Рациональные уравнения

Вишняков А.Ю.

2008год

В данной презентации достаточно полно изложена теория решения различных видов рациональных уравнений,
за исключением линейных и квадратных уравнений, а также общей теории решения уравнений 3-й и 4-й степеней.
Нет здесь и примеров, решаемых с помощью теоремы Безу.
Каждый вид уравнения сопровождается решением соответствующего примера.
Данные материалы могут быть использованы частично на уроках алгебры в обычных классах,
но в большей мере пригодятся для изучения этой темы в классах с углубленным изучением математики.

Рациональные уравнения

Целые

- Способ подстановки
- распадающиеся
- $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$
- Однородное 2-го порядка

Дробные

- возвратные
- биквадратные
- симметричные 3-го3-го и 4-го порядка
- $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$

end

Рациональные уравнения

Целые

Дробные

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0$$

Сумма двух и более дробей

$$a\frac{P(x)}{Q(x)}+b\frac{Q(x)}{P(x)}+c=0$$

$$\frac{px}{ax^2+bx+c}+\frac{qx}{ax^2+dx+c}=r,(r\neq 0)$$

end

Способ подстановки

- При решении некоторых целых рациональных уравнений есть смысл ввести новую переменную величину, обозначив некоторое рациональное выражение новой буквой.
- Например, в уравнении $a\cdot P^2(x)+b\cdot P(\mathrm{x})+c=0$ где $P(x)$ – многочлен, удобно ввести новую переменную $y=P(x)$, решить полученное квадратное уравнение $ay^2+by+c=0$ относительно y и, наконец, решить уравнение $P(x)=y_o$, где y_o – корень уравнения $ay^2+by+c=0$

Обратно в меню

Пример

Пример

- Решите уравнение $(x^2-5x+7)^2-2(x^2-5x+6)=1.$
- **Решение.** Введем новую переменную. Пусть

$$x^2-5x+7=y$$

Тогда получим уравнение

$$y^2-2(y-1)=1.$$

Находим корень $y = 1$ и делаем обратную подстановку.

$$x^2-5x+7=1 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=3. \end{array}\right.$$

Обратно в меню

Ответ: 2; 3.

Распадающееся уравнение

- Рациональное уравнение называется распадающимся, если его можно привести к виду $P(x)\cdot Q(\mathrm{x})=0$, где $P(x), Q(\mathrm{x})$ – рациональные выражения с переменной *x.*
- Для решения воспользуемся равносильным переходом

$$P(x)\cdot Q(\mathrm{x})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P(x)=0, \\ Q(\mathrm{x})=0. \end{array}\right.$$

- Применяемые приемы разложения на множители:

  - вынесение общего множителя за скобки;

  - способ группировки;

  -формулы сокращенного умножения.

Обратно в меню

Пример

Пример

- Решите уравнение $x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x = 0.$
- **Решение.** Разложим левую часть уравнения на множители:

$$(x^4 - x^3) - (4x^2 - 4x) = 0, \Leftrightarrow x^3(x-1) - 4x(x-1) = 0, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2-4) = 0, \Leftrightarrow x(x-1)(x-2)(x+2) = 0. \Leftrightarrow$$

Воспользуемся равносильным переходом:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x - 1 = 0, \\ x - 2 = 0, \\ x + 2 = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1, \\ x = 2, \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Ответ:-2;0;1;2.

Обратно в меню

Однородное уравнение 2-го порядка

$$aP^2(x)+bP(x)Q(x)+cQ^2(x)=0$$

- **При решении уравнения надо проверить две ситуации:**

1) $\begin{cases} P(x)=0, \\ Q(x)=0. \end{cases}$ т.е. корнями заданного уравнения являются решения этой системы.

2) Если $Q(x) \neq 0$**,** то после деления заданного уравнения на $Q^2(x)$ получим уравнение

$$a\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)^2+b\frac{P(x)}{Q(x)}+c=0,$$

которое подстановкой $\frac{P(x)}{Q(x)}=t$ сводится к квадратному уравнению $at^2+bt+c=0$

В ответ включают числа, полученные при рассмотрении обеих ситуаций.

Обратно в меню Пример

Пример

- **Решить уравнение**

$$(x^2-2x)^2-(x^2-2x)(x^2-x-2)-2(x^2-x-2)^2=0.$$

- **<u>Решение.</u>** Возможны две ситуации.
- Рассмотрим первую:

$$\begin{cases} x^2-2x=0, \\ x^2-x-2=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=2, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=2, \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x=2.$$

Найден первый корень уравнения $x=2$.

