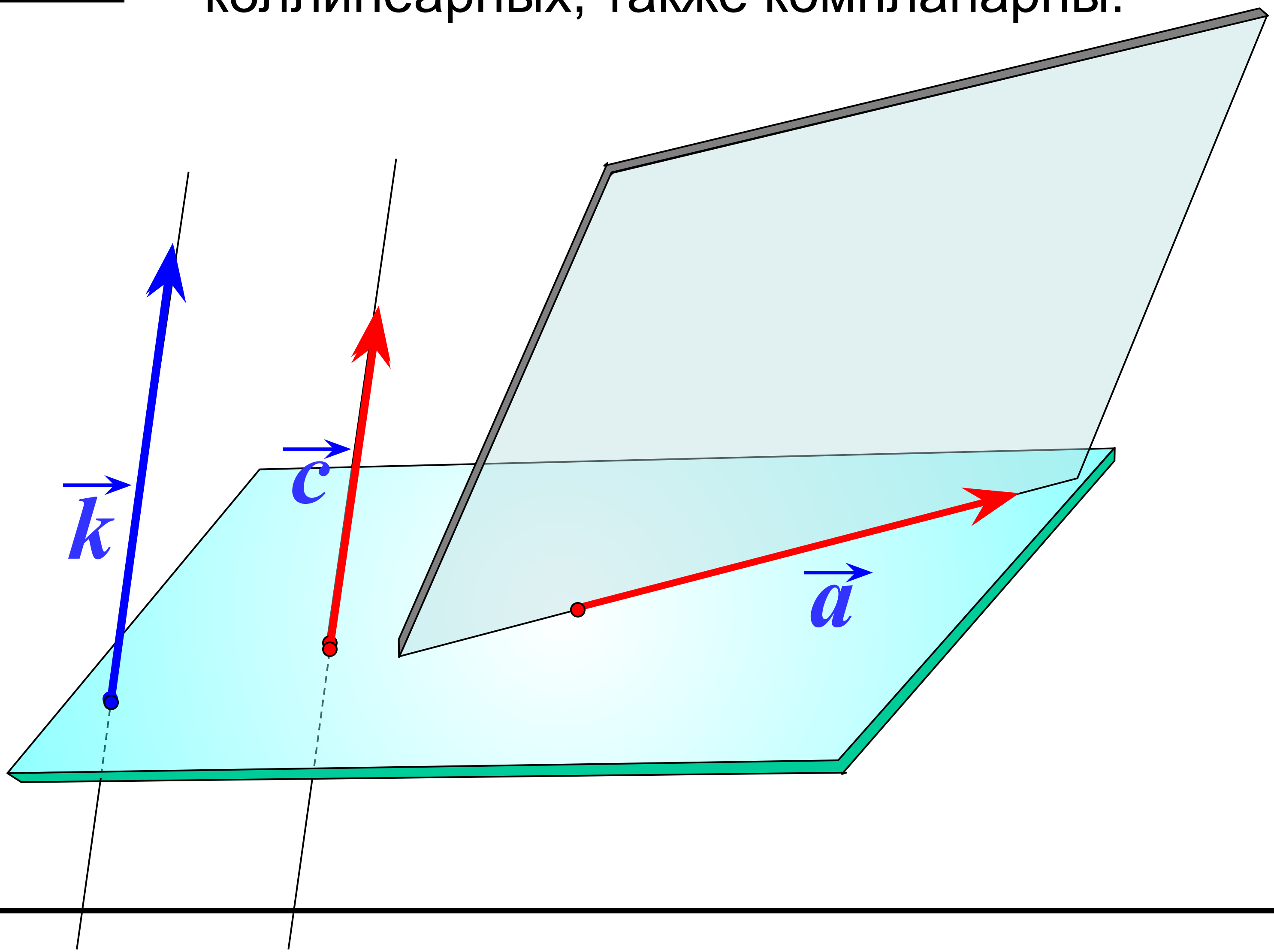
Другими словами, векторы называются компланарными, если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости.



Любые два вектора компланарны.

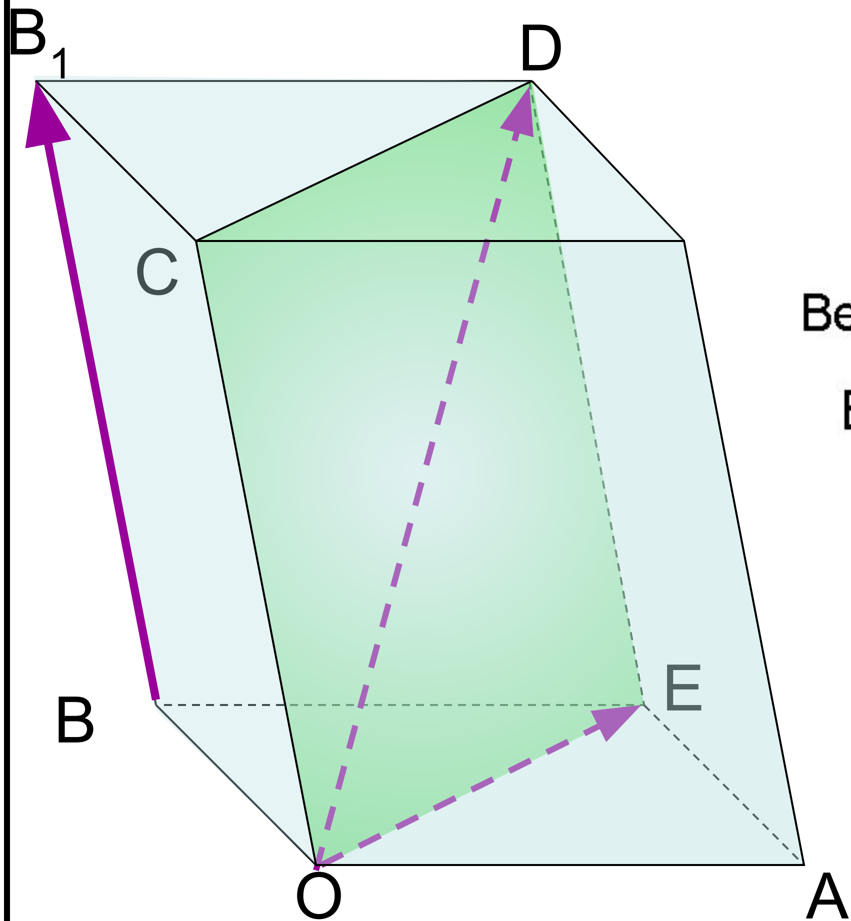
§ 1. Определение вектора.

Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, также компланарны.



§ 1. Определение вектора.

Три произвольных вектора могут быть как компланарными, так и не компланарными.

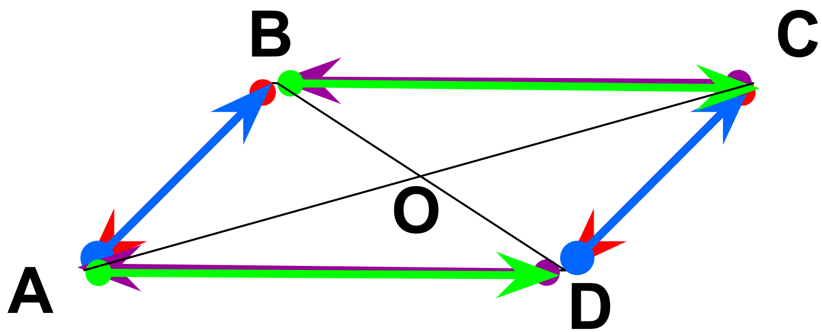


Векторы $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OE}$ не компланарны

Векторы $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OE}$ компланарны

§ 1. Определение вектора.

Векторы называются равными,
если они сонаправлены и их длины равны.



1 $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

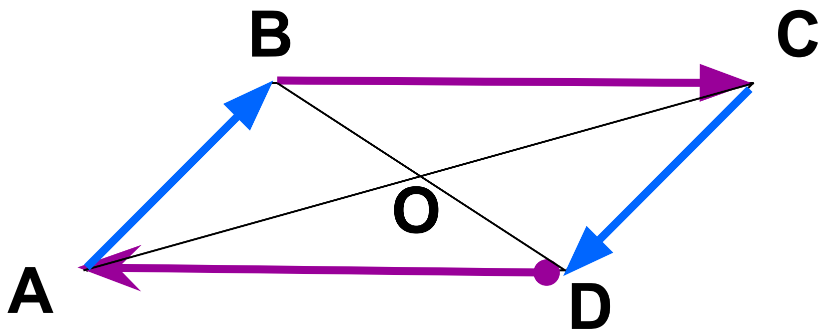
2 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

ABCD – параллелограмм.

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

§ 1. Определение вектора.

Векторы называются противоположными, если они противонаправлены и их длины равны.

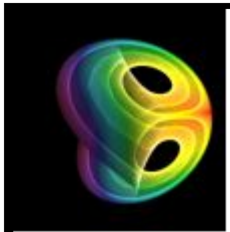


1 $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$

2 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

ABCD – параллелограмм.

$\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$;

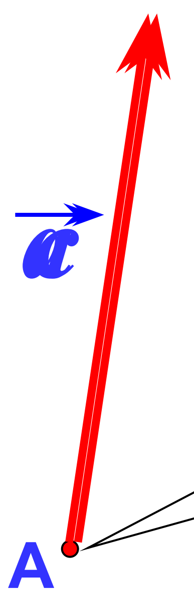


§ 1. Определение вектора.

Если точка А – начало вектора $\vec{a}$, то говорят, что

вектор $\vec{a}$ отложен от точки А

От любой точки М можно отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$, и притом только один.



Вектор $\vec{a}$ отложен от точки А

M

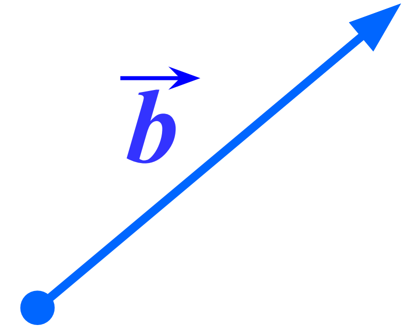
$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$ $\quad$ $\vec{a} = \vec{c}$

$|\vec{a}| = |\vec{c}|$

§ 1. Определение вектора.

Угол между векторами

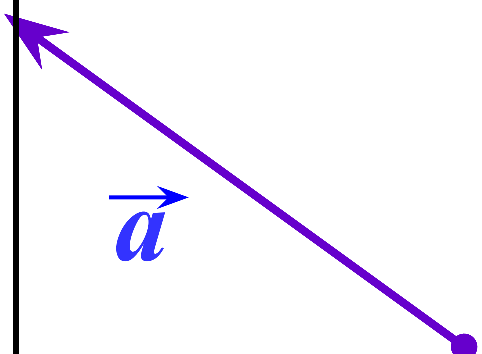
Углом α *между векторами* называется наименьший угол, образуемый векторами при совмещении их начал.



$\vec{a}$ α $\vec{b}$

O

$\widehat{\vec{a}\ \vec{b}} = \alpha$

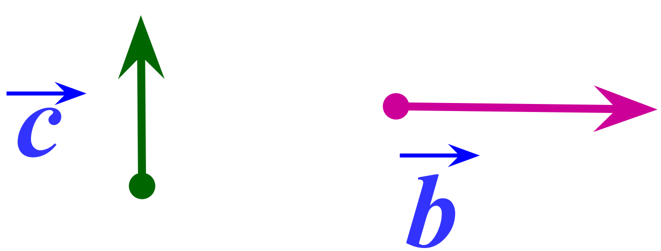


Угол между векторами $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$ **равен** α

§ 1. Определение вектора.

Для коллинеарных векторов $\alpha = 0$ или $\alpha = 180^{\circ}$

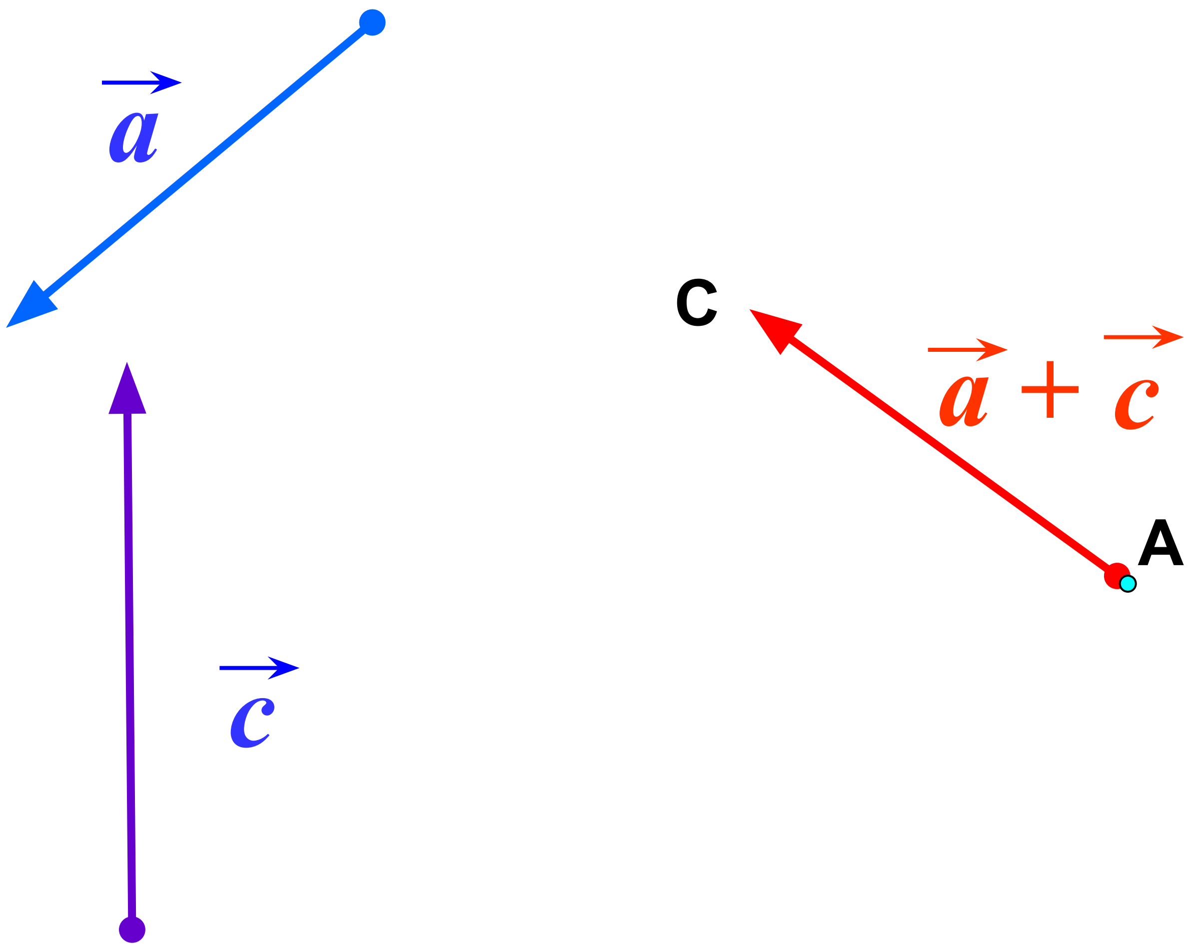
Два вектора называются **ортогональными**, если угол между ними равен 90^0.



$\vec{b} \perp \vec{c}$

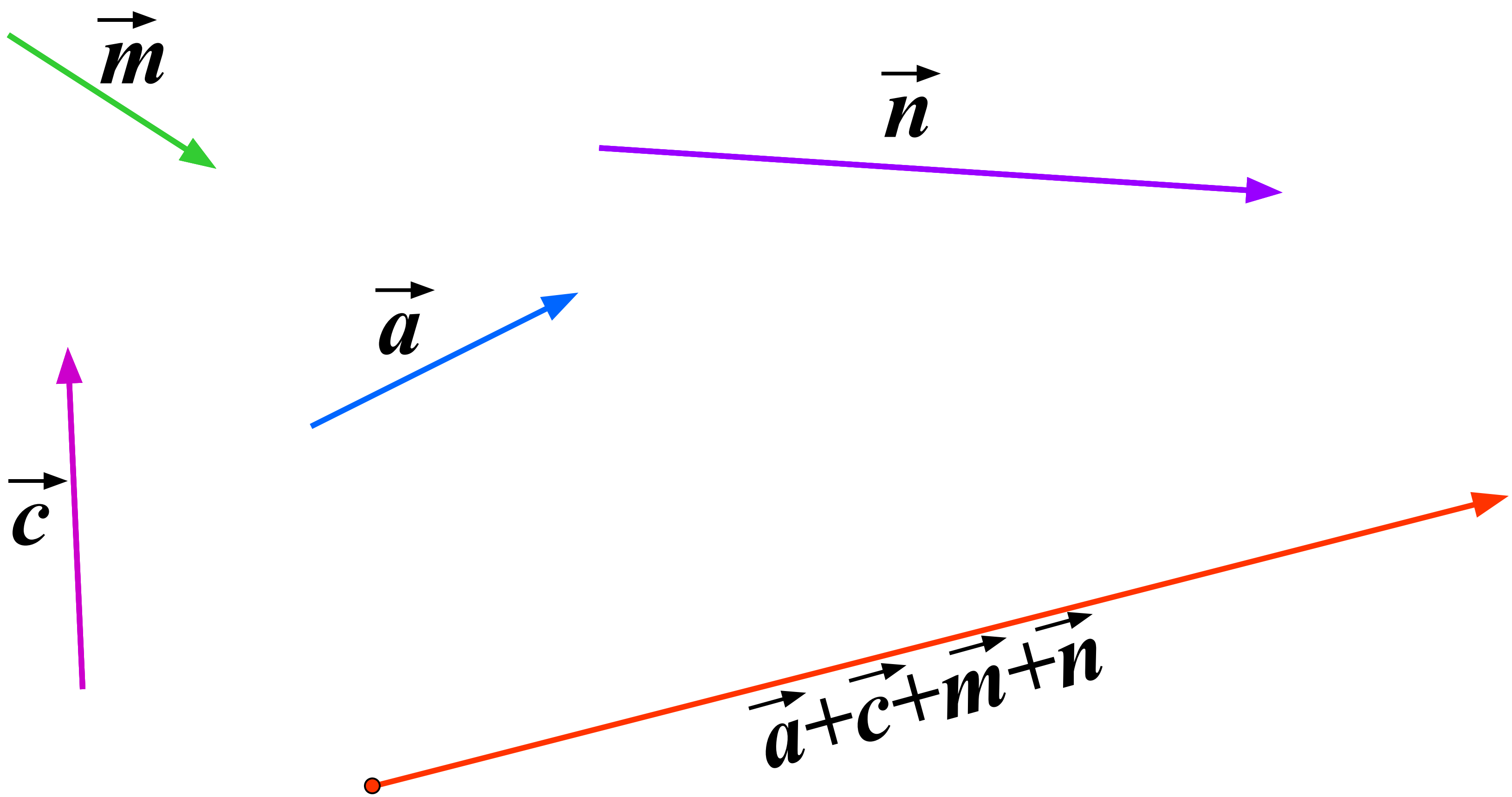
§ 2. Действия над векторами.

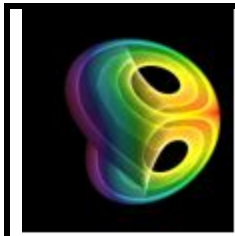
Сложение векторов.   Правило треугольника.



§ 2. Действия над векторами.

