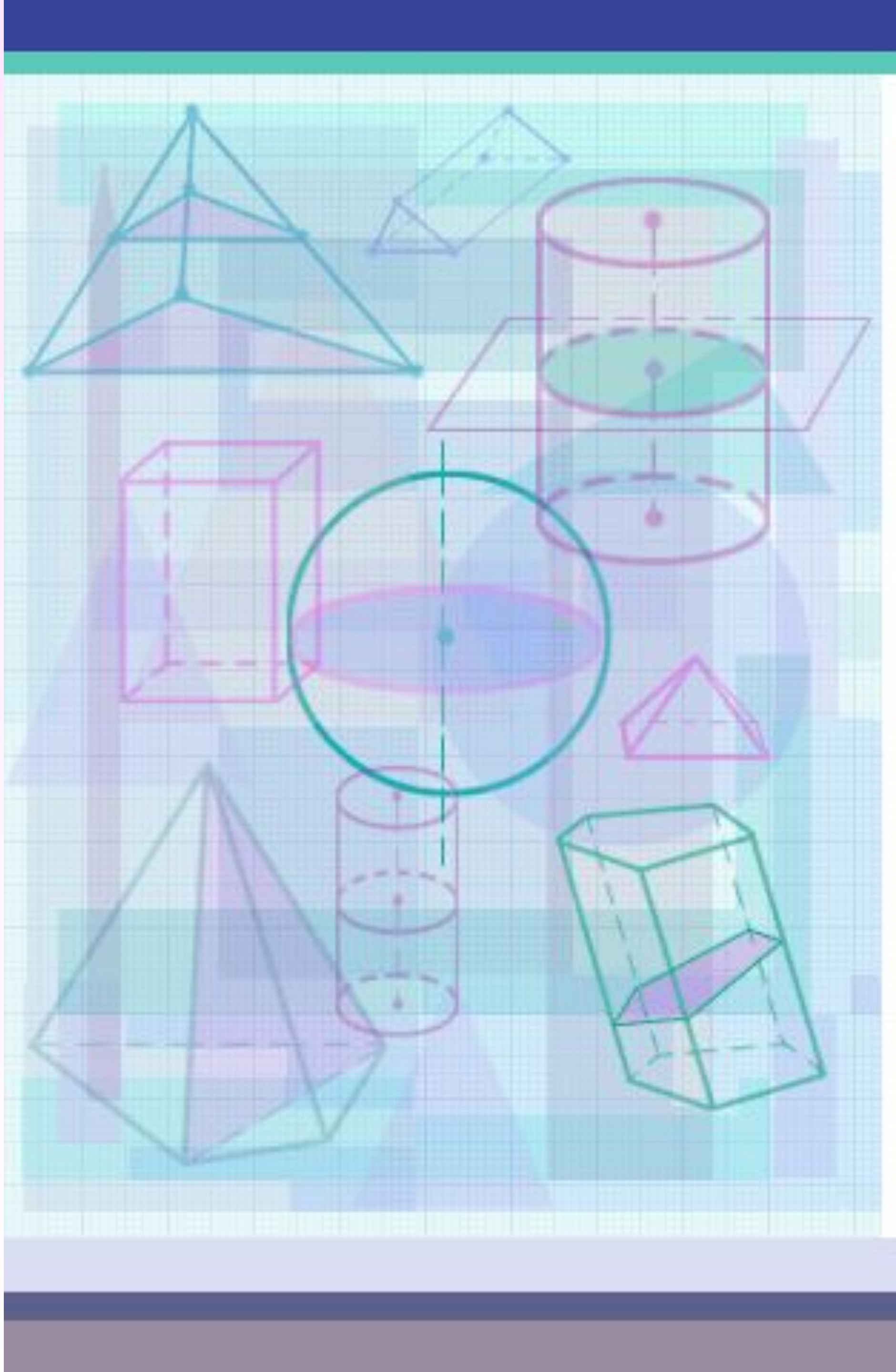
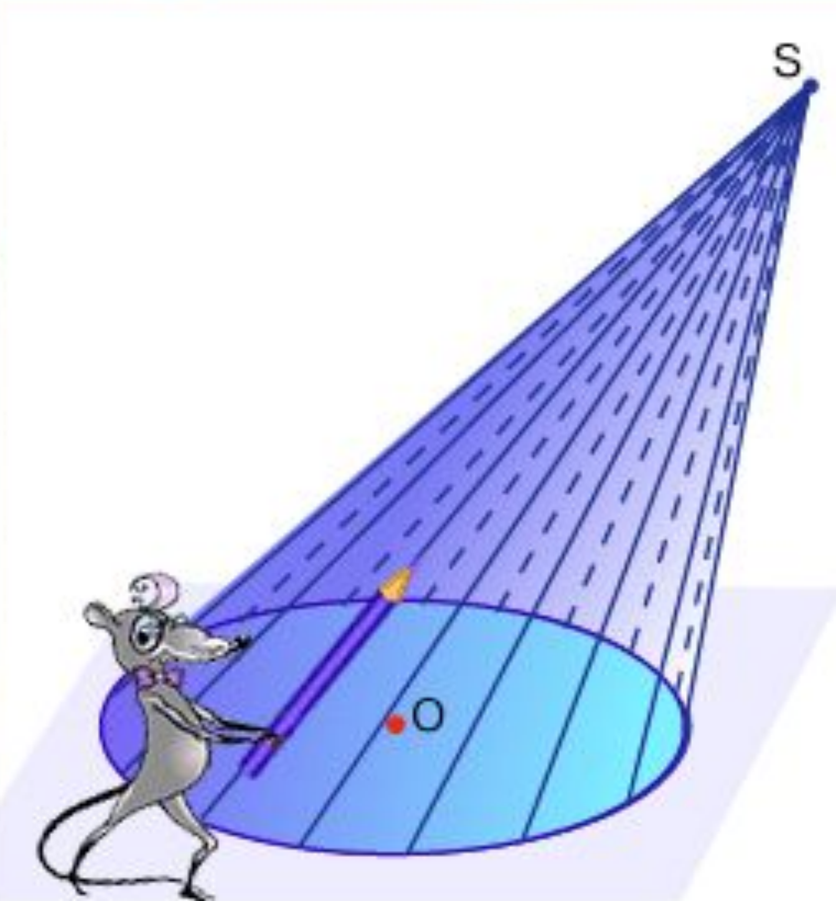
Определение конуса.