Обратно в меню

Продолжение решения

- Рассмотрим вторую ситуацию: разделим почленно заданное уравнение на $(x^2 - x - 2)^2$ при условии, что $x \neq -1$ и $x \neq 2$. Уравнение принимает вид

$$\left(\frac{x^2-2x}{x^2-x-2}\right)^2 - \frac{x^2-2x}{x^2-x-2} - 2 = 0.$$

Обозначим $t = \dfrac{x^2-2x}{x^2-x-2} = \dfrac{x}{x+1}$ и решим квадратное уравнение $t^2 - t - 2 = 0$. Получаем $t_1 = -1$, $t_2 = 2$.

Обратная подстановка дает уравнения

$\dfrac{x}{x+1} = -1, \dfrac{x}{x+1} = 2,$ откуда $x = -0,5$ и $x = -2$.

С учетом обеих ситуаций получаем

ответ: - 0,5; -2; 2.

Обратно в меню

Биквадратное уравнение

- Уравнение имеет вид

$$ax^4+bx^2+c=0.$$

- Сделаем подстановку $x^2 = t$. Значит, $x^4 = t^2$.

Получаем квадратное уравнение

$$at^2+bt+c=0.$$

Находим значения t и, сделав обратную подстановку, находим корни исходного уравнения.

<u>Замечание.</u>

При решении биквадратного уравнения можно получить от 1 до 4-х корней или же это уравнение может совсем не иметь корней.

Обратно в меню
Пример

Пример

- Решите уравнение $x^4 – 3x^2 – 4 = 0$.
- **Решение.**

Сделаем подстановку $x^2 = t$. Получаем квадратное уравнение

$$t^2 – 3t – 4 = 0,$$

корни которого $t = -1$ и $t = 4$.

Обратная замена дает два уравнения $x^2 = -1$ и $x^2 = 4$, из которых первое уравнение не имеет корней, а корни второго уравнения -2 и 2.

Ответ: -2; 2.

Обратно в меню

Симметричное уравнение 3-го порядка

- Уравнение имеет вид

$$ax^3+bx^2+bx+a=0.$$

- Сгруппируем слагаемые: $a(x^3+1)+bx(x+1)=0.$

Применим формулу суммы кубов

$$a(x+1)(x^2-x+1)+bx(x+1)=0$$

и выполним разложение на множители

$$(x+1)(ax^2+(b-a)x+a)=0.$$

Получили распадающееся уравнение. Значит,

$$x+1=0 \quad \text{или} \quad ax^2+(b-a)x+a=0.$$

Решив эти два уравнения, найдем корни исходного уравнения.

Обратно в меню

Пример

Пример

- Решите уравнение $2x^3 – 3x^2 – 3x + 2 = 0$.
- **<u>Решение.</u>** Сгруппируем слагаемые парами и в каждой паре вынесем общий множитель за скобки:

$$2(x^3+1)–3x(x+1)=0.$$

Применим формулу суммы кубов и вынесем общий множитель (x+1):

$$2(x+1)(x^2 –x+1)– 3x(x+1)=0,$$

$$(x+1)(2x^2 –5x+2)=0.$$

Значит,

$x+1=0$ или $2x^2 –5x+2=0.$

Решив эти два уравнения, найдем корни исходного уравнения: *-1; 0,5; 2.*

Ответ: *-1; 0,5; 2.*

Обратно в меню

Симметричное уравнение 4-го порядка

- **Уравнение имеет вид**

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0.$$

- **Сгруппируем слагаемые и разделим обе части уравнения на x^2. Получаем**

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$$

Сделаем подстановку $x+\dfrac{1}{x}=t$ **, тогда** $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$

Получаем квадратное уравнение

$$a(t^2-2)+bt+c=0.$$

Находим значения *t* и делаем обратную подстановку.

Обратно в меню

Пример

Пример

- Решите уравнение $2x^4+3x^3-10x^2+3x+2=0.$
- **Решение.** Разделим обе части уравнения на $x^2 \neq 0$ и, удобно группируя, получим равносильное уравнение:

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-10=0.$$

Сделаем подстановку $x+\frac{1}{x}=t$, тогда $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2.$

Получаем квадратное уравнение $2t^2+3t-14=0$, корни которого 2 и -3,5.

Обратная подстановка дает два рациональных уравнения $x+\frac{1}{x}=2$ и $x+\frac{1}{x}=-\frac{7}{2}$, откуда и находим корни исходного уравнения.

Ответ: 1; $\frac{-7\pm\sqrt{33}}{4}$.

Обратно в меню

Возвратное уравнение

- Уравнение вида

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

где $a \neq 0, \quad b \neq 0$ и $\dfrac{e}{a} = \left(\dfrac{d}{b}\right)^2,$

называется возвратным уравнением четвертого порядка.

Это уравнение сводится к квадратному с помощью подстановки

$$t = x + \frac{d}{bx}$$

Обратно в меню

Пример

Пример

- Решить уравнение

$$x^4 + x^3 - 6x^2 - 2x + 4 = 0.$$

- **<u>Решение.</u>** Заметим, что $\left(\frac{4}{1}\right) = \left(\frac{-2}{1}\right)^2$ и, следовательно, данное уравнение есть возвратное уравнение четвертого порядка.