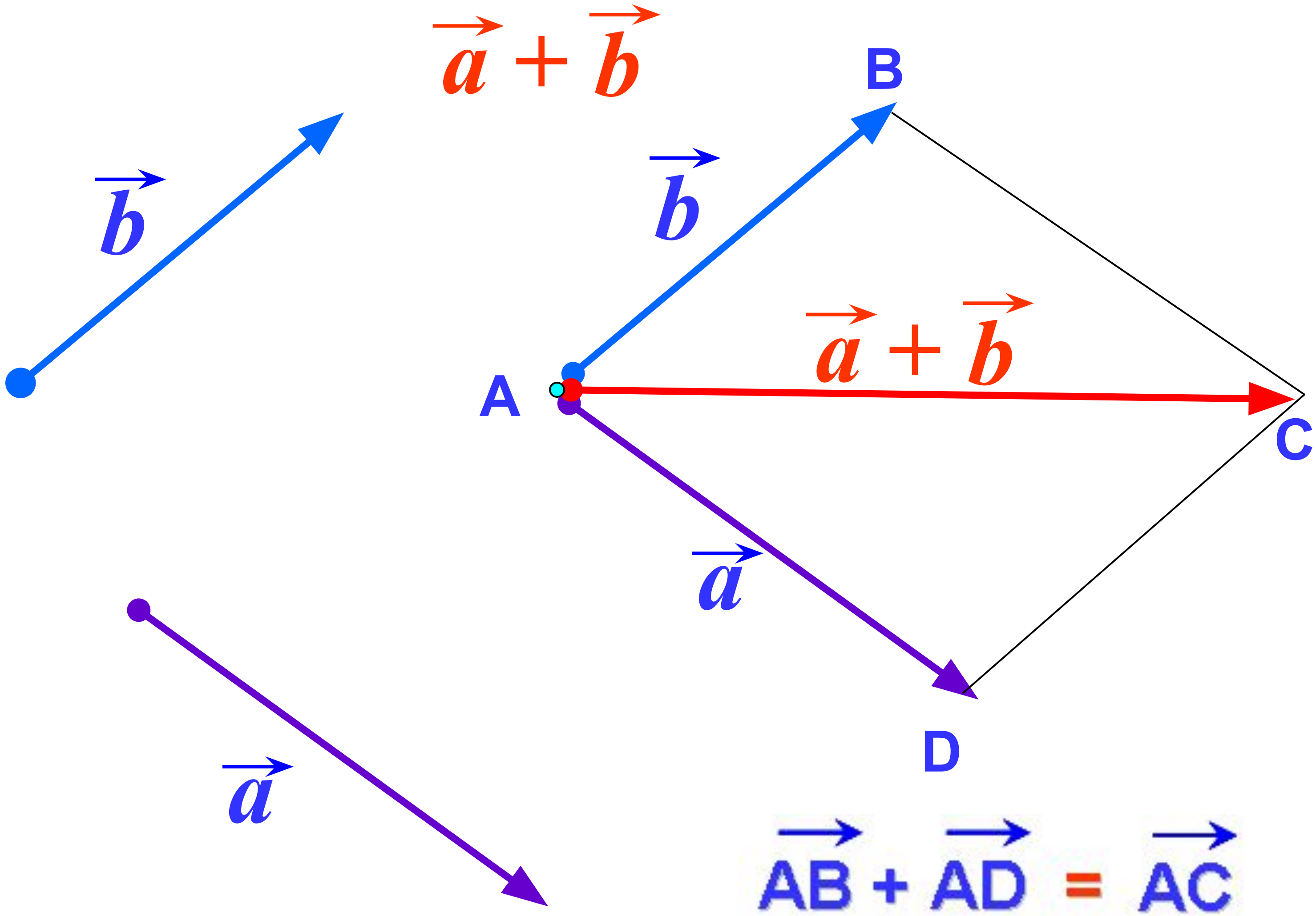
Сложение векторов. Правило многоугольника.





§ 2. Действия над векторами.

Сложение векторов. Правило параллелограмма.

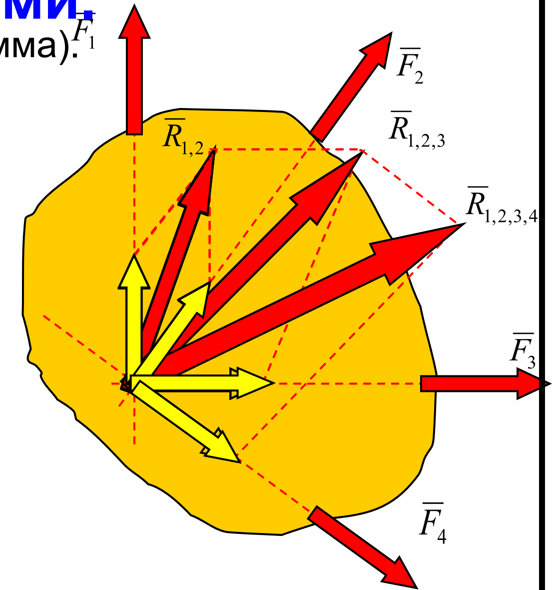


$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

§ 2. Действия над векторами.

Сложим первые две силы F_1 и F_2 (аксиома параллелограмма).
Количество сил уменьшилось на единицу.

$$\overline{R}_{1,2} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$$



Сложим полученную равнодействующую R_{12} со следующей силой F_3.
Количество сил вновь уменьшилось на единицу.

$$\overline{R}_{1,2,3} = \overline{R}_{1,2} + \overline{F}_2$$

Повторим эту же операцию со следующей силой F_4.
Осталась всего одна сила, эквивалентная исходной системе сил.

$$\overline{R}_{1,2,3,4} = \overline{R}_{1,2,3} + \overline{F}_4$$

Сложение сил построением параллелограммов можно заменить построением силового треугольника – выбирается одна из сил или изображается параллельно самой себе с началом в любой произвольной точке, все другие силы изображаются параллельными самим себе с началом, совпадающим с концом предыдущей силы.

Результатом такого сложения является вектор, направленный из начала первой силы к концу последней из сил.

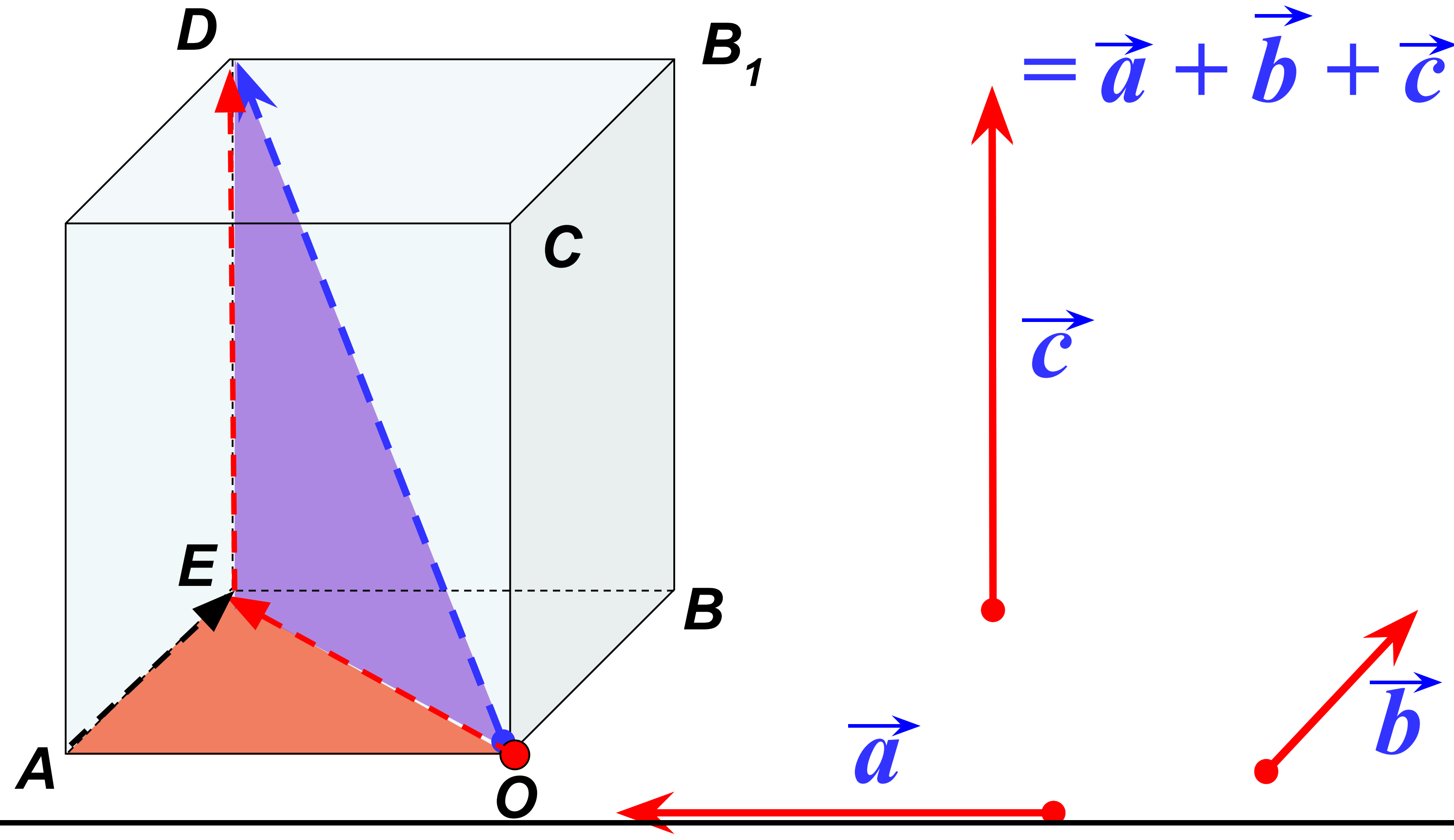
$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \overline{F}_4 + \ldots = \sum \overline{F}_i$$

§ 2. Действия над векторами.

Правило параллелепипеда.

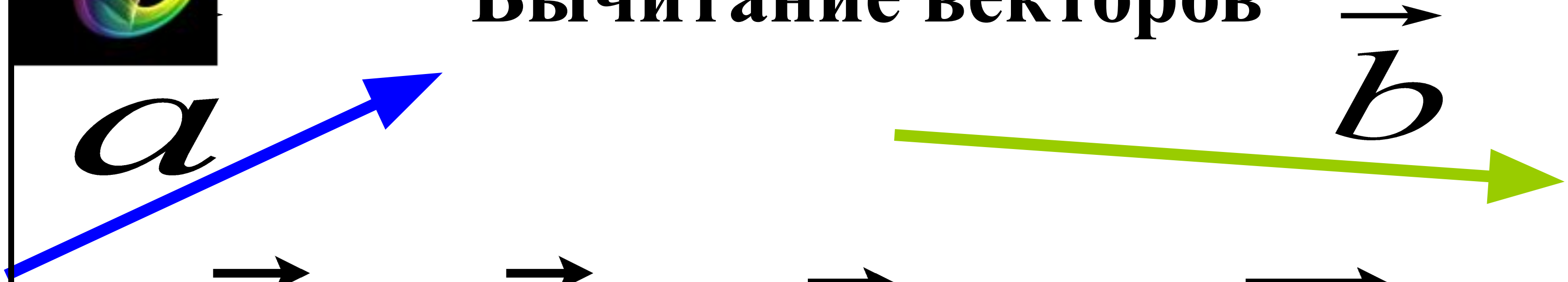
из ΔOAE

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE}) + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

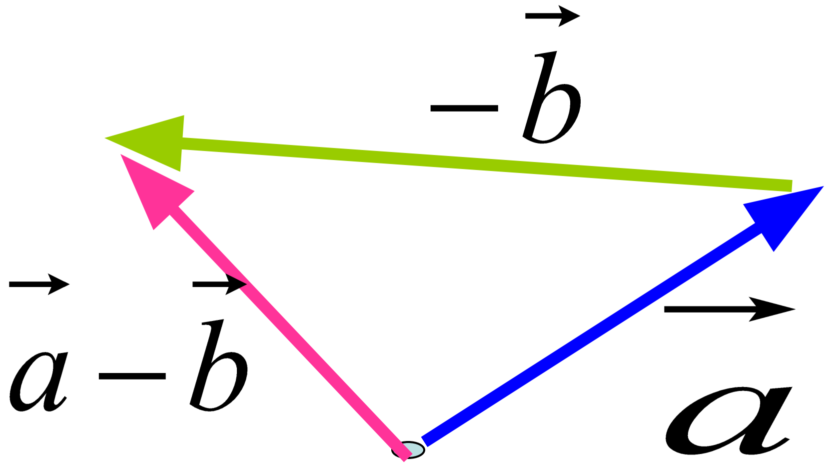


§ 2. Действия над векторами.

Вычитание векторов



$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

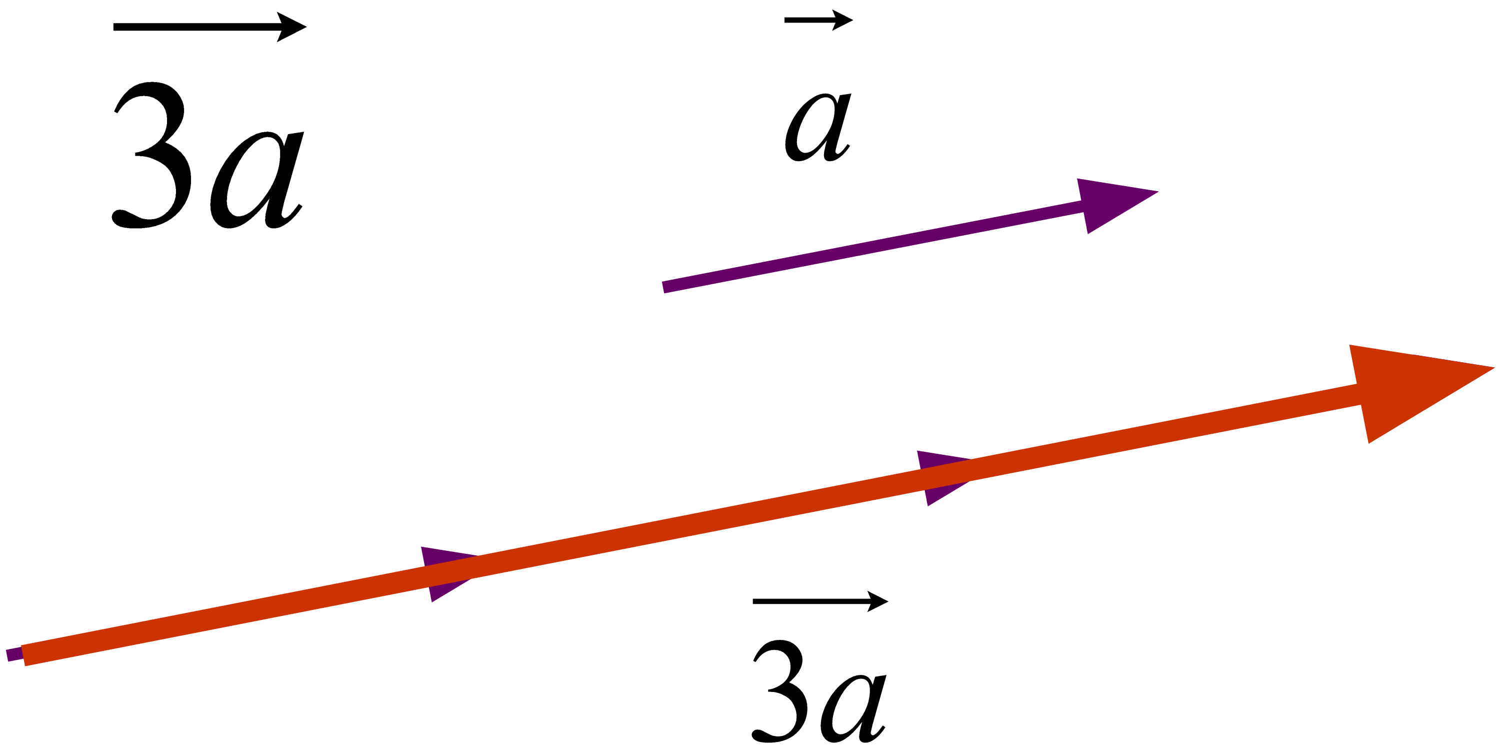


§ 2. Действия над векторами.

Умножение вектора на число

Произведением вектора $\vec{a}$ на число α называется вектор, такой что:

1) $|\overline{b}| = |\alpha| \cdot |\overline{a}|$, 2) $\overline{b} \parallel \overline{a}$.



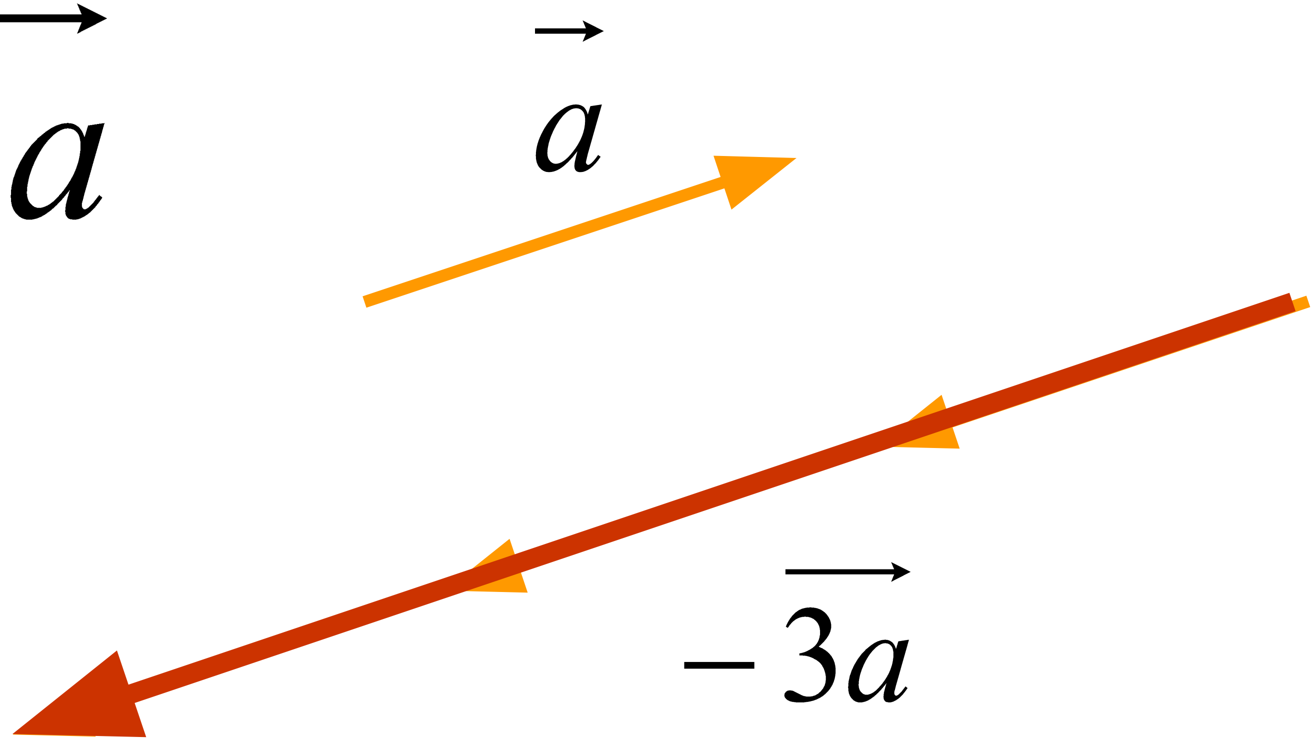
§ 2. Действия над векторами.