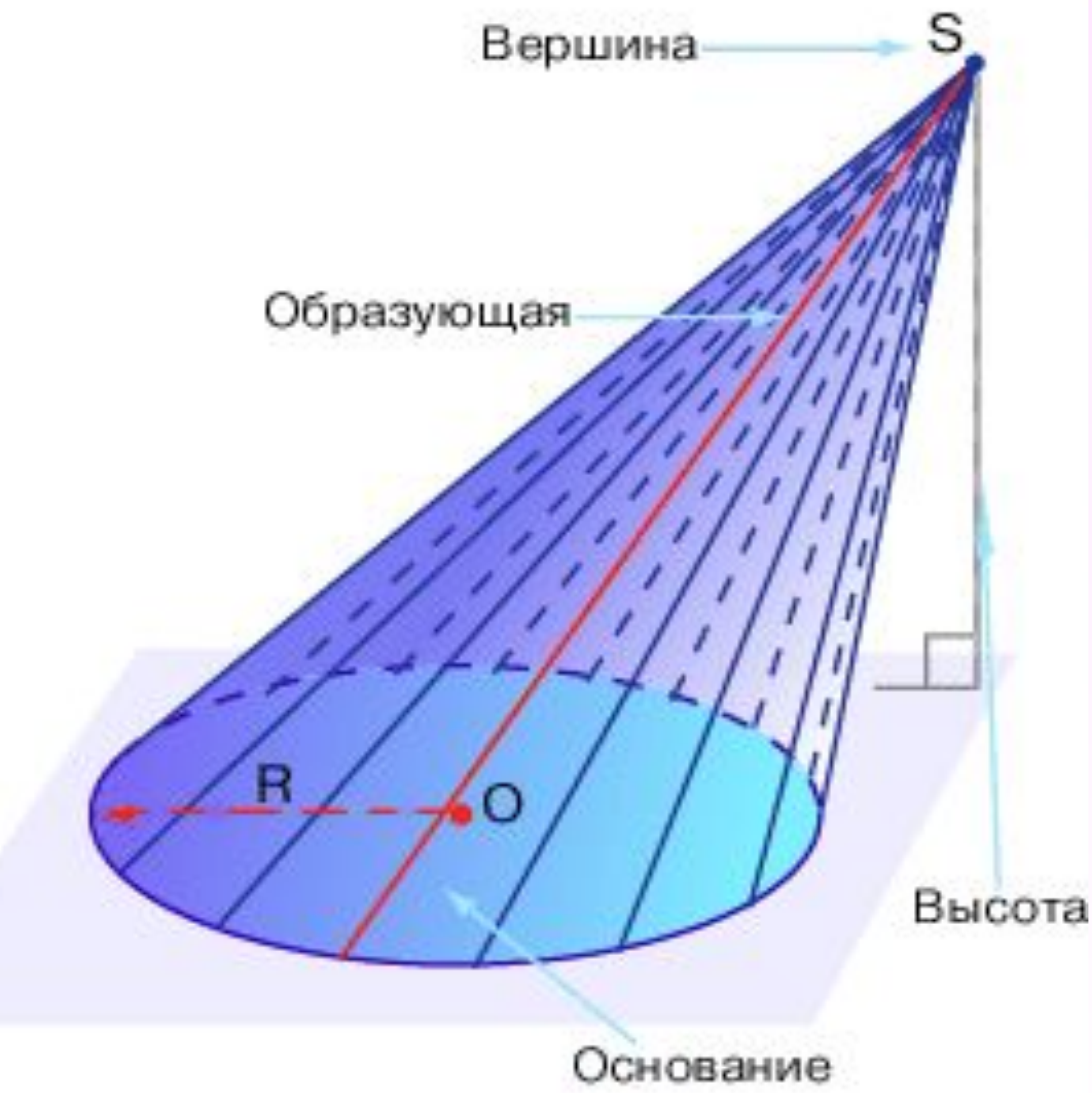
МОУ СОШ №256 г. Фокино



Круговым конусом называется тело ограниченное кругом – основанием конуса, и конической поверхностью, образованной отрезками, соединяющими точку, вершину конуса, со всеми точками окружности, ограничивающей основание конуса.

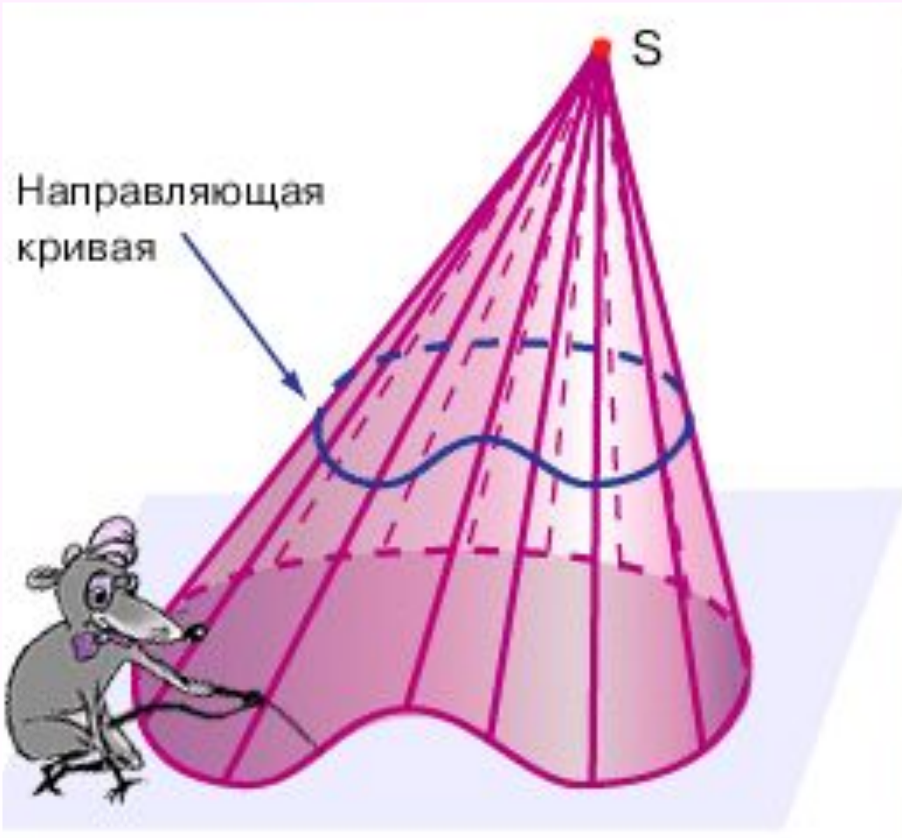


Элементы конуса.