Так как $x = 0$ не является решением уравнения, разделим на x^2 и получим равносильное уравнение

$$x^2 + \frac{4}{x^2} + x - \frac{2}{x} - 6 = 0.$$

Обозначим $t = x - \frac{2}{x}$, тогда $x^2 + \frac{4}{x^2} = t^2 + 4,$

и уравнение примет вид $t^2 + t - 2 = 0$, корни которого $t_1 = -2$ и $t_2 = 1$. Делаем обратную замену и после умножения на $x \neq 0$ получаем два квадратных уравнения

$$x^2 + 2x - 2 = 0, \qquad x^2 - x - 2 = 0,$$

откуда и получим корни исходного уравнения.

Ответ: $-1 \pm \sqrt{3}; -1; 2.$

Обратно в меню

Уравнения вида $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$

- Если $a + b = c + d$, то это уравнение сводится к квадратному уравнению. Действительно,

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(x + c)(x + d) = x^2 + (c + d)x + cd =$$

$$= x^2 + (a + b)x + cd$$

- Обозначив $x^2 + (a + b)x = t,$ получим квадратное уравнение

$$(t + ab)(t + cd) = m$$

Из этого уравнения найдем значения t и, сделав обратную подстановку, закончим решение исходного уравнения.

Обратно в меню

Пример

Пример

- Решить уравнение

$$(x - 2)(x + 1)(x + 4)(x + 7) = 19.$$

- **Решение.** Заметим, что $-2 + 7 = 1 + 4$. Удобно группируя, получим

$$[(x - 2)(x + 7)]\cdot[(x + 1)(x + 4)] = 19$$

или

$$(x^2 + 5x - 14)(x^2 + 5x + 4) = 19.$$

Обозначим $t = x^2 + 5x - 14$, тогда $x^2 + 5x + 4 = t + 18$.

Уравнение примет вид

$$t(t + 18) = 19 \quad \text{или} \quad t^2 + 18t - 19 = 0,$$

откуда $t = -19$ и $t = 1$.

Сделав обратную подстановку, получим

$$x^2 + 5x - 14 = -19 \text{ и } \quad x^2 + 5x - 14 = 1.$$

Окончательный **ответ**: $\dfrac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}; \dfrac{-5 \pm \sqrt{85}}{2}.$

Обратно в меню

Уравнение вида $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$

- Используя подстановку $t = x + \frac{a+b}{2}$, уравнение можно свести к биквадратному уравнению относительно t.

Действительно, подставив в уравнение $x = t - \frac{a+b}{2}$, получим

$\left(t + \frac{a-b}{2}\right)^4 + \left(t - \frac{a-b}{2}\right)^4 = c.$ Обозначим $\frac{a-b}{2} = m$ и возведем каждое слагаемое в 4-ю степень. После приведения подобных получим биквадратное уравнение

$$2t^4 + 12m^2t^2 + (2m^4 - c) = 0.$$

Обратно в меню

Пример

Пример

- Решить уравнение

$$(x + 3)^4 + (x - 1)^4 = 82.$$

- **Решение.** Сделаем подстановку $t = x + \frac{3 + (-1)}{2} = x + 1$

Получим следующее уравнение относительно t:

$$(t + 2)^4 + (t - 2)^4 = 82$$

или

$$t^4 + 8t^3 + 24t^2 + 32t + 16 + t^4 - 8t^3 + 24t^2 - 32t + 16 - 82 = 0.$$

Откуда получим биквадратное уравнение

$$t^4 + 24t^2 - 25 = 0,$$

корни которого $t = \pm 1$.

Следовательно, $x + 1 = \pm 1$.

Значит, корни исходного уравнения

$x = -2$ и $x = 0$.

Ответ: -2;0.

Обратно в меню

Уравнение вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$

- Решить уравнение *P(x) = 0*.
- Для каждого корня уравнения $P(x) = 0$ сделать проверку: удовлетворяет ли он условию $Q(x) \neq 0$ или нет. Если да, то это — корень заданного уравнения, а если нет, то этот корень является посторонний для заданного уравнения и в ответ его включать не следует.

Обратно в меню Пример

Пример

- Решите уравнение $\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-2x}=0.$

- **Решение.**

Приравняем числитель дроби к нулю и решим полученное уравнение:

$$x^2-6x+8=0, \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=4. \end{array}\right.$$

Значение x = 2 не удовлетворяет условию $x^2-2x\neq 0.$ Следовательно, уравнение имеет один корень x= 4.

Ответ: 4.