Умножение вектора на число

Произведением вектора $\vec{a}$ на число α называется вектор, такой что:

1) $|\bar{b}| = |\alpha| \cdot |\bar{a}|$, 2) $\bar{b} \parallel \bar{a}$.

$$-\overrightarrow{3a}$$

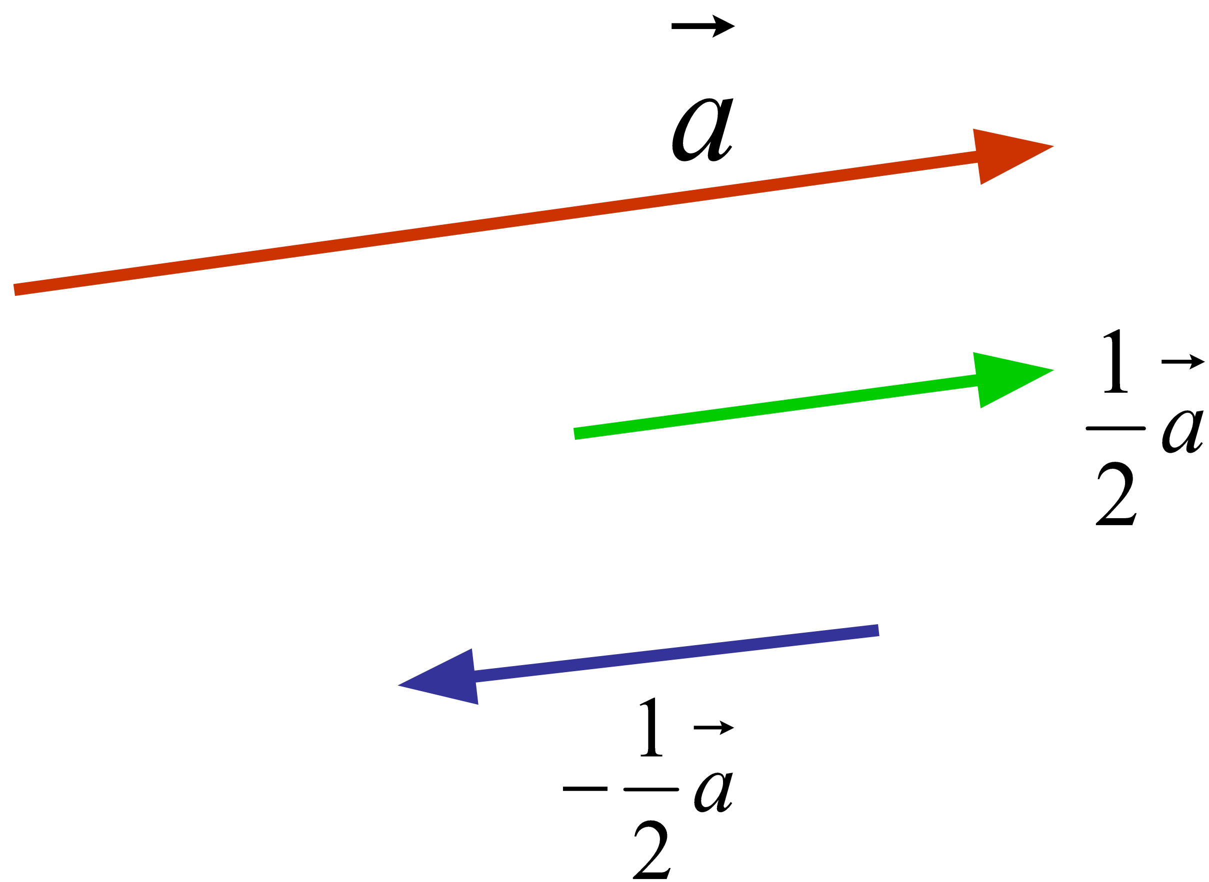


§ 2. Действия над векторами.

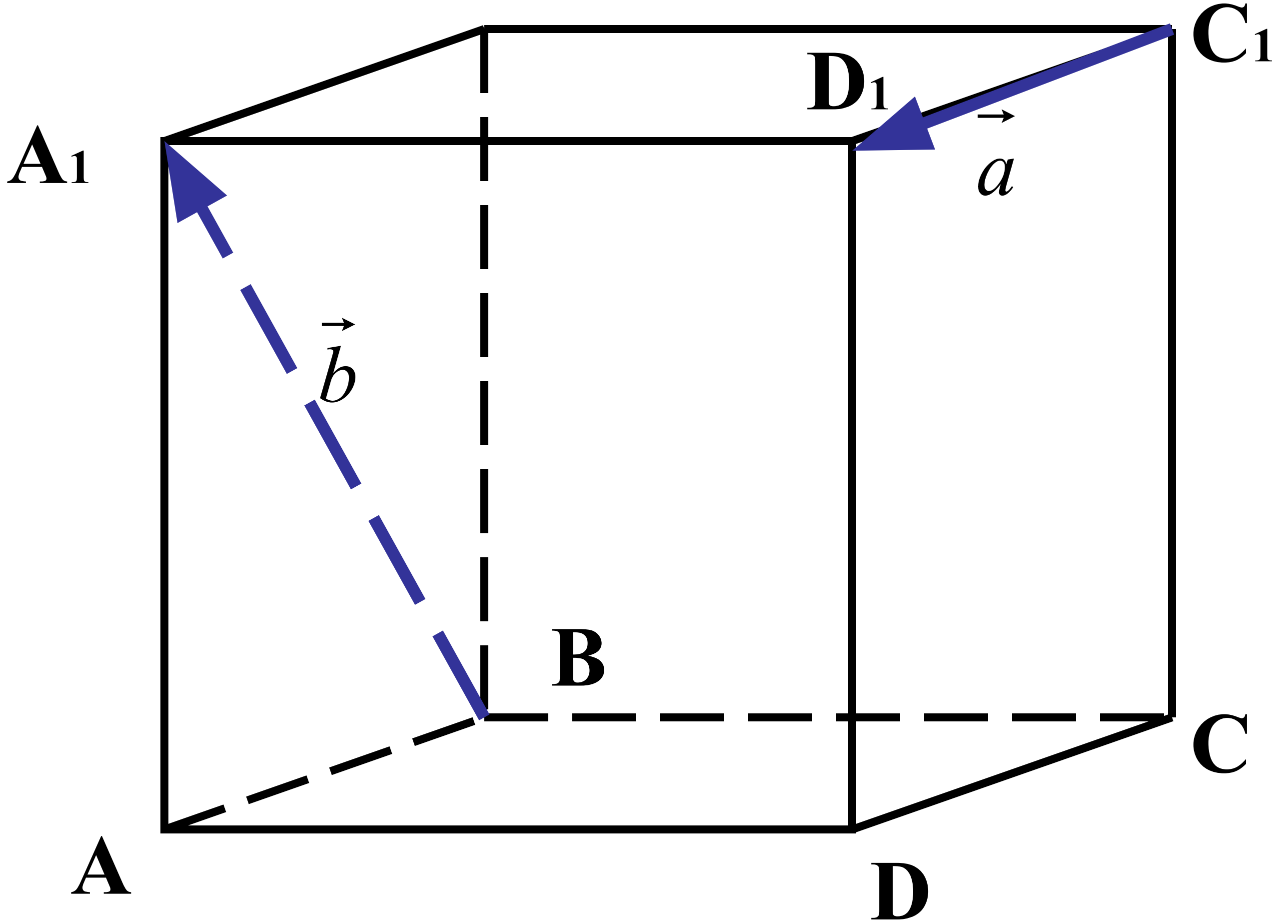
Умножение вектора на число

$$\frac{1}{2}\vec{a}$$

$$-\frac{1}{2}\vec{a}$$

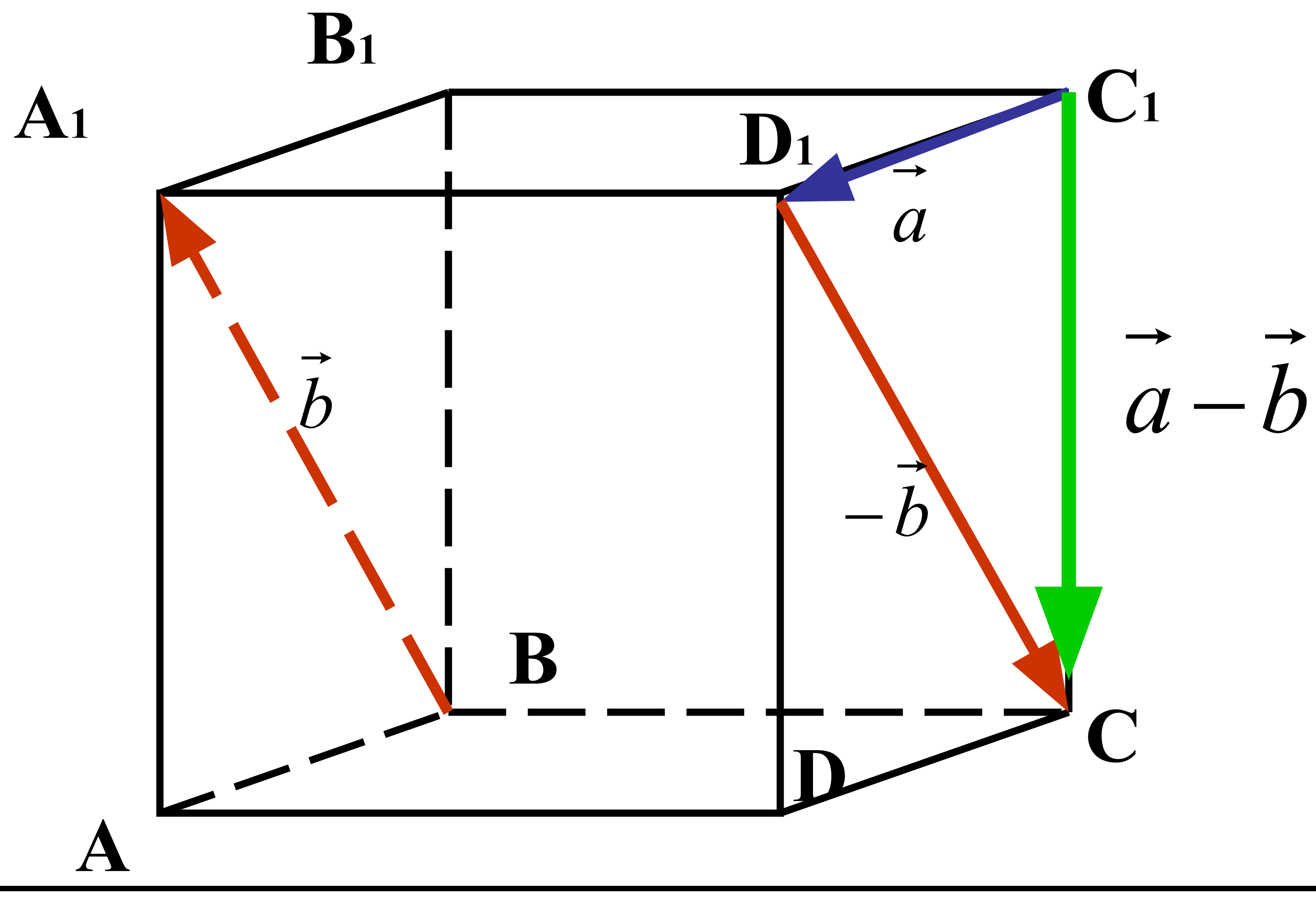


§ 2. Действия над векторами.



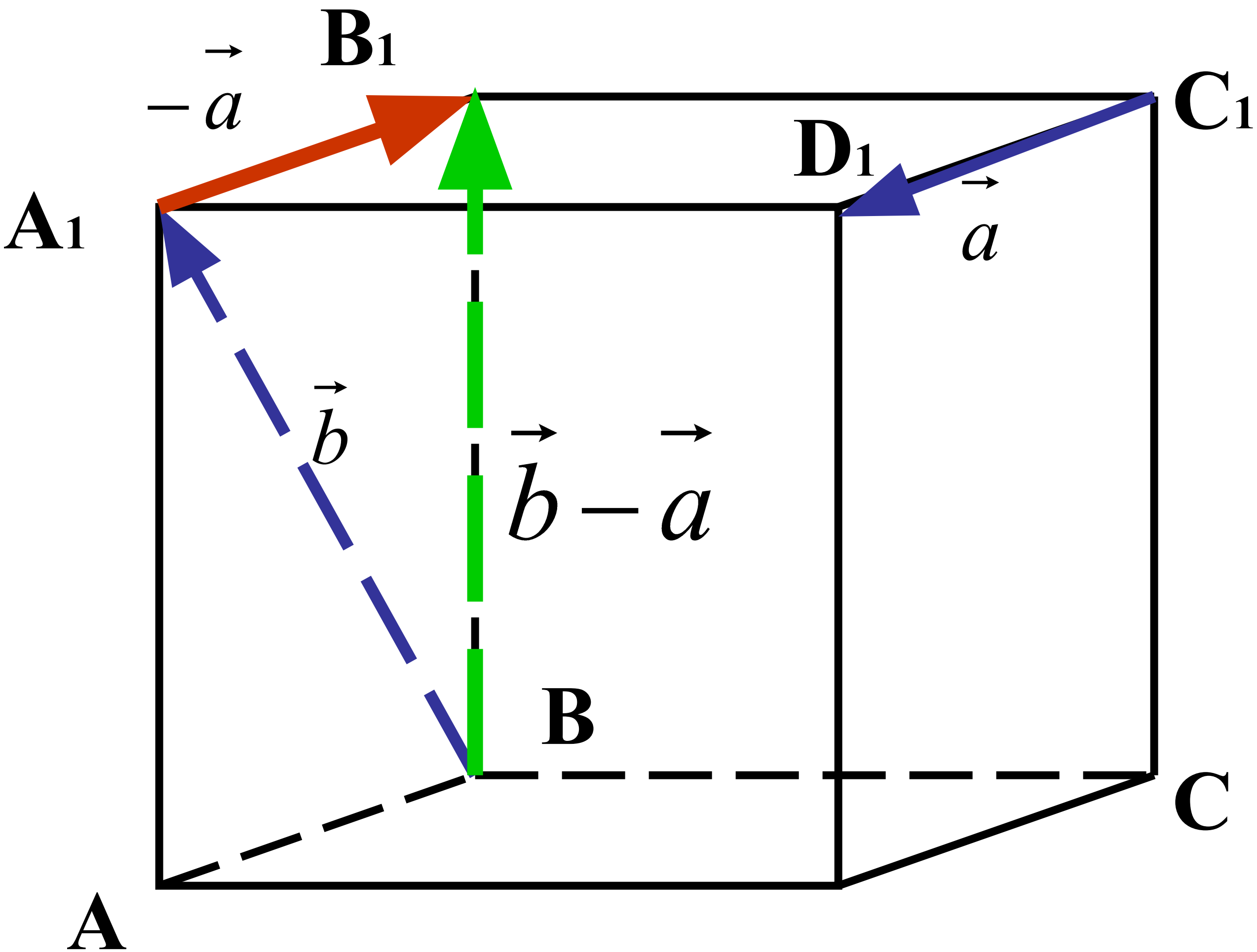
§ 2. Действия над векторами.

$$\vec{a} - \vec{b}$$



§ 2. Действия над векторами.

$$\vec{b} - \vec{a}$$



§ 3. Линейная зависимость векторов

Определение 1. *Линейной комбинацией* векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ называется вектор

$$\overline{b} = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + ... + \lambda_n \overline{a_n},$$

где λ_i – некоторые числа.

Определение 2. Вектора $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ называются *линейно зависимыми*, если существуют действительные числа λ_i, такие, что хотя бы одно из них отлично от нуля, и при этом выполняется равенство:

$$\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + ... + \lambda_n \overline{a_n} = 0.$$

Определение 2. Вектора $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ называются *линейно независимыми*, если из условия $\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + ... + \lambda_n \overline{a_n} = 0$

следует тривиальная комбинация $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0.$

§ 3. Линейная зависимость векторов

Теорема 1. Для линейной зависимости векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ необходимо и достаточно, чтобы один из них был линейной комбинацией остальных.

Доказательство.

Необходимость.

Пусть вектора линейно зависимы. Тогда существуют числа λ_i, не равные нулю одновременно, такие, что $\lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + ... + \lambda_n\overline{a_n} = 0.$

Пусть $\lambda_1 \neq 0$, тогда

$$\overline{a_1} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\overline{a_2} - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\overline{a_n},$$

что доказывает необходимость.

Достаточность.

Пусть для определенности $\overline{a_1} = \lambda_2\overline{a_2} + ... + \lambda_n\overline{a_n}.$

Тогда $(-1)\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + ... + \lambda_n\overline{a_n} = 0,$ причем $|-1| + |\lambda_2| + ... + |\lambda_n| > 0.$

Это и есть условие линейной зависимости.

§ 3. Линейная зависимость векторов

Для линейно зависимых векторов справедливы теоремы 2–6.

Теорема 2. Один вектор линейно зависим тогда и только тогда, когда он нулевой.

Теорема 3. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

Теорема 4. Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Доказательство.

Необходимость.

Пусть три вектора $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ линейно зависимы. Тогда существуют не равные одновременно нулю три числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, такие, что

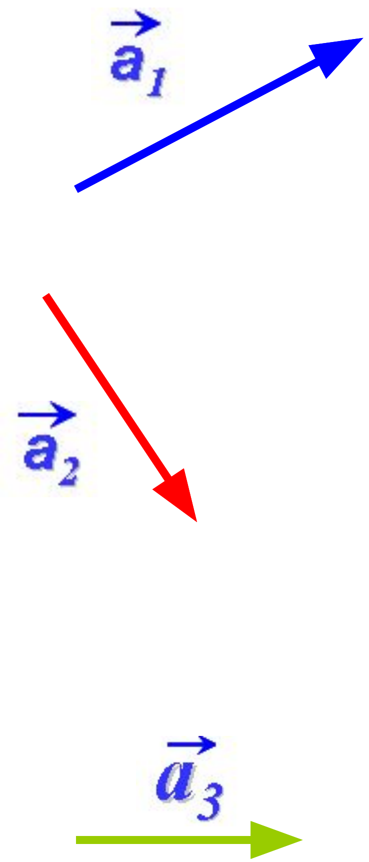
$$\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \lambda_3 \overline{a_3} = 0.$$

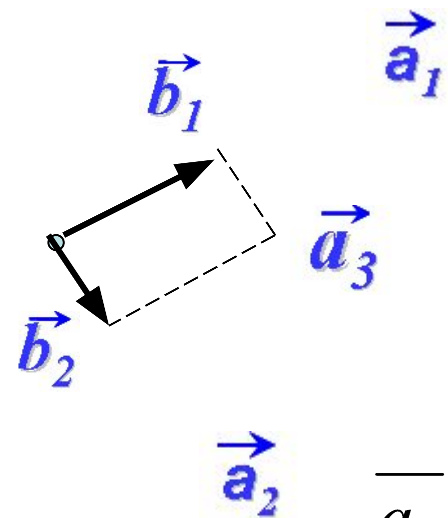
Тогда по теореме 1 один из векторов есть линейная комбинация двух остальных, и, значит, данные три вектора компланарны.

§ 3. Линейная зависимость векторов

Достаточность.