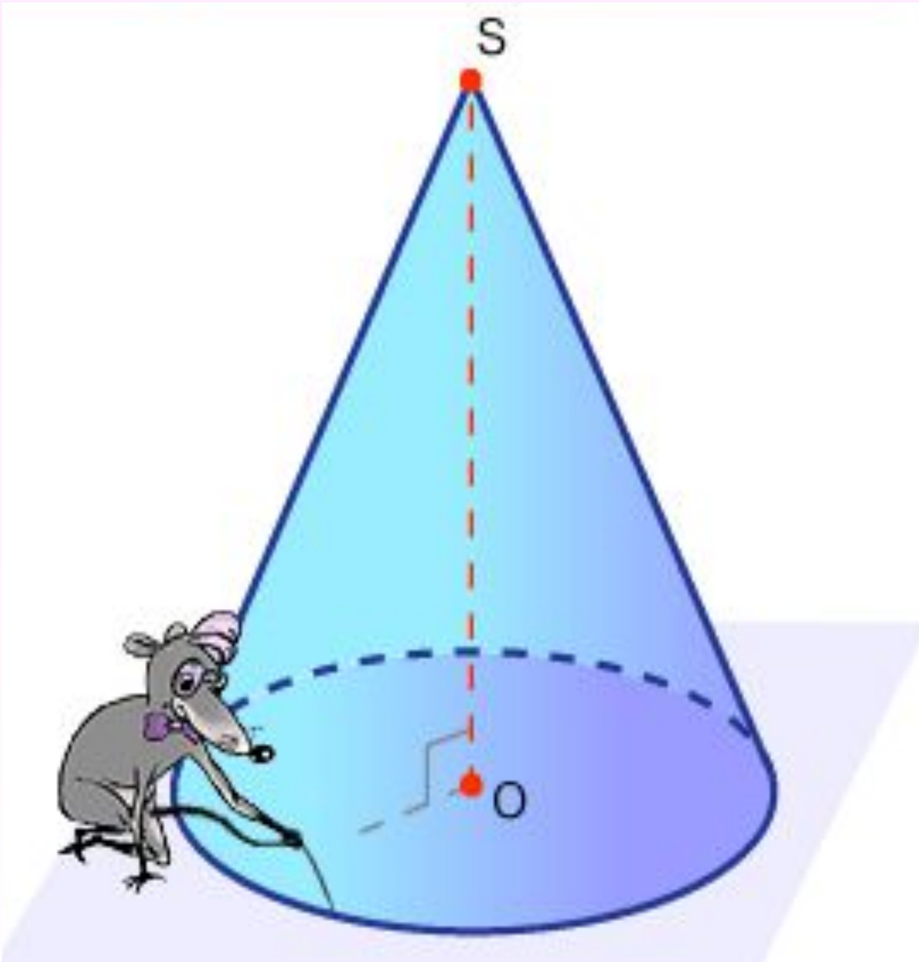


Круговой конус

Конус – это тело, которое получается, если коническую поверхность, образованную прямыми, соединяющими фиксированную точку со всеми точками какой–нибудь кривой, ограничить плоскостью.

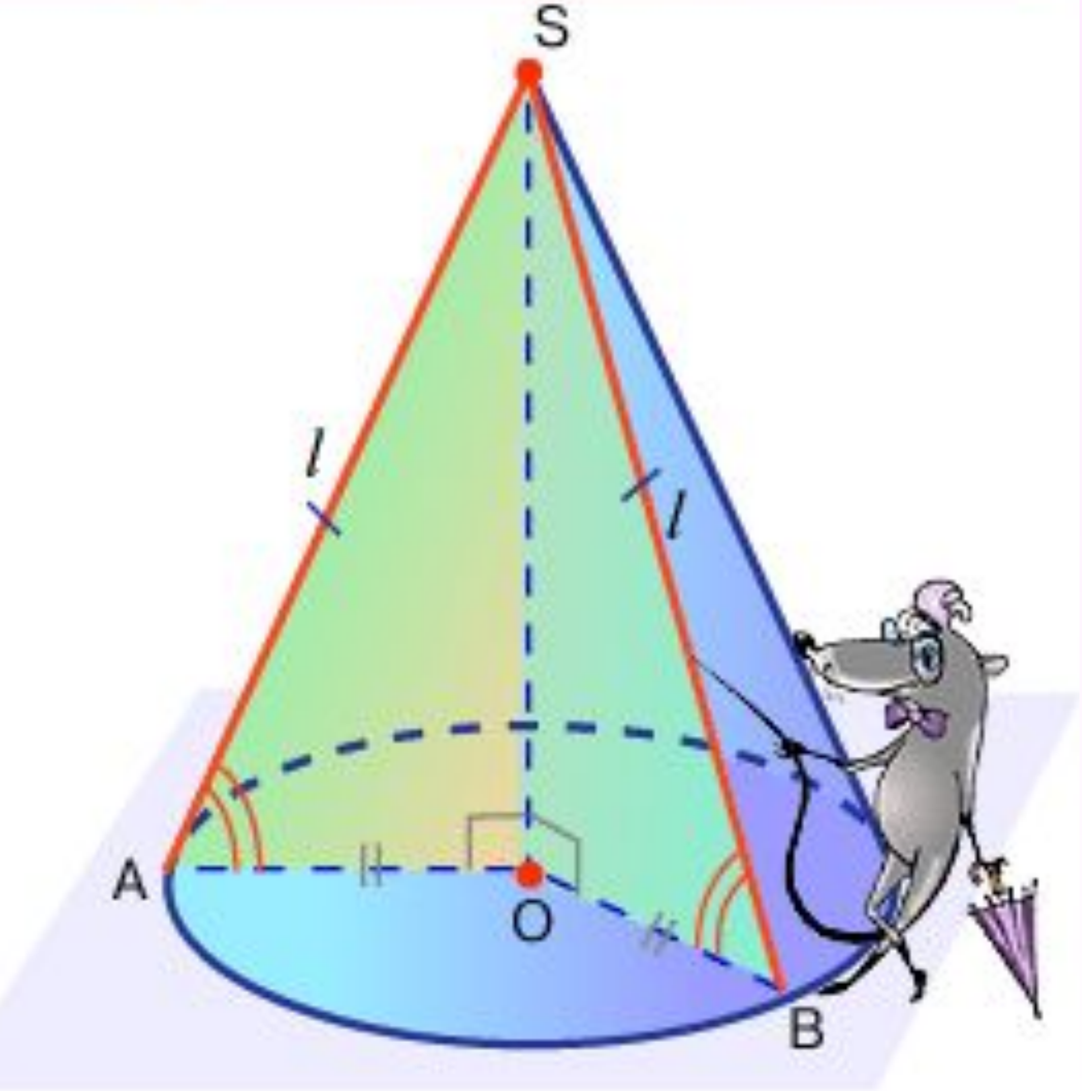


Прямой круговой конус.



Круговой конус называется ***прямым***, ***если его высота попадает в центр круга.***

Все образующие конуса равны между собой и составляют один угол с основанием.