Обратно в меню

Уравнение вида $a\frac{P(x)}{Q(x)}+b\frac{Q(x)}{P(x)}+c=0$

- **Подстановкой** $\frac{P(x)}{Q(x)}=t$ **это уравнение сводится к виду**

$$at+b\frac{1}{t}+c=0$$

- **Умножим на** $t\neq 0$ **и решим полученное квадратное уравнение относительно *t*.**

Остается сделать обратную подстановку $\frac{P(x)}{Q(x)}=t_0$, **где** t_o **- корень квадратного уравнения, и решить полученное уравнение относительно *x*.**

Обратно в меню Пример

Уравнение вида $a\dfrac{P(x)}{Q(x)}+b\dfrac{Q(x)}{P(x)}+c=0$

- **Подстановкой** $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=t$ **это уравнение сводится к виду**

$$at+b\frac{1}{t}+c=0$$

- **Умножим на** $t\neq 0$ **и решим полученное квадратное уравнение относительно *t*.**

Остается сделать обратную подстановку $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=t_0,$ **где t_o - корень квадратного уравнения, и решить полученное уравнение относительно *x*.**

Обратно в меню
Пример

Пример

- Решите уравнение $\dfrac{x}{2x+1}+\dfrac{2x+1}{x}=2.$
- **Решение.**

Сделаем подстановку $\dfrac{x}{2x+1}=t$ и решим полученное уравнение относительно t :

$$t+\frac{1}{t}=2,\Rightarrow t^2-2t+1=0,\Rightarrow t=1.$$

Обратная подстановка приводит к уравнению

$\dfrac{x}{2x+1}=1,$ корень которого x = -1.

Ответ: -1.

Обратно в меню

Уравнения, состоящие из суммы двух и более дробей

1-й способ

- Перенести все члены уравнения в одну часть.
- Привести уравнение к виду $\dfrac{P(x)}{Q(\mathrm{x})} = 0$ и найти корни полученного уравнения.

2-й способ

- Определить О.Д.З. уравнения.
- Умножить обе части уравнения на общий знаменатель дробей и получить целое уравнение.
- Найти корни полученного уравнения и проверить их соответствие О.Д.З.

Обратно в меню

Пример

Пример

- Решите уравнение $$\frac{2}{2-x}+\frac{1}{2}=\frac{4}{x(2-x)}$$

- **<u>Решение.</u>** Найдём О.Д.З. Знаменатели дробей не могут обращаться в нуль . Значит, О.Д.З. уравнения: $x \neq 2$ и $x \neq 0$.

  Перенесём члены из правой части уравнения в левую и приведём к общему знаменателю.

$$\frac{2\cdot 2x+x(2-x)-4\cdot 2}{2x(2-x)}=0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+6x-8}{2x(2-x)}=0.$$

.

Приравняем числитель дроби к нулю: $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Находим корни квадратного уравнения: $x = 4$ и $x = 2$.

Значение $x = 2$ не удовлетворяет О.Д.З.

Следовательно, уравнение имеет один корень $x= 4$.

Ответ: 4.

Обратно в меню

Уравнения вида

$$\frac{px}{ax^2+bx+c}+\frac{qx}{ax^2+dx+c}=r,(r\neq 0)$$

Данное уравнение сводится к квадратному уравнению заменой переменной

$$t=ax+\frac{c}{x}$$

Обратно в меню

Пример

Пример

- Решить уравнение $$\frac{2x}{2x^2-5x+3}+\frac{13x}{2x^2+x+3}=6.$$
- **Решение.** *О.Д.З.* уравнения есть множество $R\setminus\left\{1;1\frac{1}{2}\right\}.$

Поскольку $x=0$ не является решением данного уравнения, перепишем уравнение в виде

$$\frac{2}{2x-5+\frac{3}{x}}+\frac{13}{2x+1+\frac{3}{x}}=6$$

(разделим числитель и знаменатель каждой дроби на x).

Обозначим $t=2x+\frac{3}{x}$ и уравнение примет вид

$$\frac{2}{t-5}+\frac{13}{t+1}=6.$$

Обратно в меню

Продолжение решения

О.Д.З. полученного уравнения $t \neq 5$ и $t \neq -1$.

Решая это уравнение, приходим к квадратному уравнению

$$2t^2 - 13t + 11 = 0,$$

корни которого $t_1 = 1$ и $t_2 = 11/2$ удовлетворяют О.Д.З..

Делаем обратную подстановку и получаем два рациональных уравнения

$$2x + \frac{3}{x} = 1, \quad 2x + \frac{3}{x} = \frac{11}{2},$$

решив которые находим корни заданного уравнения.

Ответ: $\frac{3}{4}; 2.$

Обратно в меню

Литература

- Алгебра и математический анализ, 10 Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд
- Алгебра и начала анализа. 8 – 11 кл. Пособие для школ и классов с углубл. изучением математики (серия «Дидактические материалы»)
  Звавич Л.И., Шляпочник Л.Я., Чинкина М.В.