Пусть $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ компланарны, и пусть вектора $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ неколлинеарны.





$$\vec{a}_3 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$$

$$\overline{a_1} \parallel \overline{b_1} \Rightarrow \overline{b_1} = \lambda_1 \overline{a_1}$$

$$\overline{a_2} \parallel \overline{b_2} \Rightarrow \overline{b_2} = \lambda_2 \overline{a_2}$$

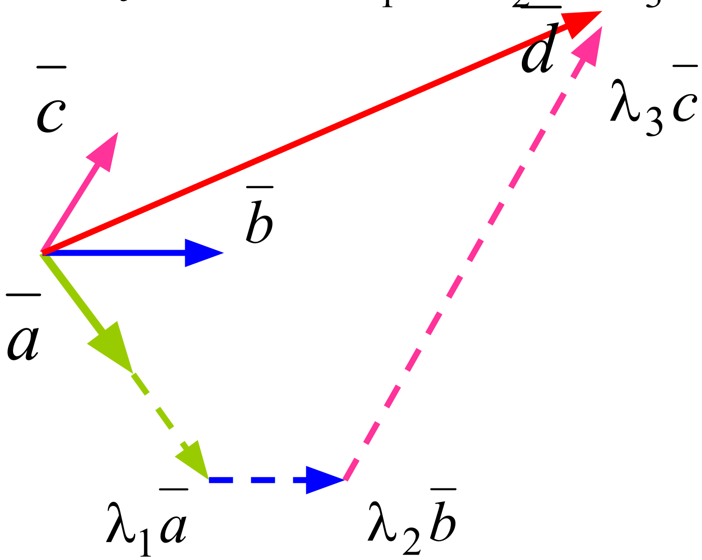
$$\overline{a_3} = \overline{b_1} + \overline{b_2} = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2}$$

из чего вытекает (вследствие теоремы 1) линейная зависимость векторов

§ 3. Линейная зависимость векторов

Теорема 5. Любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы.

Действительно, можно подобрать, причем единственным образом, такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3,$ что будет $\overline{d} = \lambda_1 \overline{a} + \lambda_2 \overline{b} + \lambda_3 \overline{c}.$



Теорема 6. Если среди векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ имеется хотя бы один нулевой вектор, то вектора $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ линейно зависимы.

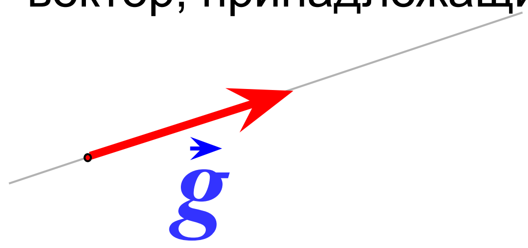
§ 3. Линейная зависимость векторов

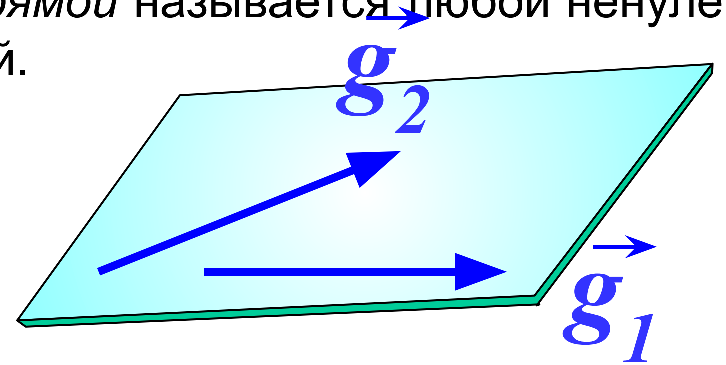
Свойства линейно независимых векторов:

- Один вектор линейно независим тогда и только тогда, когда он ненулевой.
- Два вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда они неколлинеарны.
- Три вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда они некомпланарны.

§ 4. Базис. Координаты вектора в базисе.

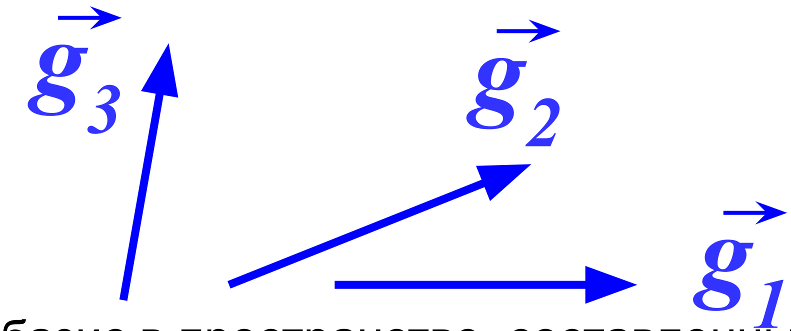
Определение 1. *Базисом на прямой* называется любой ненулевой вектор, принадлежащий этой прямой.





Определение 2. *Базисом на плоскости* называется любая пара линейно независимых векторов, лежащих на этой плоскости.

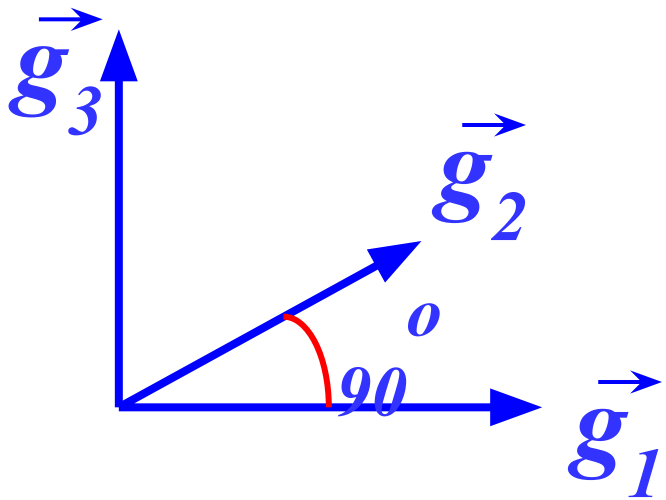
Определение 3. *Базисом в пространстве* называется любая тройка линейно независимых векторов.

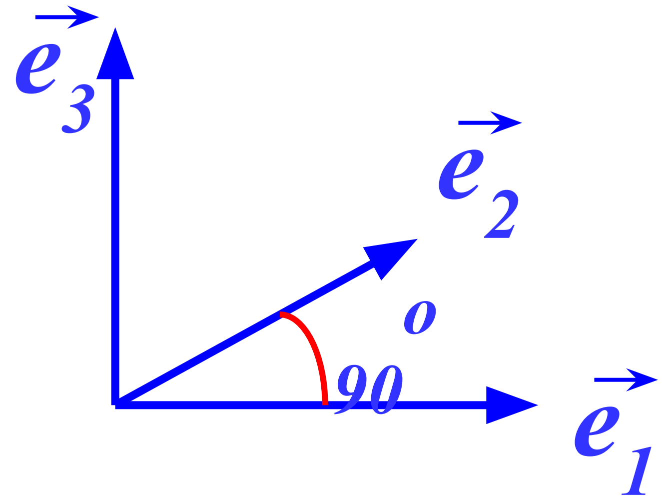


Будем обозначать базис в пространстве, составленный из линейно независимых векторов, как $\left\{\overline{g_1},\overline{g_2},\overline{g_3}\right\}$.

§ 4. Базис. Координаты вектора в базисе.

Определение 4. Базис называется *ортогональным*, если образующие его вектора попарно перпендикулярны.





Определение 5. Ортогональный базис называется *ортонормированным*, если образующие его вектора имеют единичную длину.

$$|\vec{e}_1| = 1$$

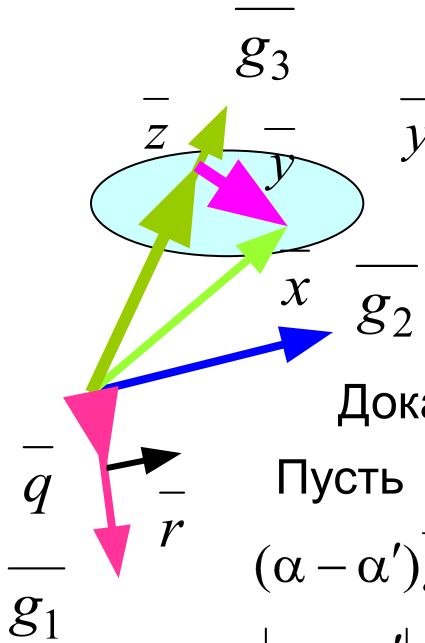
$$|\vec{e}_2| = 1$$

$$|\vec{e}_3| = 1$$

§ 4. Базис. Координаты вектора в базисе.

Теорема 1. Любой вектор $\overline{x}$ в пространстве с базисом $\left\{\overline{g_1}, \overline{g_2}, \overline{g_3}\right\}$ может быть представлен, и причем единственным способом, в виде $x = \alpha g_1 + \beta g_2 + \gamma g_3$, где α, β, γ – некоторые числа.

Доказательство. Докажем вначале, что такие числа существуют.



$\overline{x} = \overline{y} + \overline{z}$, и в силу коллинеарности $\overline{z} = \gamma \overline{g_3}$.

$\overline{y} = \overline{q} + \overline{r}$, и в силу коллинеарности $\overline{q} = \alpha \overline{g_1}, \overline{r} = \beta \overline{g_2}$.

Следовательно, $\overline{y} = \alpha \overline{g_1} + \beta \overline{g_2}$ и

$$\overline{x} = \alpha \overline{g_1} + \beta \overline{g_2} + \gamma \overline{g_3}.$$

Докажем единственность разложения по данному базису.

Пусть $\overline{x} = \alpha \overline{g_1} + \beta \overline{g_2} + \gamma \overline{g_3}; \ \overline{x} = \alpha' \overline{g_1} + \beta' \overline{g_2} + \gamma' \overline{g_3}.$

$$(\alpha - \alpha')\overline{g_1} + (\beta - \beta')\overline{g_2} + (\gamma - \gamma')\overline{g_3} = 0,$$

$$|\alpha - \alpha'| + |\beta - \beta'| + |\gamma - \gamma'| \neq 0$$

Но это условие и означает, что вектора $\left\{\overline{g_1}, \overline{g_2}, \overline{g_3}\right\}$ являются линейно зависимыми и не могут образовывать базис. Это, в свою очередь, доказывает единственность разложения

§ 4. Базис. Координаты вектора в базисе.

Определение 6. Числа α, β, γ в разложении $\overline{x} = \alpha\overline{g_1} + \beta\overline{g_2} + \gamma\overline{g_3}$ называются *координатами* вектора $\overline{x}$ в базисе $\left\{\overline{g_1}, \overline{g_2}, \overline{g_3}\right\}$.

Координаты – величины скалярные.

Для краткой записи вектора $\overline{x} = \alpha\overline{g_1} + \beta\overline{g_2} + \gamma\overline{g_3}$ в координатном представлении будем использовать следующую форму: $\overline{x}\{\alpha, \beta, \gamma\}$, т. е. каждому вектору в данном базисе можно поставить во взаимно однозначное соответствие матрицу-строку.

§ 5. Действия с векторами в координатном представлении.

В каждом конкретном базисе $\{\overline{g_1}, \overline{g_2}, \overline{g_3}\}$ каждый вектор находится во взаимно-однозначном соответствии с упорядоченной тройкой чисел α, β, γ – своими координатами. Возникает вопрос о том, как выполнять операции с векторами в координатном представлении.

С другой стороны, ранее были изучены матрицы и операции над ними, и целесообразно было бы свести операции с векторами в координатном представлении к матричным операциям.

Теорема 1. Два вектора

$\overline{x} = \xi_1 \overline{g_1} + \xi_2 \overline{g_2} + \xi_3 \overline{g_3}$ и $\overline{y} = \eta_1 \overline{g_1} + \eta_2 \overline{g_2} + \eta_3 \overline{g_3}$

равны тогда и только тогда, когда равны матрицы координат

$\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}.$

§ 5. Действия с векторами в координатном представлении.

Теорема 2. Пусть в некотором базисе даны два вектора $\overline{x}\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ и $\overline{y}\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$. Тогда в этом базисе

$$1)\ \alpha\overline{x} = \{\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \alpha\xi_3\},$$

$$2)\ \overline{x} + \overline{y} = \{\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \xi_3 + \eta_3\}.$$

Иными словами: *при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число; при сложении векторов складываются их соответствующие координаты.*

§ 5. Действия с векторами в координатном представлении.

ема 3. Два вектора $\overline{x} = \xi_1 \overline{g_1} + \xi_2 \overline{g_2} + \xi_3 \overline{g_3}$ и $\overline{y} = \eta_1 \overline{g_1} + \eta_2 \overline{g_2} + \eta_3 \overline{g_3}$ на плоскости линейно зависимы тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты в некотором базисе пропорциональны, т. е.

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть вектора $\overline{x}$ и $\overline{y}$ линейно зависимы, тогда по теореме 3.1 $\overline{x} = \lambda \overline{y}$, или в координатной форме $\begin{cases} \xi_1 = \lambda\eta_1 \\ \xi_2 = \lambda\eta_2 \end{cases}.$ Исключив λ из этих уравнений, получаем $\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = 0,$ что и означает равенство нулю определителя.

Достаточность. Пусть $\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} = 0.$ Тогда $\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = 0,$

откуда $\dfrac{\xi_1}{\eta_1} = \dfrac{\xi_2}{\eta_2}.$ Таким образом, вектора $\overline{x}$ и $\overline{y}$ пропорциональны, а, значит, и линейно зависимы.

§ 5. Действия с векторами в координатном представлении.

орема 4. Три вектора в пространстве

$$\overline{x}=\xi_1\overline{g_1}+\xi_2\overline{g_2}+\xi_3\overline{g_3},\quad \overline{y}=\eta_1\overline{g_1}+\eta_2\overline{g_2}+\eta_3\overline{g_3}\quad \text{и}\quad \overline{z}=\kappa_1\overline{g_1}+\kappa_2\overline{g_2}+\kappa_3\overline{g_3}$$

линейно зависимы тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1 & \kappa_1\\ \xi_2 & \eta_2 & \kappa_2\\ \xi_3 & \eta_3 & \kappa_3\end{vmatrix}=0.$$

Следствие. Равенства $\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1\\ \xi_2 & \eta_2\end{vmatrix}=0$ и $\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1 & \kappa_1\\ \xi_2 & \eta_2 & \kappa_2\\ \xi_3 & \eta_3 & \kappa_3\end{vmatrix}=0$

соответственно являются необходимыми и достаточными условиями коллинеарности пары векторов на плоскости и компланарности тройки векторов в пространстве.

§ 5. Действия с векторами в координатном представлении.

Пример 1. Показать, что вектора $\bar{a}\{3;-1;2\}$, $\bar{b}\{1;-2;0\}$, $\bar{c}\{-1;7;1\}$ образуют базис в трехмерном пространстве.

Решение.

Вычислим определитель, столбцы которого представляют координаты векторов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Так как определитель отличен от нуля, то столбцы линейно независимы, т. е. указанные вектора образуют базис.

§ 5. Действия с векторами в координатном представлении.

Пример 2.
Разложить вектор $\overline{c}$ по базису $\{\overline{p};\ \overline{q};\ \overline{r}\}$, где $\overline{c}\{11;\ -6;\ 5\}$, $\overline{p}\{3;\ -2;\ 1\}$, $\overline{q}\{-1;\ 1;\ -2\}$, $\overline{r}\{2;\ 1;\ -3\}$.

Решение.

Разложим вектор $\overline{c}$ по базису $\{\overline{p};\ \overline{q};\ \overline{r}\}$ с неопределенными коэффициентами α, β, γ:

$$\overline{c} = \alpha\overline{p} + \beta\overline{q} + \gamma\overline{r}.$$

В координатах это разложение представляет собой систему трех уравнений относительно α, β, γ:

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta + 2\gamma = 11 \\ -2\alpha + \beta + \gamma = -6. \\ \alpha - 2\beta - 3\gamma = 5 \end{cases}$$

Имеем:

$\Delta = 8;\ \Delta_\alpha = 16;\ \Delta_\beta = -24;\ \Delta_\gamma = 8;$ откуда по правилу Крамера

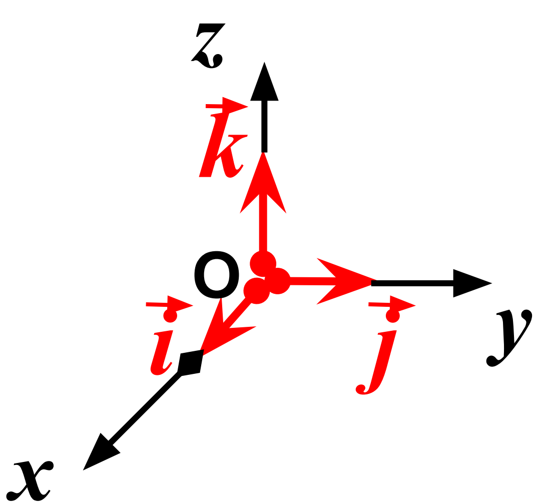
$$\alpha = 2;\quad \beta = -3;\quad \gamma = 1.$$

Ответ: $\overline{c} = 2\overline{p} - 3\overline{q} + \overline{r}.$

§ 6. Декартова система координат.

Определение 1. Совокупность базиса $\{\overline{g_1}, \overline{g_2}, \overline{g_3}\}$ и точки *O*, в которую помещены начала всех базисных векторов, называется *декартовой системой координат* и обозначается $\{O, \overline{g_1}, \overline{g_2}, \overline{g_3}\}$.

Определение 2. Система координат $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, состоящая из ортонормированного ортогонального базиса и точки *O*, называется *прямоугольной декартовой системой координат.*



***Ox* – ось абсцисс**

***Oy* – ось ординат**

***Oz* – ось аппликат**

§ 6. Декартова система координат.

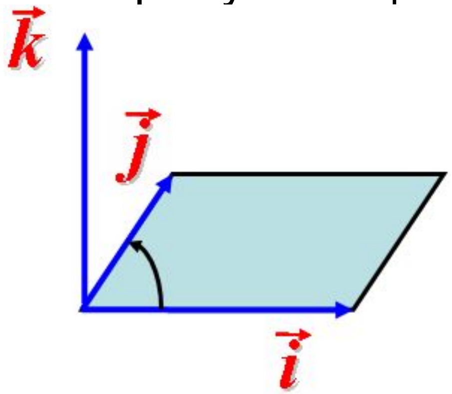
Рене́ Дека́рт
1596 — 1650,
— французский математик,,
создатель аналитической
геометрии и современной
алгебраической символики,

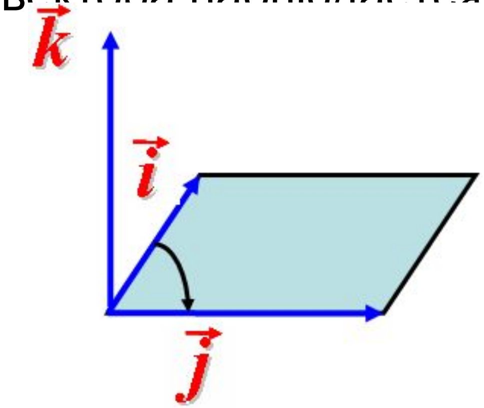
Родился в городе Лаэ (ныне г. Декарт).

Декарт ввел математическую символику, близкую к современной. Коэффициенты он обозначал *a*, *b*, *c*…, а неизвестные — *x*, *y*, *z*. Натуральный показатель степени принял современный вид. Появилась черта над подкоренным выражением.

§ 6. Декартова система координат.

Определение. Упорядоченная тройка ортов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ называется *правой*, если при совмещении начал векторов кратчайший поворот первого вектора ко второму с конца третьего вектора наблюдается против часовой стрелки.





Определение. Упорядоченная тройка ортов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ называется *левой*, если при совмещении начал векторов кратчайший поворот первого вектора ко второму с конца третьего вектора наблюдается по часовой стрелки.