$$\Delta SOA = \Delta SOB$$

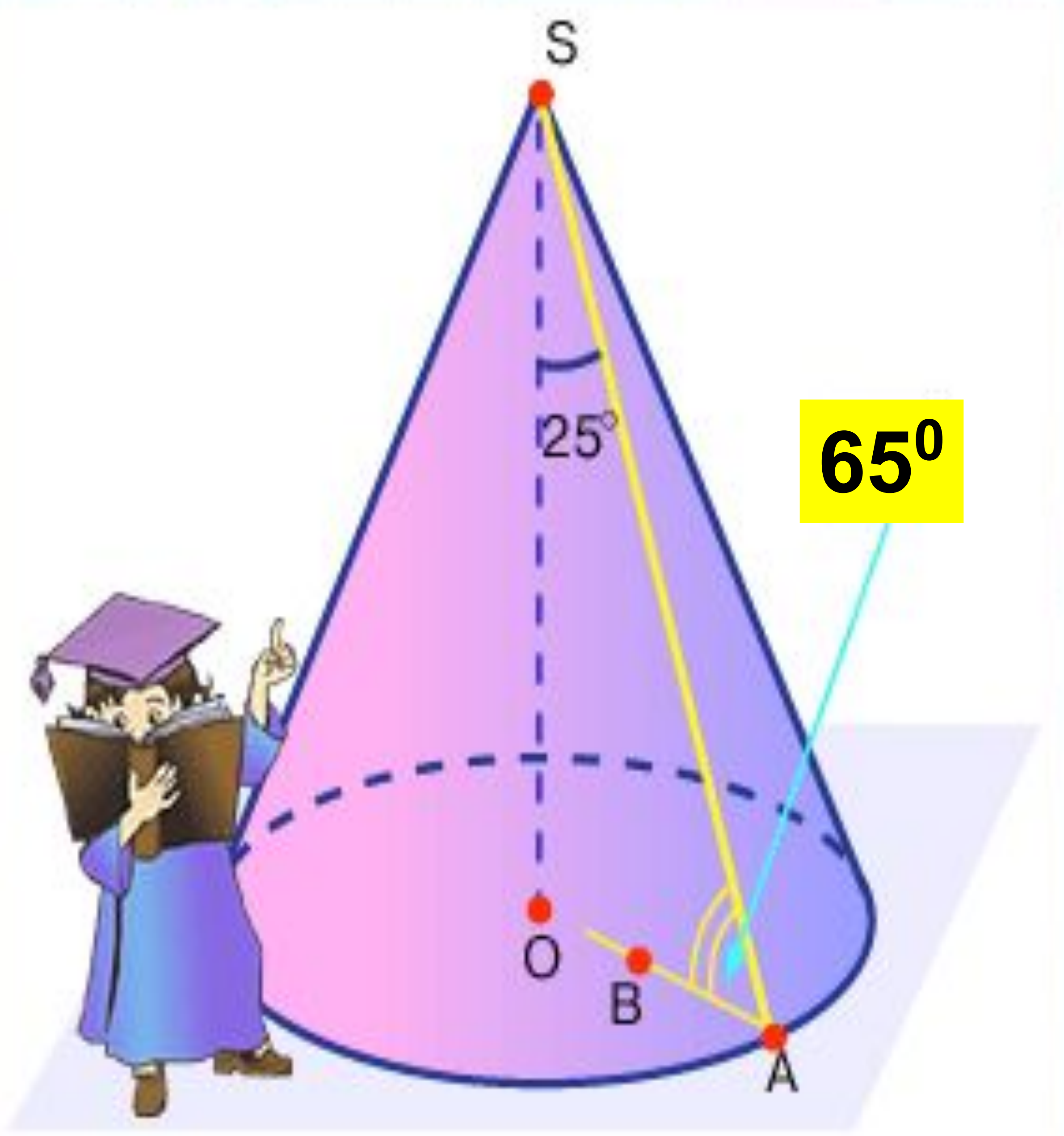
$$SA = SB = l$$

$$\Downarrow$$

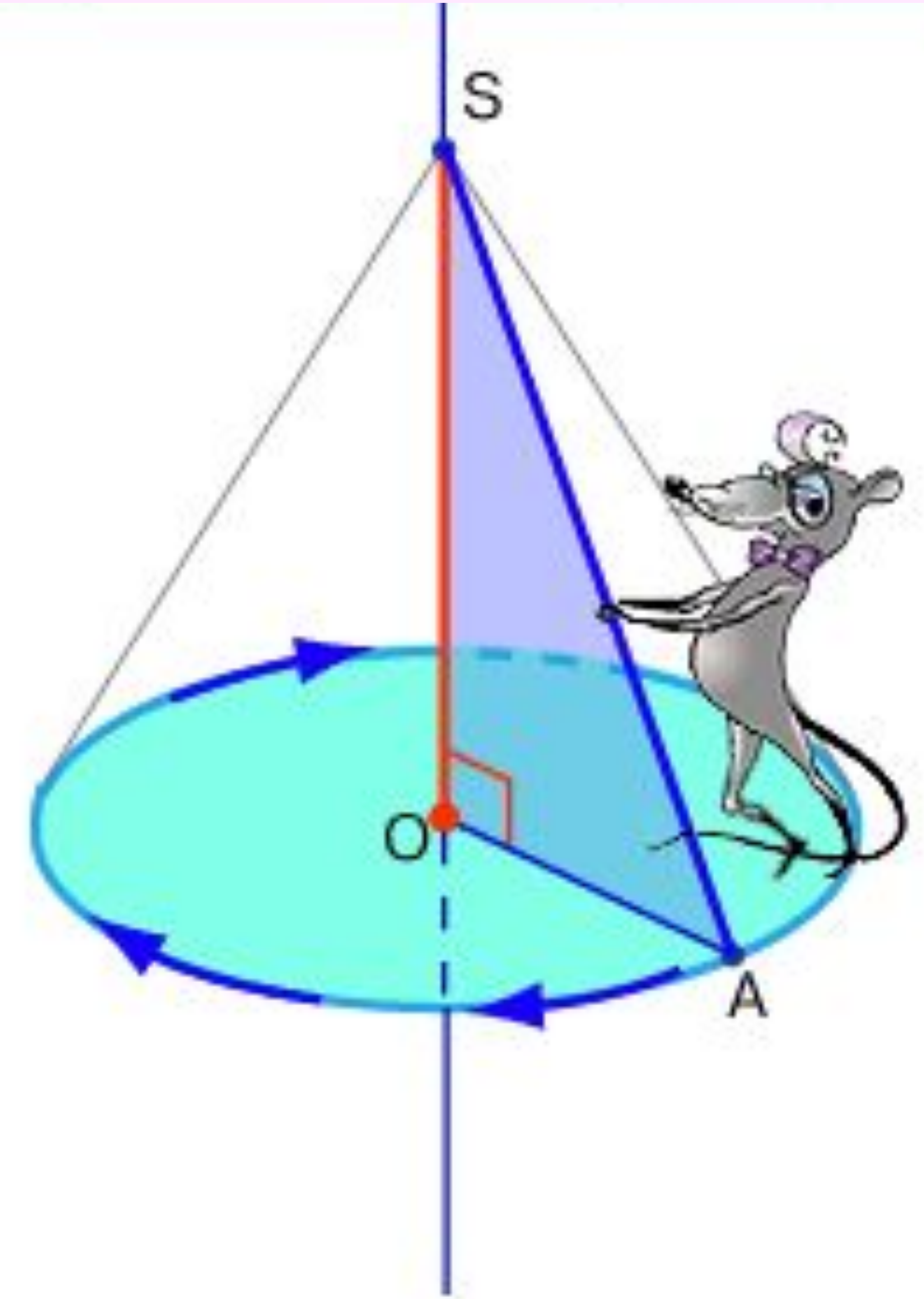
$$\angle SAO = \angle SBO$$

?

- ***Чему равен угол между образующей и основанием конуса, если известен угол между высотой и образующей.***

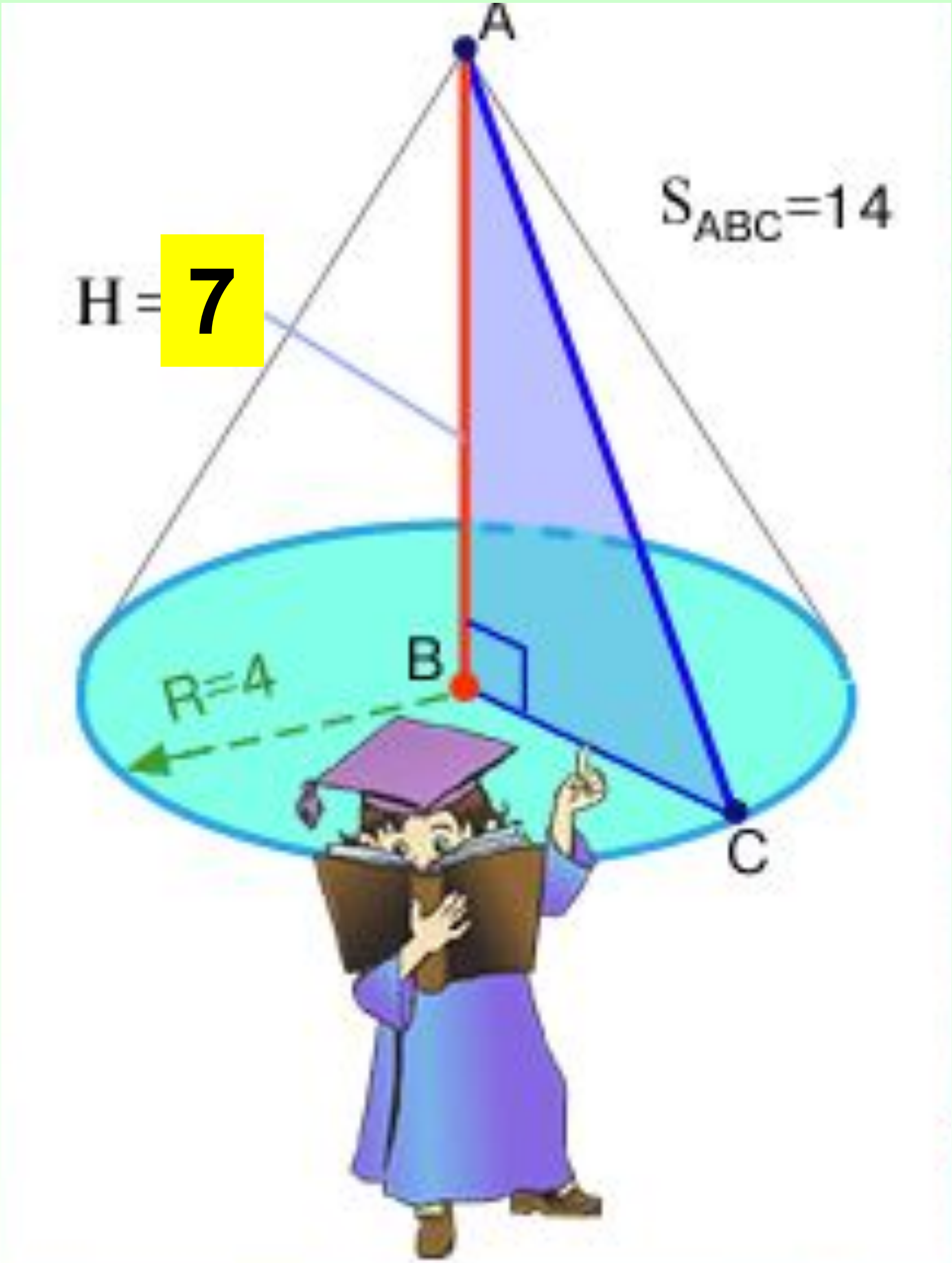


- ***Конус можно получить, вращая прямоугольный треугольник вокруг одного из катетов. При этом осью вращения будет прямая, содержащая высоту конуса. Эта прямая так и называется – осью конуса.***



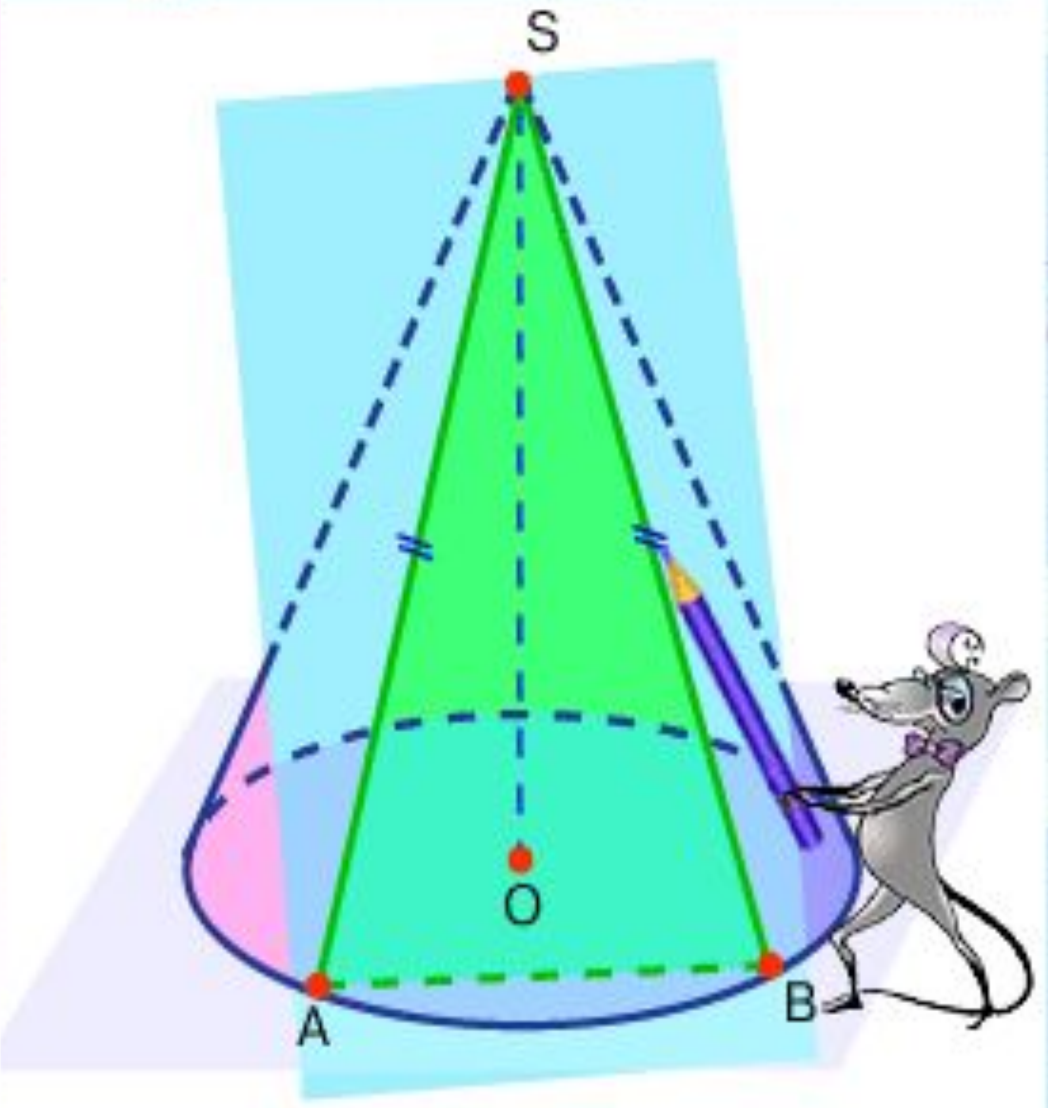
?