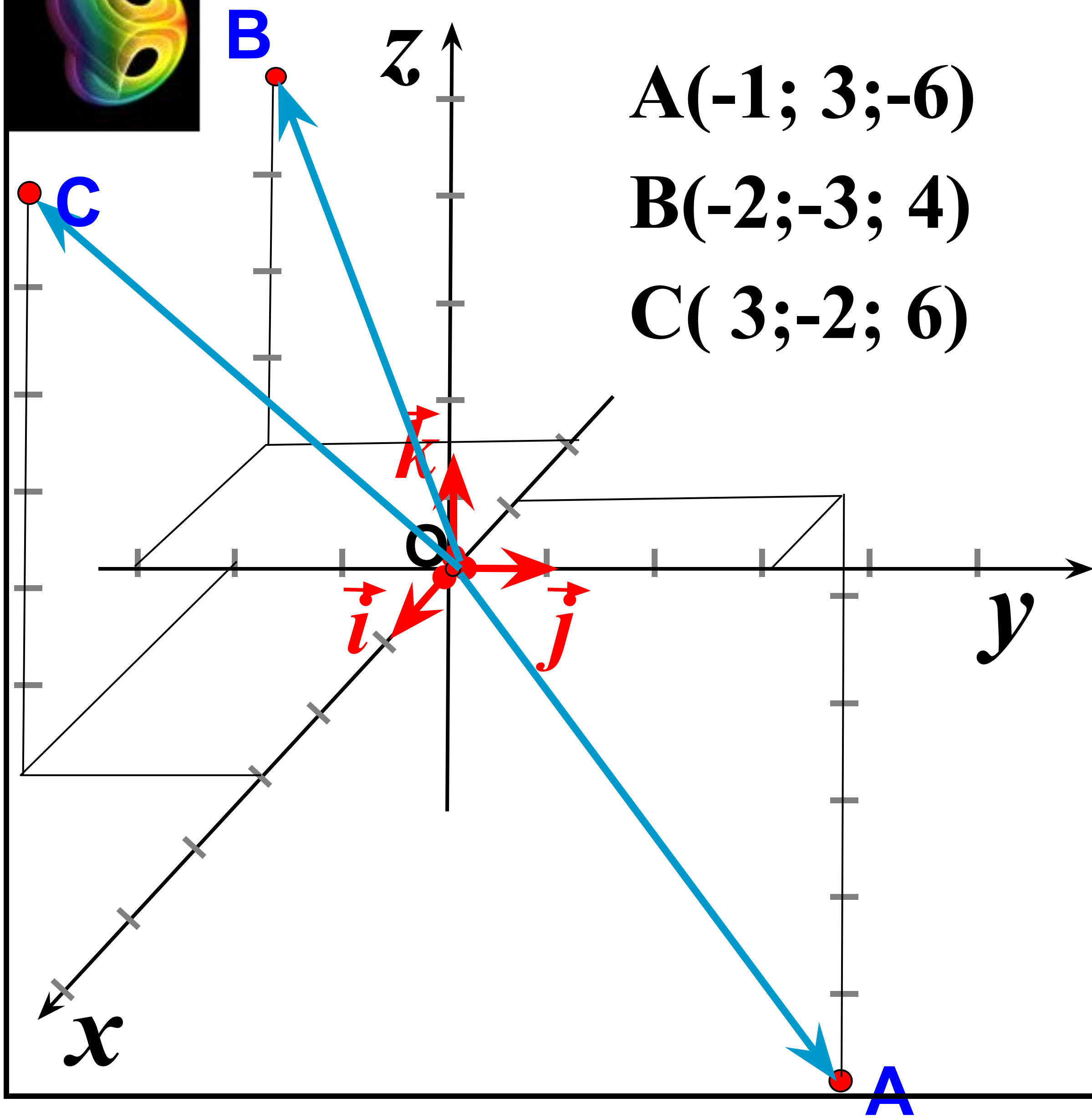
§ 6. Декартова система координат.

Если задана система координат $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, то произвольной точке *M* в пространстве можно поставить во взаимно однозначное соответствие вектор $\bar{r}$, начало которого находится в точке *O*, а конец в точке *M*.

Определение 3. Вектор $\bar{r} = \overline{OM}$ называется *радиус-вектором точки M* в системе координат $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.

Определение 4. Координаты радиус-вектора точки *M* называются *координатами точки M* в системе координат $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.

§ 6. Декартова система координат.



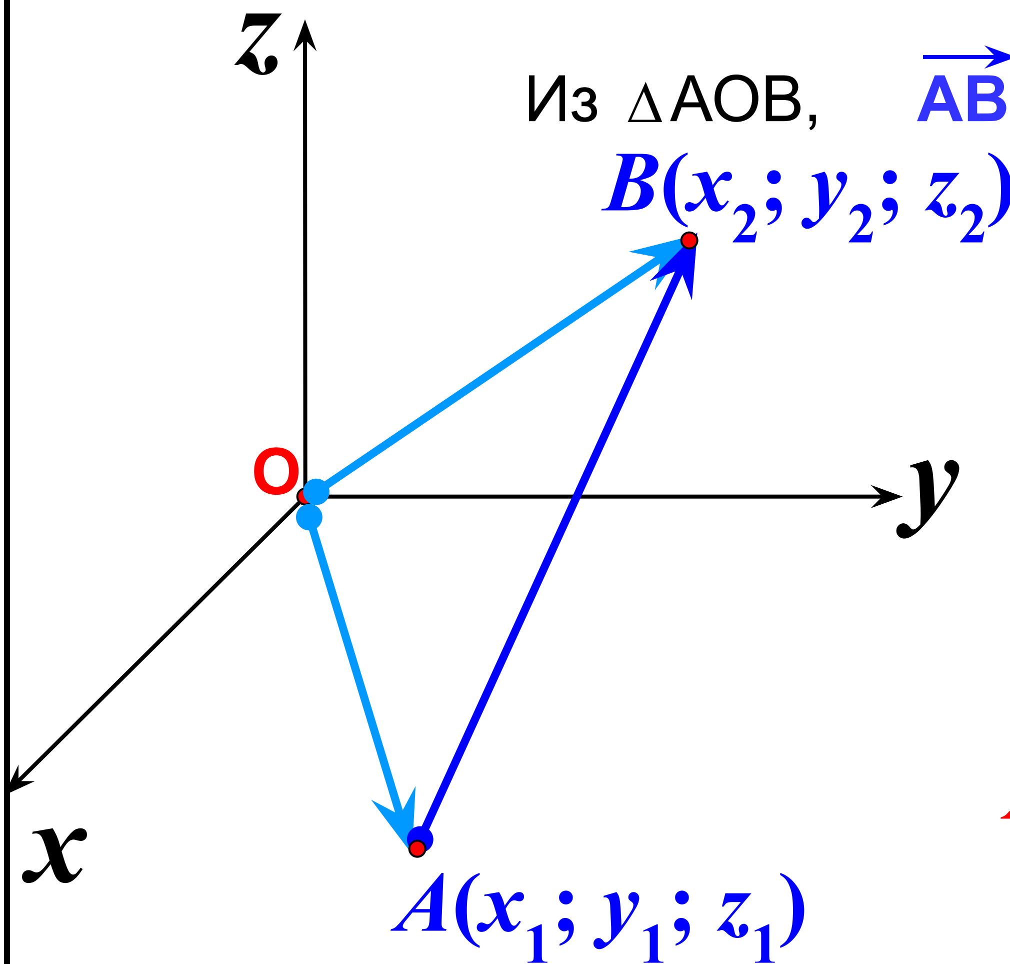
A(-1; 3;-6) $\qquad \overrightarrow{OA}\{-1;\ 3;-6\}$

B(-2;-3; 4) $\qquad \overrightarrow{OB}\{-2;-3;\ 4\}$

C(3;-2; 6) $\qquad \overrightarrow{OC}\{\ 3;-2;\ 6\}$

§ 6. Декартова система координат.

Задача 1. Выразить координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ через координаты его начала A и конца B.



Из ΔAOB, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

$$\overrightarrow{OA}\{x_1; y_1; z_1\}$$

$$\overrightarrow{OB}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$-\overrightarrow{OA}\{-x_1; -y_1; -z_1\}$$

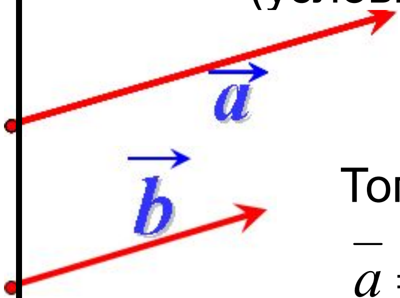
$$+\ \overrightarrow{OB}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\overrightarrow{AB}\ \{x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1\}$$

§ 6. Декартова система координат.

Задача 2

(условие коллинеарности двух векторов в координатной форме).



Пусть два вектора $\bar{a}\{a_x, a_y, a_z\}$ и $\bar{b}\{b_x, b_y, b_z\}$ коллинеарны.

Тогда по теореме 3.1 существует такое число λ, при котором

$\bar{a} = \lambda \bar{b}$, т. е. $a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k} = \lambda \left(b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k} \right)$,

откуда $\left.\begin{aligned} a_x &= \lambda b_x \\ a_y &= \lambda b_y \\ a_z &= \lambda b_z \end{aligned}\right\}$ или $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z} = \lambda$

– условие коллинеарности двух векторов.

Если два вектора коллинеарны, то их координаты пропорциональны.

§ 6. Декартова система координат.

Пример 1. Коллинеарны ли вектора

$$\vec{a}\,\{2;\ 6;-3\};\quad \vec{b}\{6;18;-9\}$$

$$\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{1}{3} \qquad \vec{b} = 3\vec{a} \ \textbf{или}\ \vec{a} = \frac{1}{3}\vec{b}$$

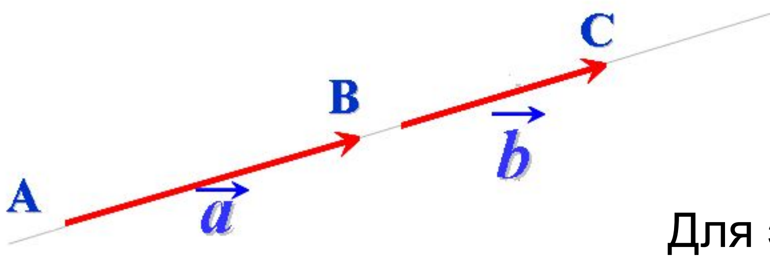
Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

§ 6. Декартова система координат.

Пример 2.

В декартовой системе координат *A*(1,3,0), *B*(2,0,-1), *C*(3,-3,-2). Доказать, что точки *A*, *B*, *C* лежат на одной прямой.

Решение



Очевидно, точки *A*, *B*, *C* лежат на одной прямой, если векторы $\overline{AB}\{\xi_1,\eta_1,\kappa_1\}$ и $\overline{AC}\{\xi_2,\eta_2,\kappa_2\}$ коллинеарны.

Для этого необходимо выполнение условия:

$$\overline{AB}=\alpha\cdot\overline{AC}.$$

Отсюда следует (теорема 5.2), что координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ должны быть пропорциональны.

$$\overline{AB}\{1,-3,-1\};\ \overline{AC}\{2,-6,-2\};\qquad \frac{1}{2}=\frac{-3}{-6}=\frac{-1}{-2}.$$

Таким образом, точки *A*, *B*, *C* лежат на одной прямой.

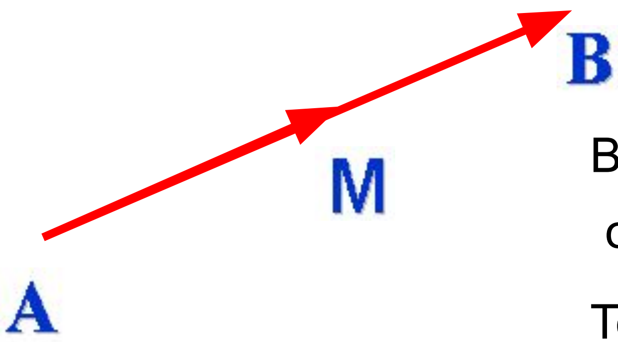
§ 6. Декартова система координат.

Задача 3

(деление отрезка в данном отношении). В декартовой системе координат заданы точки $A(x_1,\, y_1,\, z_1),\, B(x_2,\, y_2,\, z_2).$

Найти координаты точки *M*(*x*,*y*,*z*), делящей отрезок *AB* в отношении *λ*:

$$\left|\overline{AM}\right| / \left|\overline{MB}\right| = \lambda.$$



Решение

Векторы $\overline{AM}$ и $\overline{MB}$ коллинеарны, сонаправлены, отношение их длин равно *λ*.

Тогда $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}.$

Переходя к равенству соответствующих координат, получим:

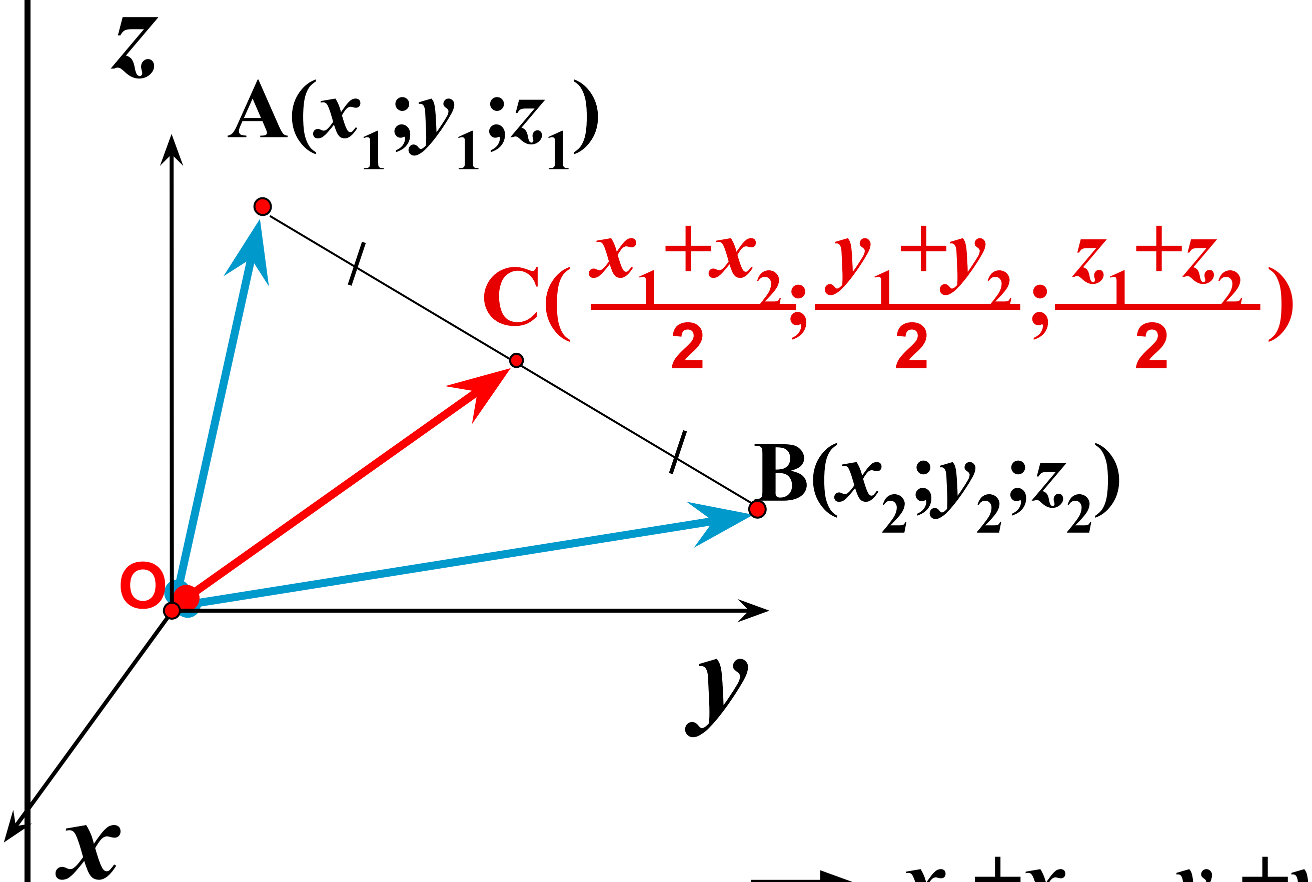
$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x); \qquad y - y_1 = \lambda(y_2 - y); \qquad z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

Выражая отсюда *x*,*y*,*z*, получим для координат точки *M*:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

§ 6. Декартова система координат.

В частности, координаты середины отрезка (λ=1) равны полусумме соответствующих координат его концов.



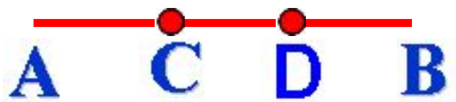
$$\overrightarrow{OC}\left\{\frac{x_1+x_2}{2};\ \frac{y_1+y_2}{2};\ \frac{z_1+z_2}{2}\right\}$$

§ 6. Декартова система координат.

Пример.

Разделить отрезок *AB* (*A*(3,5; 1), *B*(2; 2)) на три равные части.

Решение



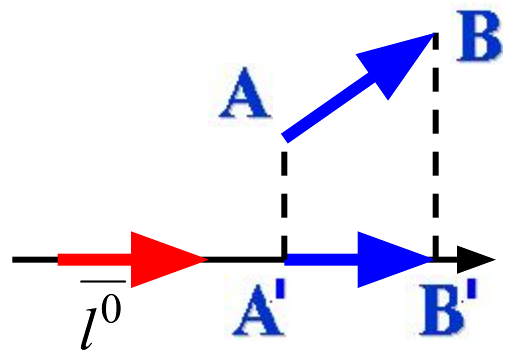
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

$$\lambda_c = \frac{\left|\overline{AC}\right|}{\left|\overline{CB}\right|} = \frac{1}{2}, \qquad x_c = \frac{3{,}5 + 0{,}5 \cdot 2}{1 + 0{,}5} = 3, \qquad y_c = \frac{1 + 0{,}5 \cdot 2}{1 + 0{,}5} = \frac{4}{3}.$$

$$\lambda_D = \frac{\left|\overline{AD}\right|}{\left|\overline{DB}\right|} = 2, \qquad x_D = \frac{3{,}5 + 2 \cdot 2}{1 + 2} = 2{,}5; \qquad y_D = \frac{1 + 2 \cdot 2}{1 + 2} = \frac{5}{3}.$$

§ 7. Проекция вектора на ось.

Пусть вектор $\overline{AB}$ лежит на некоторой оси l . Направление орта $\overline{l^0}$ соответствует направлению оси.



Определение 1. *Проекцией вектора*, лежащего на оси, на эту ось называется число, по абсолютной величине равное длине вектора и взятое со знаком плюс, если направление вектора совпадает с направлением оси и со знаком минус, если они противоположны.

Пусть вектор $\overline{AB}$ не лежит на некоторой оси l . Из точек *A* и *B* опустим перпендикуляры на ось. Вектор $\overline{A'B'}$ называется *компонентой вектора* по оси l .$\overline{AB}$

Определение 2. *Проекцией вектора, не лежащего на оси l*, на эту ось называется проекция его компоненты по оси l на эту же ось.

Проекция вектора на ось обычно обозначается так: $\text{пр}_l\,\overline{AB}$.

§ 7. Проекция вектора на ось.

Свойства проекций вектора на ось:

1. Проекция вектора на ось равна произведению длины вектора на косинус угла между вектором и осью:

$$\text{пр}_l \overline{AB} = \left|\overline{AB}\right| \cos\theta,$$ где θ – угол между вектором и осью.

2. Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций этих векторов на эту же ось, т. е. $\text{пр}_l(\overline{a}+\overline{b}) = \text{пр}_l\overline{a} + \text{пр}_l\overline{b}.$

3. Проекция на ось вектора, умноженного на число, равна произведению проекции вектора на это число, т. е.

$$\text{пр}_l(\lambda\overline{a}) = \lambda\,\text{пр}_l\overline{a}.$$

4. Проекции на ось двух равных векторов равны между собой.

§ 7. Проекция вектора на ось.

Рассмотрим теперь вопрос о разложении вектора по координатным осям.