- ***Конус получен при вращении прямоугольного треугольника S = 14. Радиус основания конуса равен 4. Определите высоту этого конуса.***



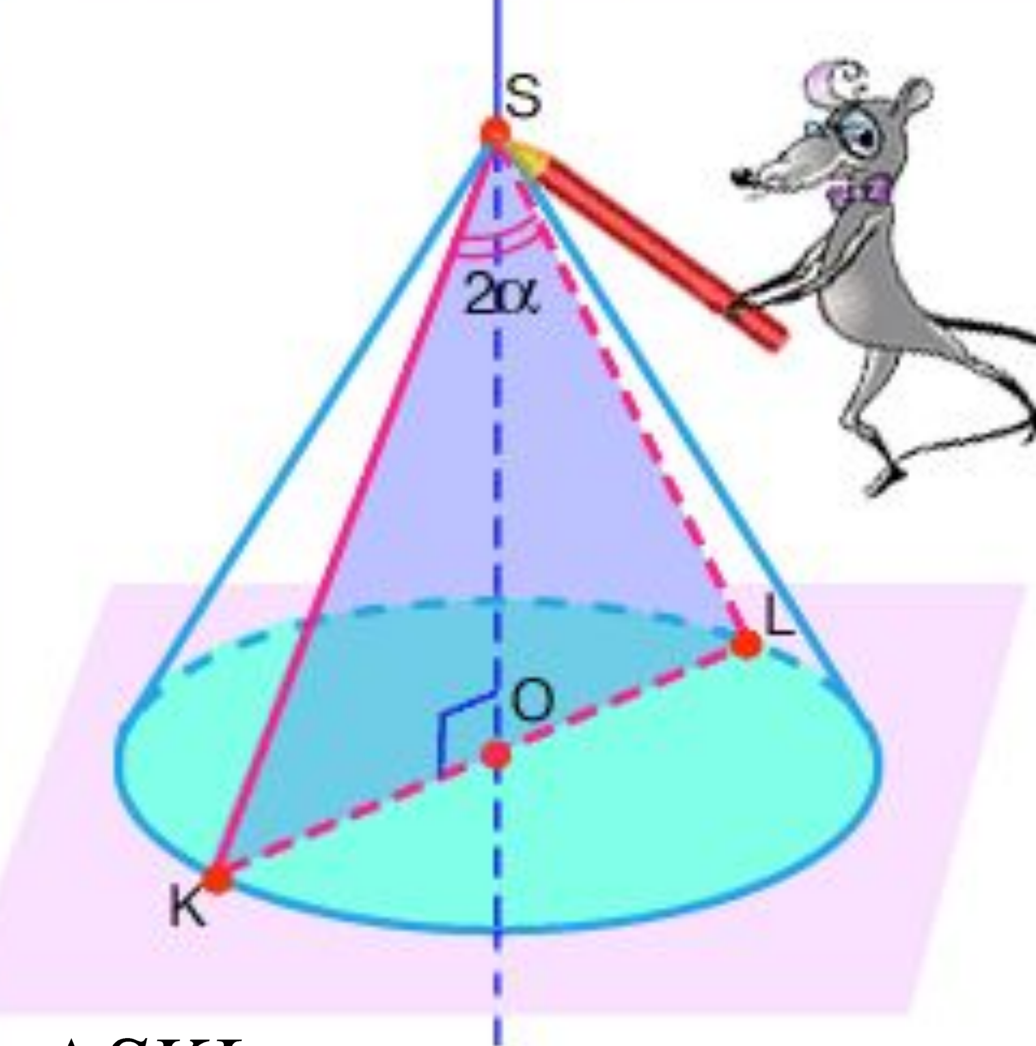
Сечения конуса.

- ***Если через вершину конуса провести плоскость, пересекающую основание, то в сечении получится равнобедренный треугольник.***



Сечения конуса.

- ***Сечение конуса, проходящее через ось, называется осевым. В основании осевого сечения лежит диаметр – максимальная хорда, поэтому угол при вершине осевого сечения – это максимальный угол между образующими конуса. (Угол при вершине конуса).***



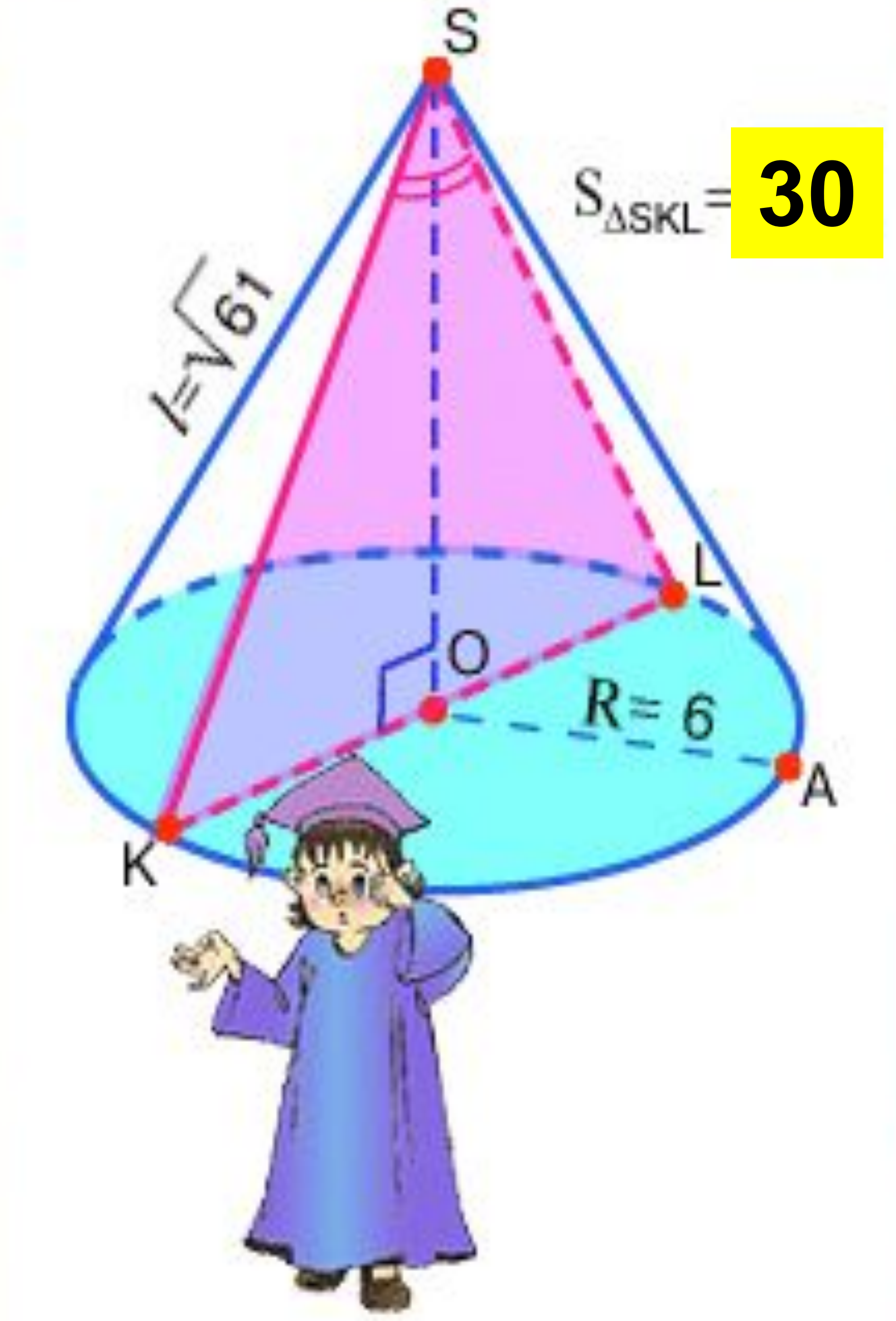
ΔSKL – осевое сечение

$KL = 2R$ – диаметр

$\angle KSL = 2\alpha$ – угол при вершине конуса.