$\vec{a}\,\{x;y;z\}$

$\overrightarrow{OA_1} = x\vec{i}$

$\overrightarrow{OA_2} = y\vec{j}$

$\overrightarrow{OA_3} = z\vec{k}$

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}$$

Такое представление вектора называется разложением его на *компоненты* (или *составляющие*) по координатным осям.

Вычисление длины вектора по его координатам

По правилу параллелепипеда

$$|\overrightarrow{OA}|^2 = |\overrightarrow{OA_1}|^2 + |\overrightarrow{OA_2}|^2 + |\overrightarrow{OA_3}|^2$$

$$|\overrightarrow{OA_1}| = |x\vec{i}\,| = |x|$$

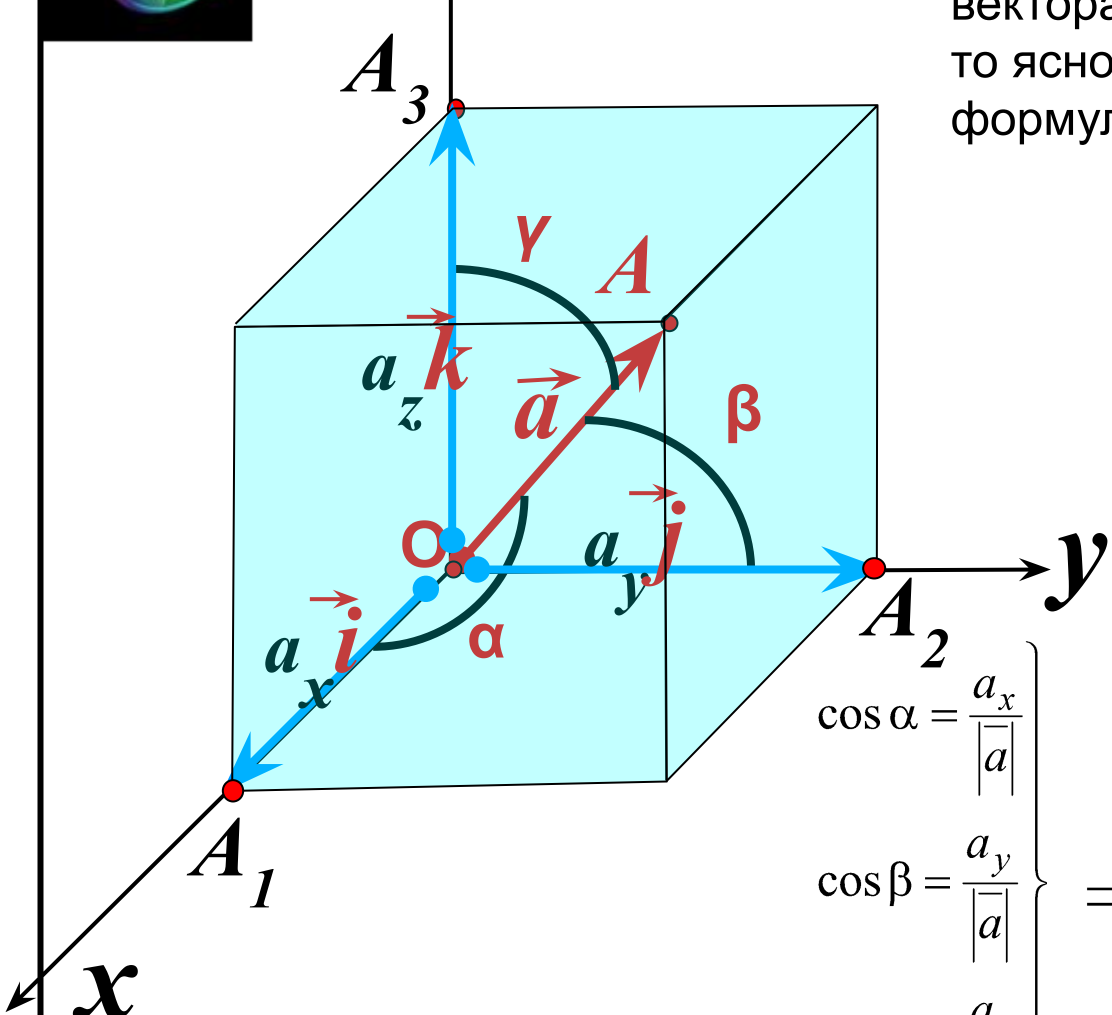
$$|\overrightarrow{OA_2}| = |y\vec{j}\,| = |y|$$

Длина вектора равна квадратному корню из суммы квадратов его координат.

$$|\vec{a}|^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2}$$

Направляющие косинусы вектора.



Если $a_x;a_y;a_z$ – проекции вектора на координатные оси, то ясно, что имеют место формулы:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= |\bar{a}|\cos\alpha \\ a_y &= |\bar{a}|\cos\beta \\ a_z &= |\bar{a}|\cos\gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{a_x}{|\bar{a}|} \\ \cos\beta &= \frac{a_y}{|\bar{a}|} \\ \cos\varphi &= \frac{a_z}{|\bar{a}|} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\varphi = 1.$$

§ 7. Проекция вектора на ось.

Пример 1. Даны точки $A(1, -1, 2)$ и $B(3, 2, 3)$.

Найти: Координаты вектора $\overline{AB}$:

$$\overline{AB}\{3-1,\, 2-(-1),\, 3-2\} = \overline{AB}\{2, 3, 1\}.$$

Найти: Длину вектора $\overline{AB}$:

Так как $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, значит $|\overline{AB}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}.$

Найти: Разложение вектора $\overline{AB}$ по базису;

Так как $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$, значит $\overline{AB} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}.$

Найти: Направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}, \qquad \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{14}}, \qquad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

Найти: Единичный вектор (орт), соответствующий вектору $\overline{AB}$:

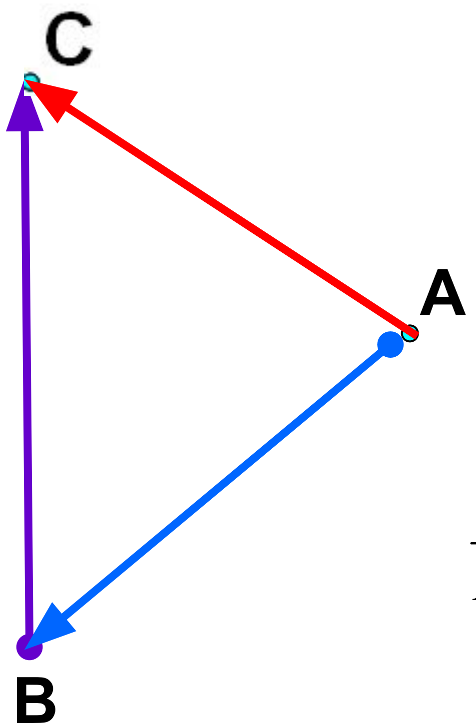
Так как $\overline{a^0} = \dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$, значит $\overline{a^0}\left\{\dfrac{2}{\sqrt{14}}, \dfrac{3}{\sqrt{14}}, \dfrac{1}{\sqrt{14}}\right\}.$

§ 7. Проекция вектора на ось.

Пример 2.

Дан вектор $\overline{AB} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ и точки $B(1, 2, -1)$ и $C(2, 2, 5)$.

Найти координаты вектора $\overline{AC}$.



Решение

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Найдем координаты вектора $\overline{BC}$:

$$\overline{BC}\{1, 0, 6\}.$$

$$\overline{AC} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k} + \bar{i} + 6\bar{k} = 2\bar{i} + \bar{j} + 8\bar{k}.$$

§ 7. Проекция вектора на ось.

Пример 3.

Выяснить, при каких значениях параметров λ и μ вектора $\overline{a} = \lambda\overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$ и $\overline{b} = \overline{i} + \overline{j} + \mu\overline{k}$ коллинеарны.

Решение

Два вектора коллинеарны, если существует некая константа c такая, что имеет место соотношение

$$\overline{a} = c\overline{b}.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda\overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k} = c(\overline{i} + \overline{j} + \mu\overline{k}),$$

откуда

$$(\lambda - c)\overline{i} + (2 - c)\overline{j} + (3 - \mu c)\overline{k} = 0.$$

Так как орты линейно независимы, ибо они представляют собою базис, то должны обращаться в нуль коэффициенты этой линейной комбинации, т. е.

$$\begin{cases} \lambda - c = 0 \\ 2 - c = 0 \\ 3 - \mu c = 0 \end{cases},$$

откуда

$$\lambda = 2, \mu = \frac{3}{2}.$$

§ 8. Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$$

Если хотя бы один из векторов равен нулю, то скалярное произведение этих векторов равно нулю (по определению).

Скалярное произведение векторов – число (скаляр).

Скаляр – лат. *scale* **– лестница, шкала.**

Ввел в 1845г. У. Гамильтон, ирландский математик.

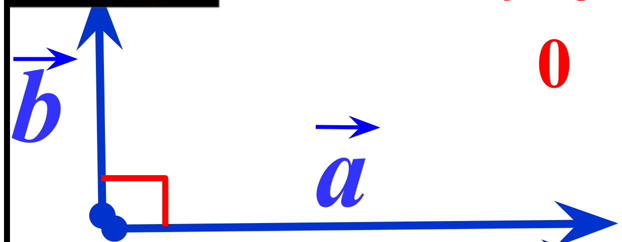
§ 8. Скалярное произведение векторов.

$\widehat{\vec{a}\;\vec{b}}$ 90

0

0

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 90^0 = 0$$



Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то скалярное произведение векторов равно нулю.

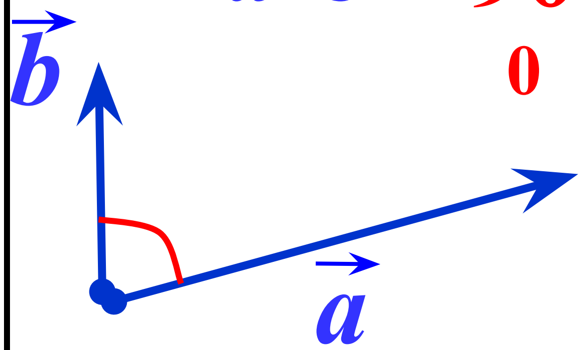
Обратно: если $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\perp\vec{b}$$

§ 8. Скалярное произведение векторов.

$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} < 90^0$$



> 0

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha$$

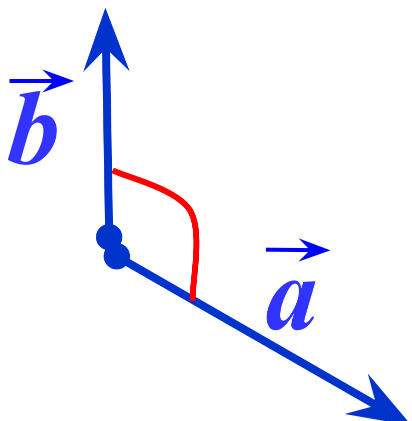
> 0

Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда , когда угол между векторами **острый.**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} < 90^0$$

§ 8. Скалярное произведение векторов.

$$\widehat{\vec{a}\ \vec{b}} > 90^0$$

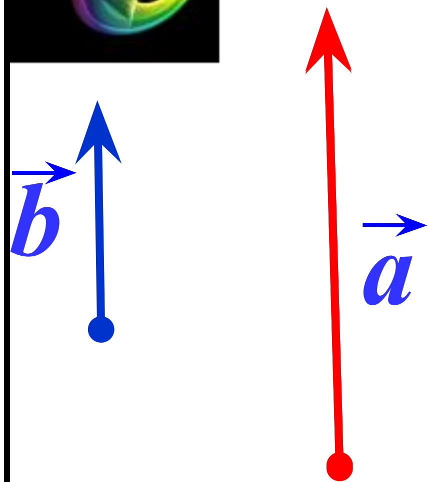


$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha < 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда , когда угол между векторами **тупой.**

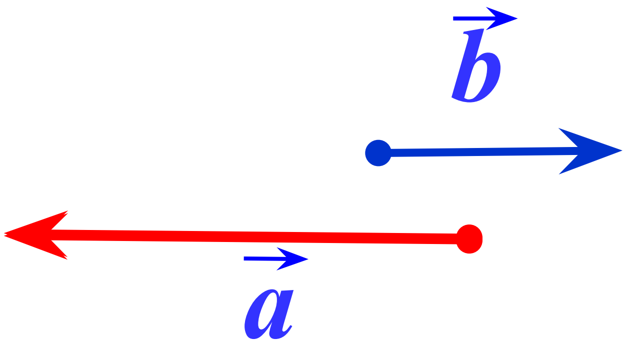
$$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\vec{a}\ \vec{b}} > 90^0$$

§ 8. Скалярное произведение векторов.



Если $\vec a \uparrow\uparrow \vec b$ $\quad \widehat{\vec a\, \vec b} = 0^0$

$$\vec a \cdot \vec b = |\vec a|\cdot|\vec b| \cos 0^0 = |\vec a|\cdot|\vec b|$$

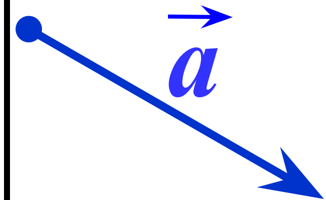


Если $\vec a \downarrow\uparrow \vec b$ $\quad \widehat{\vec a\, \vec b} = 180^0$

$$\vec a \cdot \vec b = |\vec a|\cdot|\vec b| \cos 180^0 = -|\vec a|\cdot|\vec b|$$

§ 8. Скалярное произведение векторов.

$\widehat{\vec{a}\,\vec{a}} = 0^0$



$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos 0^0 = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ называется **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^{\,2}$

Таким образом, $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$ откуда $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}$.

Длина вектора равен квадратному корню из его скалярного квадрата.

§ 8. Скалярное произведение векторов.

Свойства скалярного произведения:

1) $\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot\text{пр}_{\overline{a}}\overline{b}=\left|\overline{b}\right|\cdot\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}.$

Действительно, $\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}=\left|\overline{a}\right|\cdot\cos\left(\overline{a}\wedge\overline{b}\right),$ тогда

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\left(\overline{a}\wedge\overline{b}\right)=\left|\overline{b}\right|\cdot\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}.$$

Отсюда следует формула для нахождения проекции одного вектора на другой:

$$\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{b}\right|}.$$

2) Переместительное или коммутативное свойство: $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}.$

3) Сочетательное (ассоциативное) свойство: $\left(\lambda\overline{a}\right)\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot\left(\lambda\overline{b}\right)=\lambda\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right).$

4) Распределительное (дистрибутивное) свойство относительного сложения векторов:

$$\overline{a}\cdot\left(\overline{b}+\overline{c}\right)=\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}.$$

§ 8. Скалярное произведение векторов.

Выведем формулу скалярного произведения в координатной форме.

$\vec{a}\,\{a_x;a_y;a_z\}$ $\qquad$ $\vec{b}\,\{b_x;b_y;b_z\}$

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\left(a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}\right)\cdot\left(b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k}\right)=$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z,$$

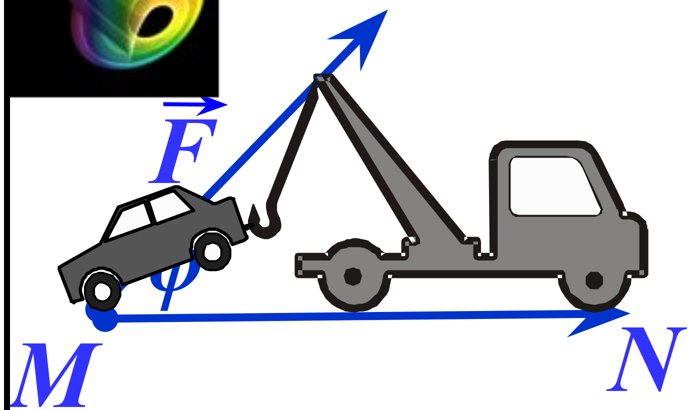
т.к.

$$\overline{i}^2=\overline{j}^2=\overline{k}^2=1,\quad \overline{i}\cdot\overline{j}=\overline{j}\cdot\overline{i}=0,\quad \overline{i}\cdot\overline{k}=\overline{k}\cdot\overline{i}=0,\quad \overline{k}\cdot\overline{j}=\overline{j}\cdot\overline{k}=0.$$

В частности,

$$\left|\overline{a}\right|=\sqrt{\overline{a}^2}=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}.$$

§ 8. Скалярное произведение векторов.



Скалярное произведение векторов встречается в физике. Например, из курса механики известно, что работа $\mathbf{A}$ постоянной силы $\vec{\mathbf{F}}$ при перемещении тела из точки $\mathbf{M}$ в точку $\mathbf{N}$ равна произведению силы $\vec{\mathbf{F}}$ и перемещения $\overrightarrow{\mathbf{MN}}$ на косинус угла между ними.

$$\mathbf{A} = |\vec{\mathbf{F}}| \cdot |\overrightarrow{\mathbf{MN}}| \cos\phi$$

$$\mathbf{A} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{MN}}$$

§ 8. Скалярное произведение векторов.

лярное произведение двух векторов позволяет решить следующие задачи векторной алгебры:

1. Нахождение угла между двумя векторами.

$$\left(\overline{a} \wedge \overline{b}\right) = \arccos\frac{\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|} = \arccos\frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}\cdot\sqrt{b_x{}^2 + b_y{}^2 + b_z{}^2}}.$$

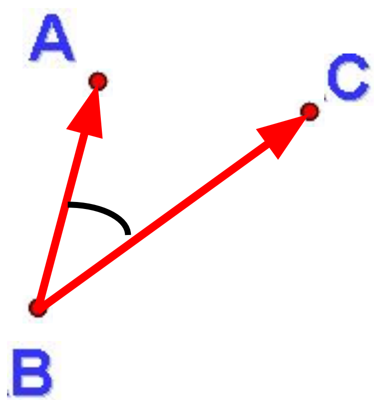
Отсюда нетрудно получить условие ортогональности (перпендикулярности) двух векторов в координатной форме:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

§ 8. Скалярное произведение векторов.

Пример 1. Даны вершины треугольника: *A*(2; –1; 3), *B*(1; 1; 1), *C*(0; 0; 5). Найти $\angle ABC$.

Решение



$$\cos\angle ABC = \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{BA}\right|\cdot\left|\overline{BC}\right|}.$$

$$\overline{BA}\{1, -2, 2\}, \quad \left|\overline{BA}\right| = \sqrt{1+4+4} = 3,$$

$$\overline{BC}\{-1, -1, 4\}, \quad \left|\overline{BC}\right| = \sqrt{1+1+16} = 3\sqrt{2},$$

$$\overline{BA}\cdot\overline{BC} = -1+2+8 = 9,$$

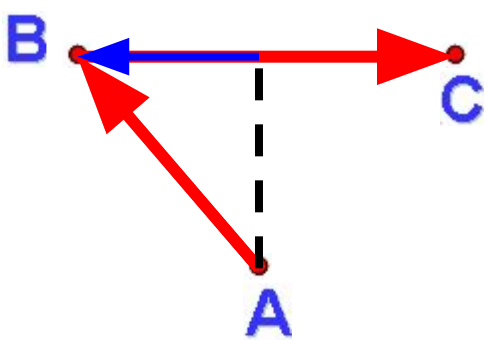
$$\cos\angle ABC = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \angle ABC = 45^{o}.$$

§ 8. Скалярное произведение векторов.

2. Нахождение проекции одного вектора на направление другого

Пример 2. Даны три точки *A*(2; 3; 5), *B*(1; 2; 2), *C*(3; 5; 4). Найти $\text{пр}_{\overline{BC}}\,\overline{AB}$.

Решение



$$\overline{BC}\{2, 3, 2\}, \qquad \left|\overline{BC}\right| = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17},$$

$$\overline{AB}\{-1, -1, -3\}, \qquad \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11},$$

$$\overline{AB}\cdot\overline{BC} = -2-3-6 = -11,$$

$$\text{пр}_{\overline{BC}}\,\overline{AB} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{BC}\right|} = -\frac{11}{\sqrt{17}}.$$

§ 8. Скалярное произведение векторов.

3. Нахождение длины вектора.

Пример 3. Дан вектор $\overline{a}=\overline{m}+\overline{n},\ \left|\overline{m}\right|=\left|\overline{n}\right|=2,\left(\overline{m}\,\hat{}\,\overline{n}\right)=\dfrac{\pi}{3}.$

Найти длину вектора $\overline{a}$.

Решение

$\left|\overline{a}\right|=\sqrt{\overline{a}^{2}}.$ Найдем скалярный квадрат вектора $\overline{a}$.

$$\overline{a}^{2}=(\overline{m}+\overline{n})\cdot(\overline{m}+\overline{n})=\overline{m}^{2}+2\overline{m}\cdot\overline{n}+\overline{n}^{2}=$$

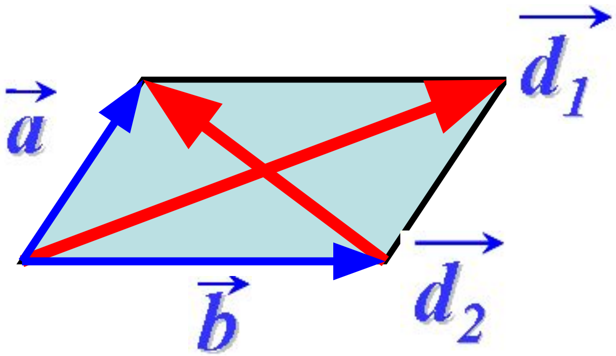
$$=\left|\overline{m}\right|^{2}+2\left|\overline{m}\right|\cdot\left|\overline{n}\right|\cos\left(\overline{m}\,\hat{}\,\overline{n}\right)+\left|\overline{n}\right|^{2}=4+2\cdot2\cdot2\cos\frac{\pi}{3}+4=8+8\cdot\frac{1}{2}=12.$$

$$\left|\overline{a}\right|=\sqrt{\overline{a}^{2}}=2\sqrt{3}.$$

§ 8. Скалярное произведение векторов.

Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = 2\overline{m} + \overline{n}$ и $\overline{b} = \overline{m} - 2\overline{n}$, где $\overline{m}, \overline{n}$ – единичные векторы, угол между которыми равен 60°.

Решение



$$\vec{d_1} = \vec{a} + \vec{b} \qquad \vec{d_1} = 3\vec{m} - \vec{n}$$

$$\vec{d_2} = \vec{a} - \vec{b} \qquad \vec{d_2} = \vec{m} + 3\vec{n}$$

$$\overline{d_1}^2 = (3\overline{m} - \overline{n}) \cdot (3\overline{m} - \overline{n}) = 9\overline{m}^2 - 6\overline{m} \cdot \overline{n} + \overline{n}^2 =$$

$$= 9\left|\overline{m}\right|^2 - 6\left|\overline{m}\right| \cdot \left|\overline{n}\right| \cos\left(\overline{m} \,\hat{}\, \overline{n}\right) + \left|\overline{n}\right|^2 = 9 - 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{3} + 1 = 7.$$

$$\left|\vec{d_1}\right| = \sqrt{7}$$

$$\overline{d_2}^2 = (\overline{m} + 3\overline{n}) \cdot (\overline{m} + 3\overline{n}) = \left|\overline{m}\right|^2 + 6\left|\overline{m}\right| \cdot \left|\overline{n}\right| \cos\left(\overline{m} \,\hat{}\, \overline{n}\right) + 9\left|\overline{n}\right|^2 = 13.$$

$$\left|\vec{d_2}\right| = \sqrt{13}$$

§ 8. Скалярное произведение векторов.

Доказательство ортогональности векторов

Пример 5. При каком значении α ортогональны вектора $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$ и $\overline{a} = 2\overline{i} + \alpha\overline{j} + 2\overline{k}.$

Решение

Принимая во внимание условие ортогональности двух векторов $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0,$ получим $1 \cdot 2 + 2 \cdot \alpha + 1 \cdot 2 = 0.$ $\alpha = -2$

5) Задачи с механическим содержанием

Пример 6. Даны три постоянные силы $\overline{F_1}\{5; 3; -2\}$, $\overline{F_2}\{2; -4; 6\}$, $\overline{F_3}\{1; 7; 3\}$, приложенные в одной точке. Найти работу равнодействующей этих сил на прямолинейном перемещении из положения $M_1(4,4,6)$ в положение $M_2(7,5,2)$.

Решение

Равнодействующая сила $\overline{F} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3} = 8\overline{i} + 6\overline{j} + 7\overline{k}.$

Вектор перемещения $\overline{S} = \overline{M_1M_2}\{3, 1, -4\}.$

Искомая работа $A = \overline{F} \cdot \overline{S} = 8 \cdot 3 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot (-4) = 2.$

§ 9. Векторное произведение векторов.

Введем еще одну операцию над векторами. Эта операция существует только в трехмерном векторном пространстве, на плоскости она не определена.

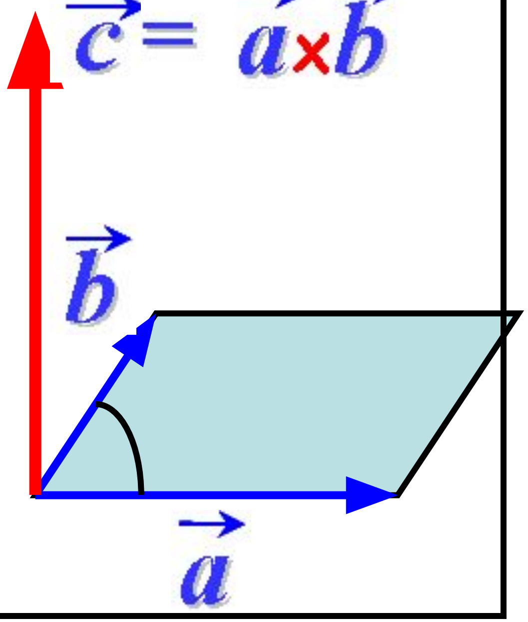
Векторным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a} \times \vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий трем требованиям:

1) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$

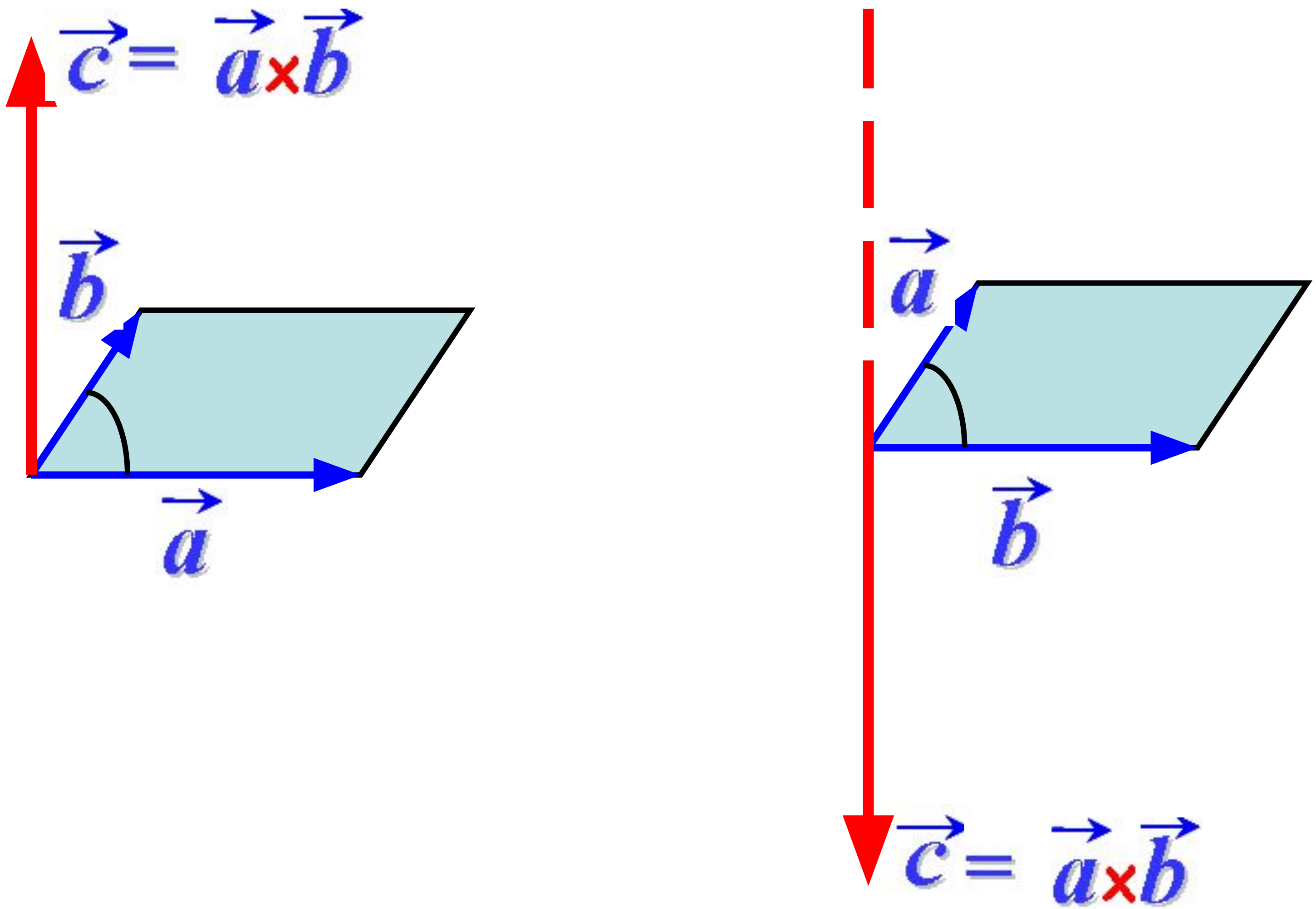
2) $\vec{c} \perp (\vec{a}, \vec{b})$

3) Тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ является правой.

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$



§ 9. Векторное произведение векторов.



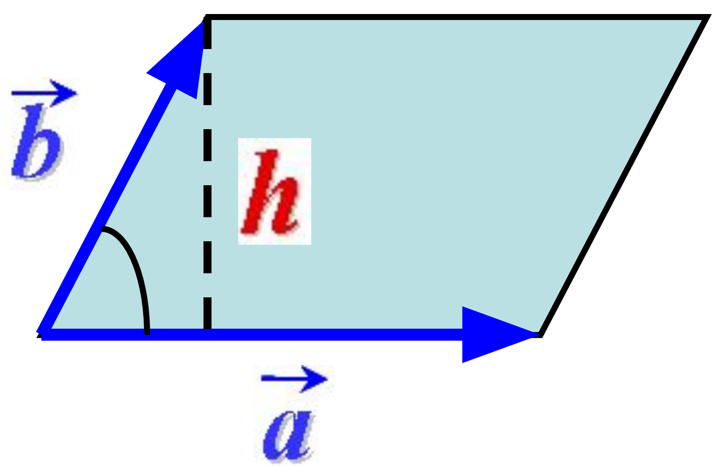
§ 9. Векторное произведение векторов.

Геометрический смысл векторного произведения.

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$$

$$|\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = h$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot h = S$$



Для неколлинеарных векторов модуль их векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

§ 9. Векторное произведение векторов.

Свойства векторного произведения:

$$1)\quad \overline{a}\times\overline{b} = -\overline{b}\times\overline{a}.$$

Свойство очевидно, так как синус – функция нечетная.

2) ***Свойство сочетательности относительно скалярного множителя:***

$$\lambda\left(\overline{a}\times\overline{b}\right) = \left(\lambda\overline{a}\right)\times\overline{b} = \overline{a}\times\left(\lambda\overline{b}\right).$$

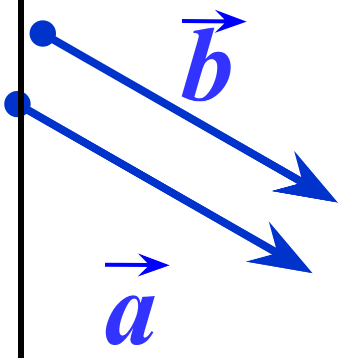
3) Распределительное свойство относительно сложения векторов:

$$\overline{a}\times\left(\overline{b}+\overline{c}\right) = \overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c},$$

$$\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\times\left(\overline{c}+\overline{d}\right) = \overline{a}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{c}+\overline{a}\times\overline{d}+\overline{b}\times\overline{d}.$$

§ 8. Векторное произведение векторов.

Если вектора коллинеарные, то



$$\widehat{\vec a\,\vec b} = 0^0, 180^0$$

$$|\vec a\times\vec b| = |\vec a|\cdot|\vec b|\,\sin 0^0 = 0$$

Признак коллинеарности векторов:
Для того чтобы два ненулевых вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение было бы равно нулю.

В частности, имеем для ортов:

$$\vec i\times\vec i=\vec j\times\vec j=\vec k\times\vec k = 0$$

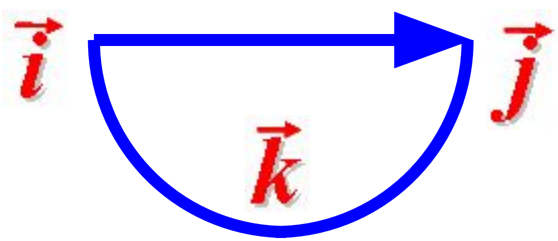
§ 9. Векторное произведение векторов.

Рассмотрим векторные произведения различных ортов.

Очевидно, что векторное произведения двух различных ортов будет равно третьему орту, взятому:

- **со знаком +, если тройка ортов правая;**
- **со знаком –, если тройка ортов левая.**

Если векторы правой тройки изменять непрерывно, то в любой момент такой деформации эта тройка векторов будет оставаться правой тройкой.



Тогда $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ $\quad$ $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$

$$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

Если векторы левой тройки изменять непрерывно, то в любой момент такой деформации эта тройка векторов будет оставаться левой тройкой.

Тогда $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$ $\quad$ $\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$

$$\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$$

§ 9. Векторное произведение векторов.

Выразим теперь векторное произведение через координаты векторов, его составляющих.

$$\bar{a}\times\bar{b}=\left(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}\right)\times\left(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}\right)=$$

$$=a_xb_x\bar{i}\times\bar{i}+a_yb_x\bar{j}\times\bar{i}+\ a_zb_x\bar{k}\times\bar{i}+a_xb_y\bar{i}\times\bar{j}+a_yb_y\bar{j}\times\bar{j}+\ a_zb_y\bar{k}\times\bar{j}+$$

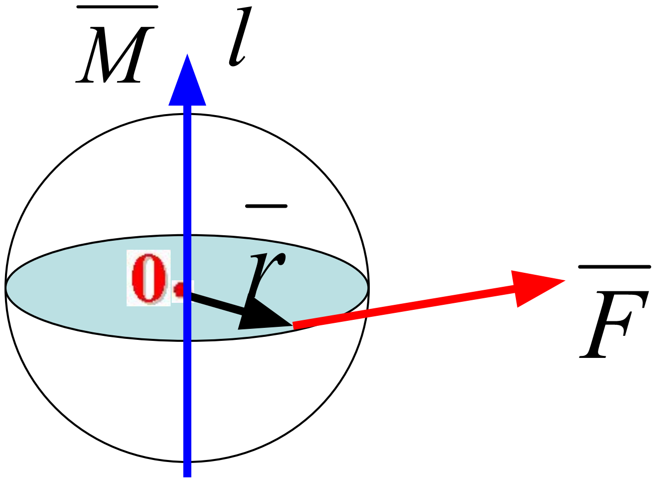
$$+a_xb_z\bar{i}\times\bar{k}+\ a_yb_k\bar{j}\times\bar{k}+\ a_zb_z\bar{k}\times\bar{k}=$$

$$=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\bar{i}\ -\left(a_xb_z-a_zb_x\right)\bar{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\bar{k}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

§ 9. Векторное произведение векторов.

Векторное произведение имеет простую механическую интерпретацию.



Если сила $\overline{F}$ **поворачивает тело вокруг оси** l, **то момент** $\overline{M}$ **силы** $\overline{F}$ **относительно т. О, равен**

$$\overline{M} = \overline{r} \times \overline{F}.$$

§ 9. Векторное произведение векторов.

Векторное произведение двух векторов позволяет решить следующие задачи векторной алгебры.

1) Нахождение площади параллелограмма и треугольника

Действительно, площадь параллелограмма, сторонами которого служат векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, равна модулю их векторного произведения

$$S_{\text{пар}} = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right|,$$

а площадь треугольника со сторонами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ вычисляется по формуле

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|.$$

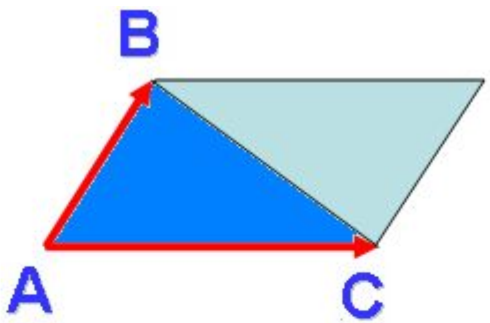
§ 9. Векторное произведение векторов.

Пример 1.

Найти площадь треугольника с вершинами в точках

$$A(0,1,2),\ B(0,4,-1),\ C(2,1,-1).$$

Решение



$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|,$$

$$\overline{AB}\{0,\ 3,\ -3\}; \qquad \overline{AC}\{2,\ 0,\ -3\}.$$

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \{-9,-6,-6\},$$

$$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \sqrt{81+36+36} = \sqrt{153},$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \frac{\sqrt{153}}{2} \approx 6{,}18$$

§ 9. Векторное произведение векторов.

Пример 2. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{2a}+\bar{b}$ и $\bar{b}$, если известно, что $|\bar{a}|=1,\ |\bar{b}|=2,\ \left(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b}\right)=\dfrac{\pi}{6}.$

Решение

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\left(2\bar{a}+\bar{b}\right)\times\bar{b}\right|,$$

$$\left(2\bar{a}+\bar{b}\right)\times\bar{b}=2\bar{a}\times\bar{b}+\bar{b}\times\bar{b}=2\bar{a}\times\bar{b},$$

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|2\bar{a}\times\bar{b}\right|=\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|\sin\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=2\sin\frac{\pi}{6}=1.$$

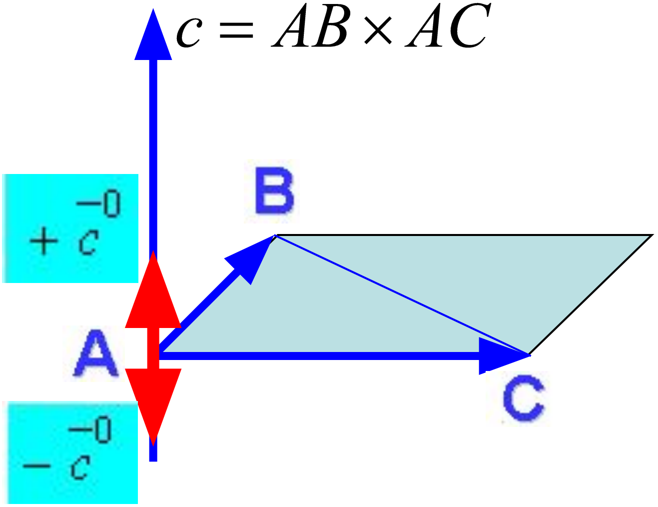
§ 9. Векторное произведение векторов.