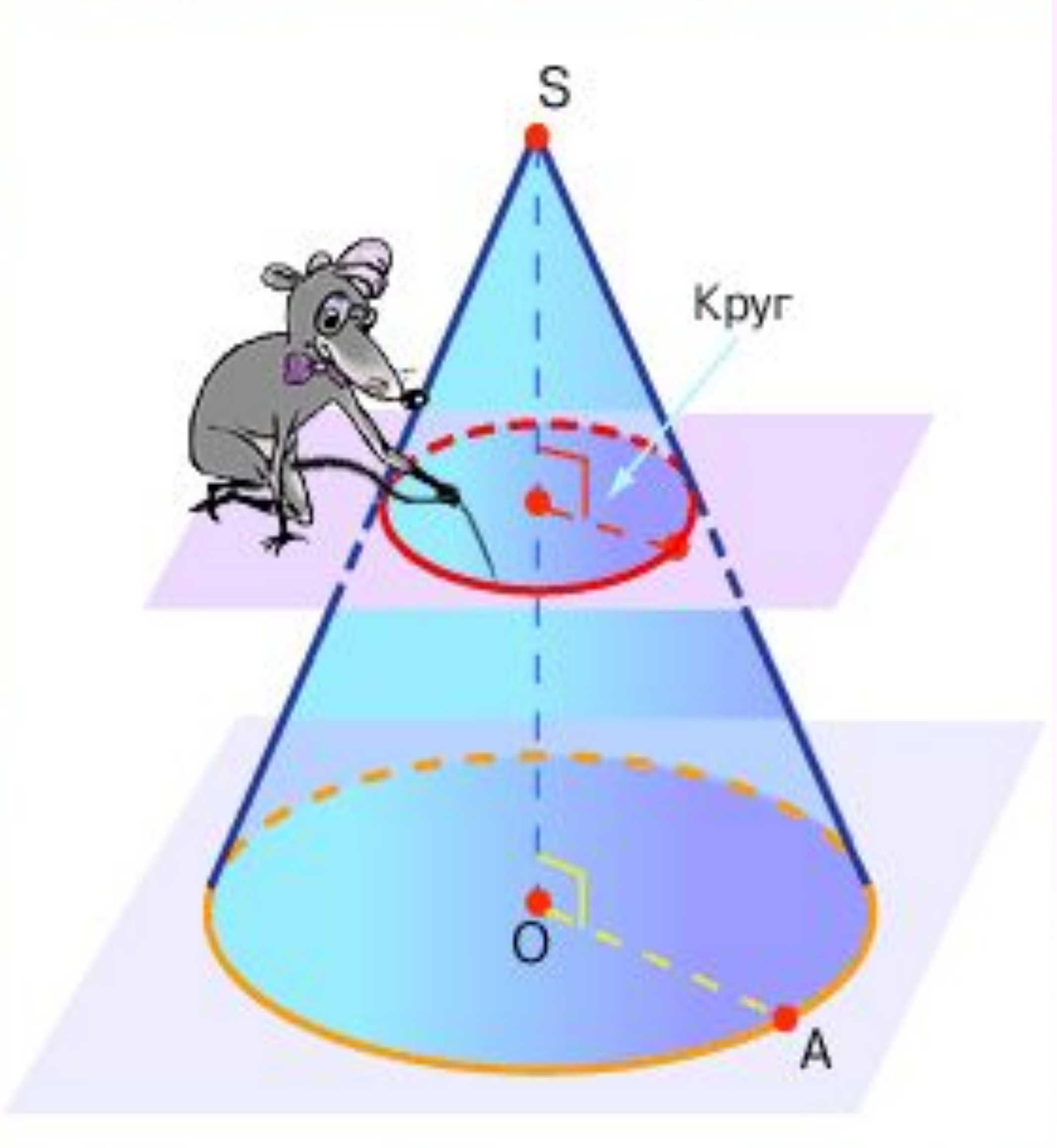
?

- ***Найдите площадь осевого сечения, если известны радиус основания конуса и образующая.***



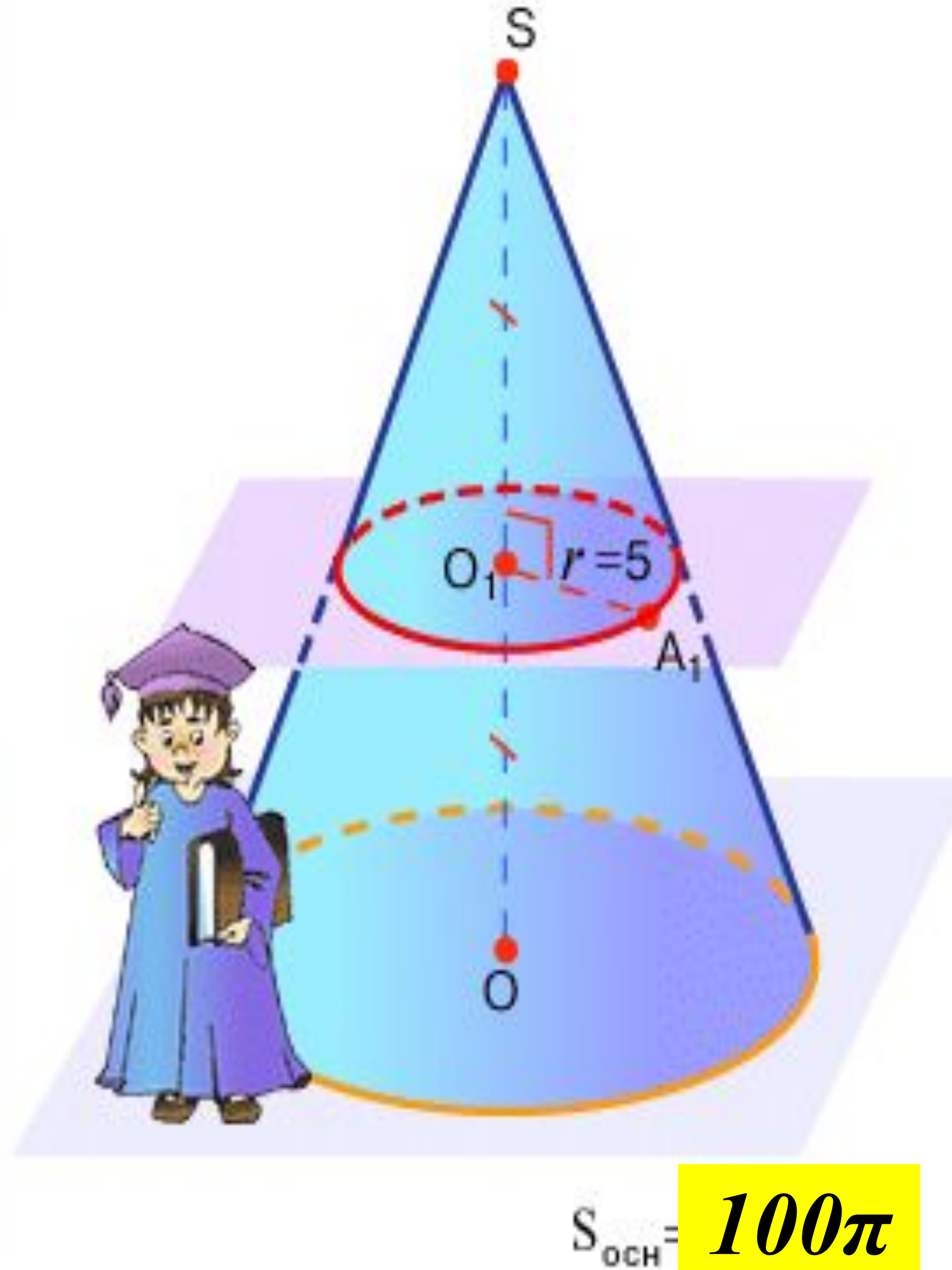
Сечения конуса.