2) Нахождение векторов, перпендикулярных данной плоскости

Пример 3. Найти единичный вектор, перпендикулярный к плоскости, в которой лежат точки $A(0,1,2),\ B(0,4,-1),\ C(2,1,-1).$

Решение

$$\bar{c} = \overline{AB} \times \overline{AC}$$



В силу определения векторного произведения векторов

$$\bar{c} = \overline{AB} \times \overline{AC}.$$

$$\overline{AB}\{0,\ 3,\ -3\},\quad \overline{AC}\{2,\ 0,\ -3\},$$

$$\bar{c} = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \{-9,\ -6,\ -6\},$$

Поставленной задаче удовлетворяют два единичных вектора

$$\pm \bar{c}^{0} = \pm \frac{-9\bar{i} - 6\bar{j} - 6\bar{k}}{\sqrt{153}}.$$

§ 9. Векторное произведение векторов.

3) Доказательство коллинеарности векторов

Пример 4. Коллинеарны ли векторы $\bar{c}_1 = \bar{a} - \bar{b}$ и $\bar{c}_2 = 2\bar{a} + \bar{b}$, построенные по векторам $\bar{a}\{2, 1, 1\}$ и $\bar{b}\{0, 3, 1\}$?

Решение

Условие коллинеарности: $\overline{c_1} \times \overline{c_2} = 0.$ $\quad \bar{c}_1\{2, -2, 0\}$, $\quad \bar{c}_2\{4, 5, 3\}$.

$$\overline{c_1} \times \overline{c_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -6\bar{i} - 6\bar{j} + 18\bar{k} \neq 0,$$

т. е. вектора неколлинеарны.

4) Задачи механического содержания

Пример 5. Сила $\bar{F}\{4; 2; 1\}$ приложена в точке $B\{3; 2; 4\}$. Найти момент этой силы относительно точки $A\{5; -1; 6\}$.

Решение

$$\overline{AB}\{-2; 3; -2\}, \quad \overline{M}_A(\overline{F}) = \overline{AB} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7\bar{i} - 6\bar{j} - 16\bar{k}.$$

§ 10. Смешанное произведение векторов.

Определение 1.

Смешанным произведением ненулевых векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называется скалярное произведение вектора $\bar{a}$ и векторного произведения вектора $\bar{b}$ на вектор $\bar{c}$, т. е. выражение

$$\bar{a} \cdot \left(\bar{b} \times \bar{c}\right).$$

Свойства смешанного произведения:

1) Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке перемножаемых векторов.

$$\bar{a} \cdot \left(\bar{b} \times \bar{c}\right) = \bar{b} \cdot \left(\bar{c} \times \bar{a}\right) = \bar{c} \cdot \left(\bar{a} \times \bar{b}\right).$$

2) При перестановке двух соседних векторов модуль смешанного произведения не меняется, а знак меняется на противоположный, т. к. тройка меняет свою ориентацию.

$$\bar{a} \cdot \left(\bar{b} \times \bar{c}\right) = -\bar{a} \cdot \left(\bar{c} \times \bar{b}\right)$$

3) $\bar{a} \cdot \left(\bar{b} \times \bar{c}\right) = \bar{c} \cdot \left(\bar{a} \times \bar{b}\right) = \left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c},$ т.е. порядок знаков умножения не важен.

Поэтому принято смешанное произведение обозначать $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}.$

§ 10. Смешанное произведение векторов.

Выразим теперь смешанное произведение через координаты векторов, его составляющих.

$$\bar{b}\times\bar{c}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix},\quad \text{или}\quad \bar{b}\times\bar{c}=\left\{\begin{vmatrix}b_y & b_z\\ c_y & c_z\end{vmatrix};\begin{vmatrix}b_z & b_x\\ c_z & c_x\end{vmatrix};\begin{vmatrix}b_x & b_y\\ c_x & c_y\end{vmatrix}\right\}.$$

$$\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)=a_x\begin{vmatrix}b_y & b_z\\ c_y & c_z\end{vmatrix}+a_y\begin{vmatrix}b_z & b_x\\ c_z & c_x\end{vmatrix}+a_z\begin{vmatrix}b_x & b_y\\ c_x & c_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

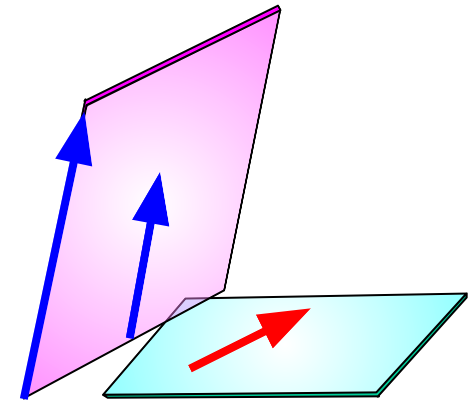
$$\boxed{\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.}$$

§ 10. Смешанное произведение векторов.

Теорема 1. Смешанное произведение векторов равно нулю тогда и только тогда, когда вектора $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарны.

Доказательство.

Необходимость. $\overline{a} \cdot \left(\overline{b} \times \overline{c}\right) = 0.$

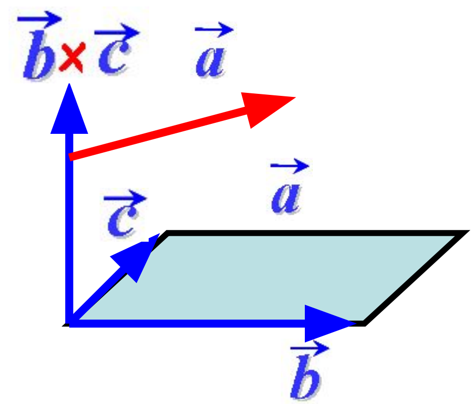


Возможны два случая.

1) $\overline{b} \times \overline{c} = 0,$ т.е. вектора коллинеарны,

а три вектора, два из которых коллинеарны, всегда компланарны.

2) $\overline{b} \times \overline{c} \neq 0,$ но $\overline{a} \cdot \left(\overline{b} \times \overline{c}\right) = 0.$



Тогда $\overline{a} \perp \left(\overline{b} \times \overline{c}\right).$

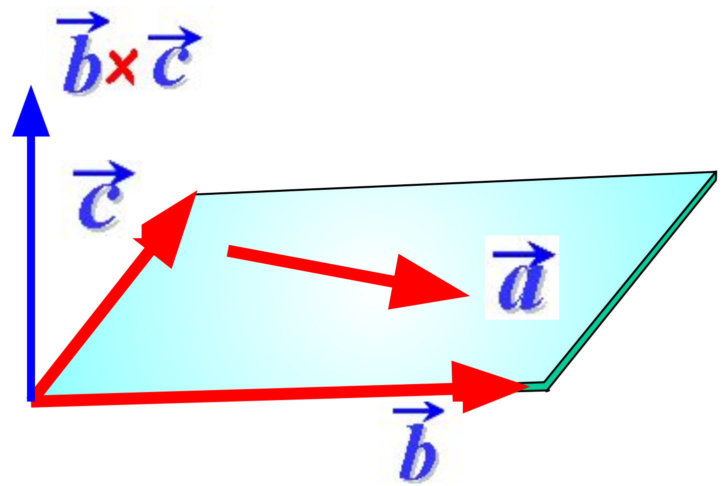
Это значит, что три вектора лежат в одной плоскости.

§ 10. Смешанное произведение векторов.

Достаточность.

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ - компланарны.

Тогда их можно поместить в одной плоскости.



Вектор $\vec{b}\times\vec{c}$ перпендикулярен плоскости, а, следовательно, и $\vec{a}$

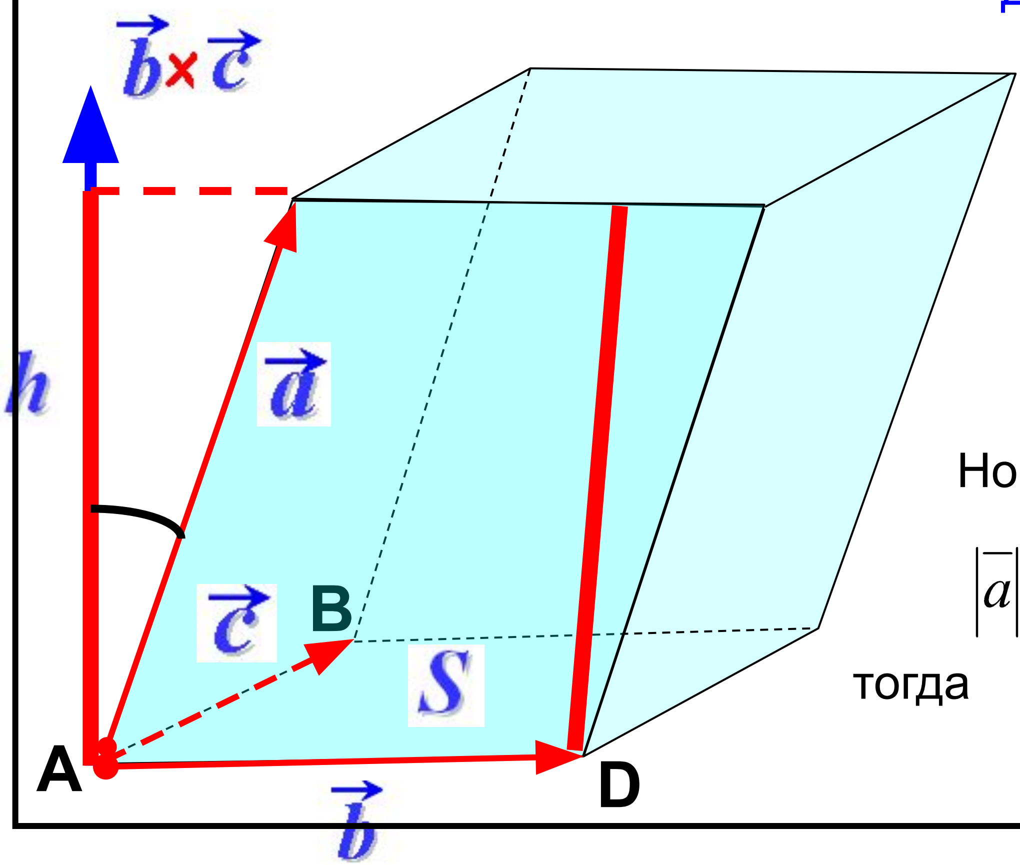
Тогда по правилам скалярного произведения $\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)=0.$

§ 10. Смешанное произведение векторов.

Установим геометрический смысл смешанного произведения векторов.

Теорема 2. Смешанное произведение $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ некомпланарных векторов равно объему параллелепипеда, сторонами которого служат эти вектора, взятому со знаком +, если тройка векторов правая, и со знаком - , если тройка левая.

Доказательство.



$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c}) =$$

$$= |\overline{a}|\cdot|\overline{b}\times\overline{c}|\cdot\cos(\overline{a},\widehat{\overline{b}\times\overline{c}}) =$$

$$= |\overline{a}|\cdot\cos(\overline{a},\overline{b}\times\overline{c})\cdot|\overline{b}\times\overline{c}|.$$

Но

$$|\overline{a}|\cdot\cos(\overline{a},\overline{b}\times\overline{c}) = \pm h, \quad |\overline{b}\times\overline{c}| = S,$$

тогда

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \pm S\cdot h = \pm V.$$

§ 10. Смешанное произведение векторов.

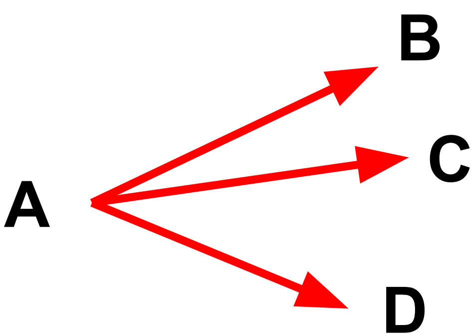
Смешанное произведение трех векторов позволяет решить следующие задачи векторной алгебры:

1) Доказательство компланарности (линейной зависимости) трех векторов

Пример 1. Показать, что точки *A*(1, 2, 1), *B*(3, 3, 3), *C*(4, 1, 2) и *D*(5, 4, 5) лежат в одной плоскости.

Решение

$$\overline{AB}\{2;1;2\},\ \overline{AC}\{3;-1;1\},\ \overline{AD}\{4;2;4\}.$$



Если точки *A, B, C* и *D* лежат в одной плоскости, то и вектора лежат в одной плоскости, а тогда смешанное произведение этих векторов равно нулю.

$$\left(\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD}\right)=\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 1\\ 4 & 2 & 4\end{vmatrix}=0.$$

Следовательно, точки лежат в одной плоскости.

§ 10. Смешанное произведение векторов.

Пример 2. Доказать, что вектора $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = 3\bar{i} + 4\bar{j} + \bar{k}$ и $\bar{c} = \bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$ линейно зависимы и найти эту линейную зависимость.

Решение

$$\left(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, векторы компланарны, а значит, они линейно зависимы,

т. е. существуют константы λ, μ и ν такие, что $\lambda\bar{a} + \mu\bar{b} + \nu\bar{c} = 0.$

$$\lambda\left(\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}\right) + \mu\left(3\bar{i} + 4\bar{j} + \bar{k}\right) + \nu\left(\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}\right) = 0,$$

$$\left(\lambda + 3\mu + \nu\right)\bar{i} + \left(\lambda + 4\mu + 2\nu\right)\bar{j} + \left(2\lambda + \mu - 3\nu\right)\bar{k} = 0.$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda + 3\mu + \nu = 0 \\ \lambda + 4\mu + 2\nu = 0 \\ 2\lambda + \mu - 3\nu = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \lambda + 3\mu + \nu = 0 \\ \mu + \nu = 0 \\ -5\mu - 5\nu = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \lambda + 3\mu + \nu = 0 \\ \mu = -\nu \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda - 3\nu + \nu = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda = 2\nu \\ \mu = -\nu \end{matrix}$$

Данная система имеет бесчисленное множество решений.

$$\lambda\bar{a} + \mu\bar{b} + \nu\bar{c} = 2\nu\bar{a} - \nu\bar{b} + \nu\bar{c} = 0.$$

откуда получим искомую линейную зависимость: $2\bar{a} - \bar{b} + \bar{c} = 0$

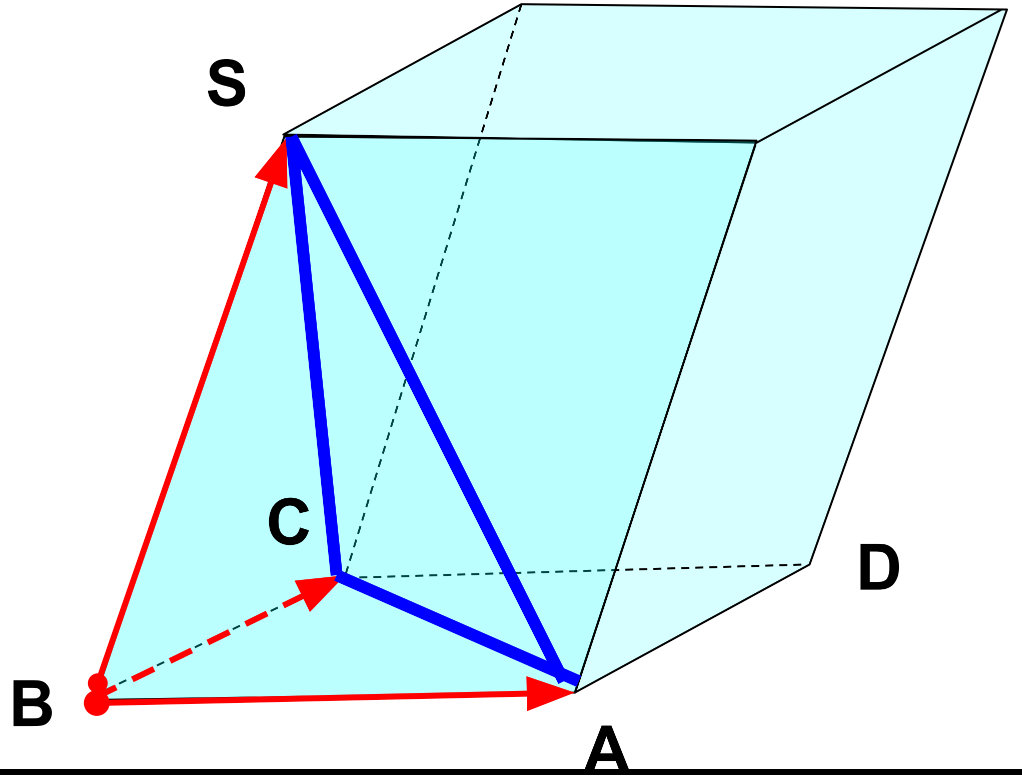
§ 10. Смешанное произведение векторов.

2) Нахождение объема параллелепипеда и тетраэдра

Объем параллелепипеда вычисляется по формуле $V = S_{ABCD} \cdot h$,

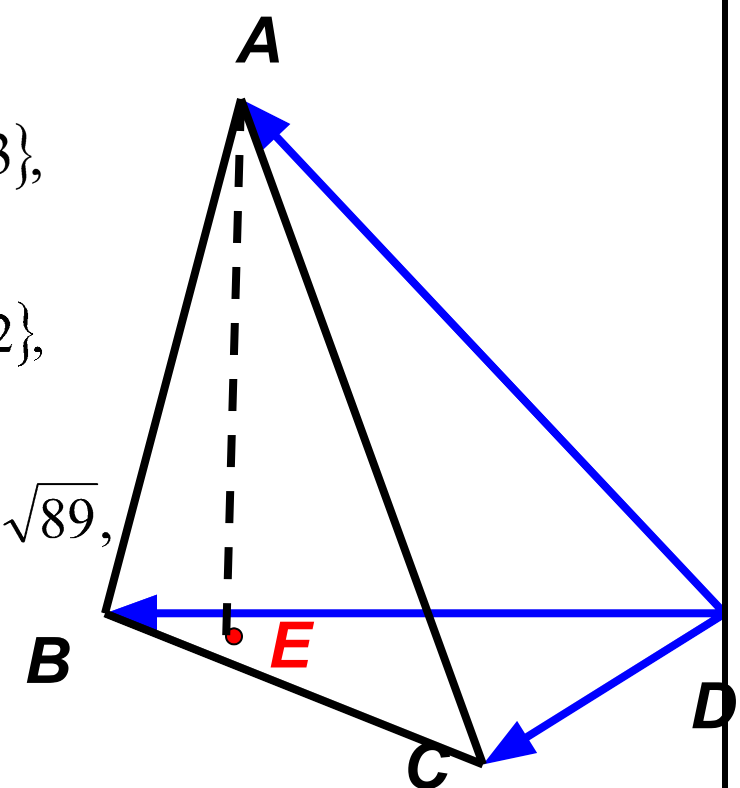
а объем пирамиды – $V_{\text{пир}} = \dfrac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot h$. Так как $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} S_{ABCD}$, то

$V_{\text{пир}} = \dfrac{1}{6} V$.



§ 10. Смешанное произведение векторов.

Пример 3. В пирамиде *ABCD* найти высоту, опущенную из ршины *A*, если в прямоугольной декартовой системе координат $A(2, 1, 0),\ B(2, -1, 2),\ C(0, 1, 3),\ D(-1, 1, 0).$



Решение

$$\overline{DA}\{3, 0, 0\},\quad \overline{DB}\{3, -2, 2\}\quad \overline{DC}\{1, 0, 3\},$$

$$\overline{DB}\times\overline{DC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \{-6, -7, 2\},$$

$$S = \frac{1}{2}\left|\overline{DB}\times\overline{DC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + (-7)^2 + 2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{89},$$

$$V = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6}|-18| = |-3|.$$

Знак «–» показывает, что тройка векторов левая.

$$H = \frac{3\cdot V}{S} = \frac{3\cdot 3}{\sqrt{89}/2} \approx 1{,}91.$$