- ***Любое сечение конуса плоскостью, параллельной основанию, - это*** ***круг.***



?

- ***Через середину высоты конуса провели плоскость, перпендикулярную оси, и получили круг R = 5. Чему равна площадь основания конуса?***



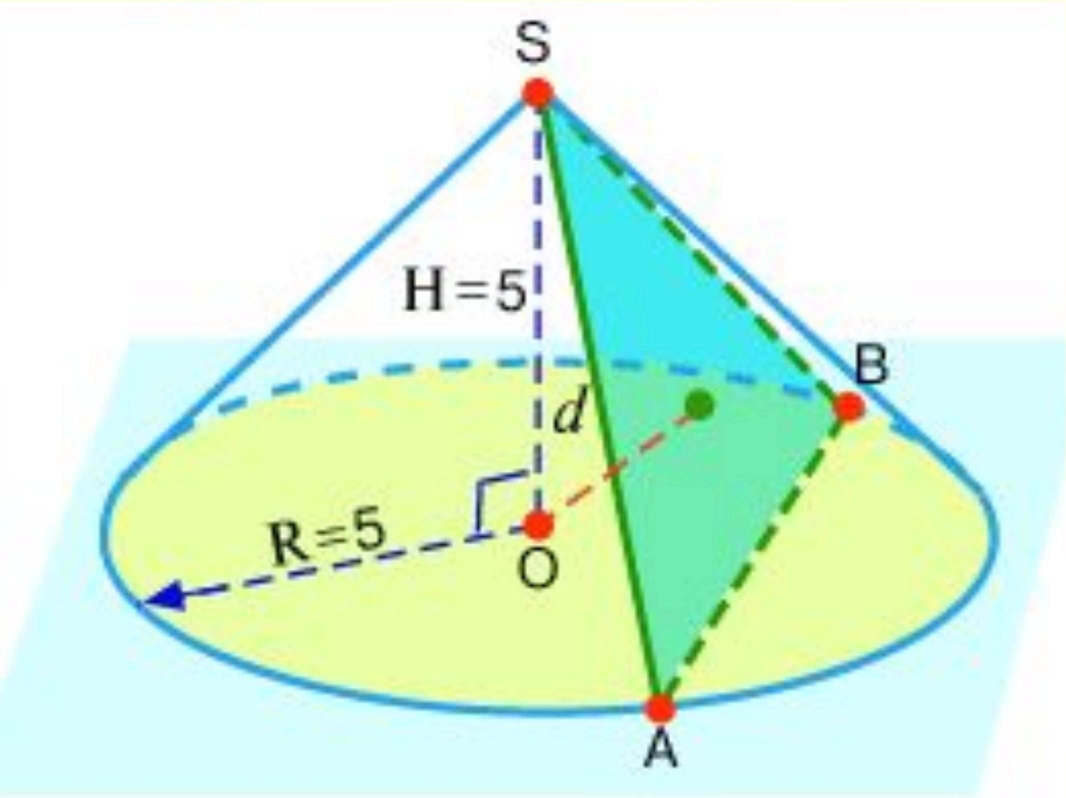
100π

Задача.

Дано: ***H = R = 5;***

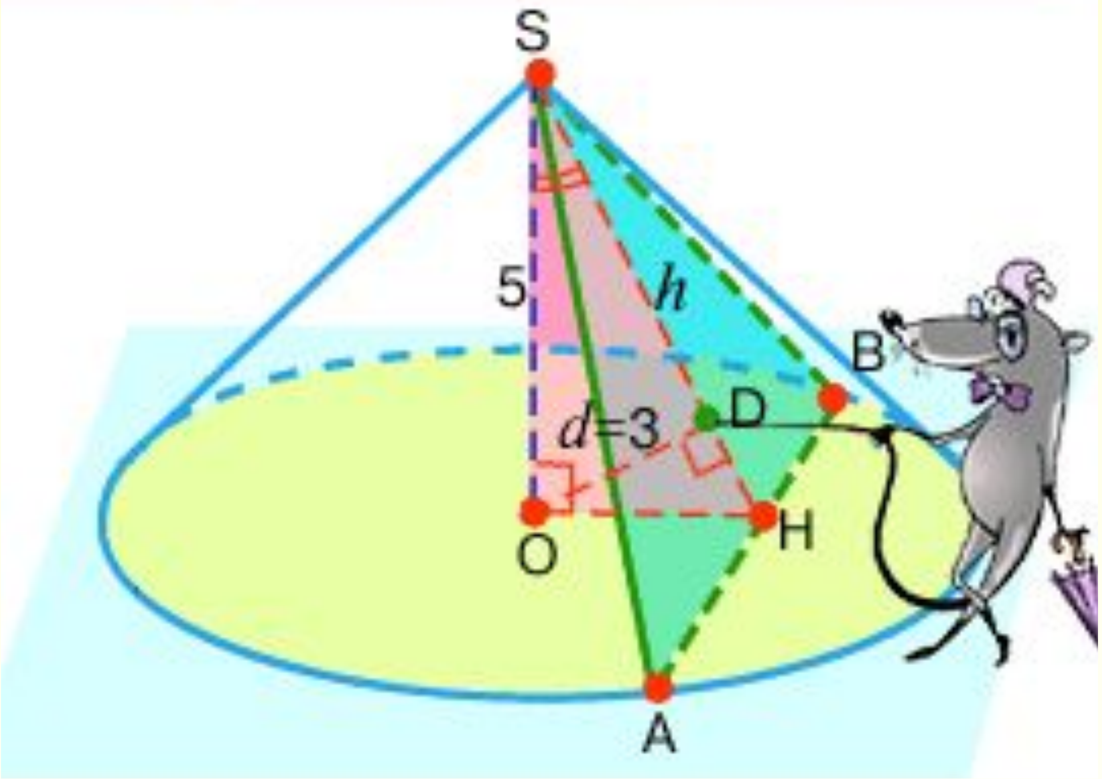
SAB – сечение;

d (O, SAB) = 3.



Найти: $S_{\Delta SAB}$

1) В сечении равнобедренный треугольник. Найдем его высоту.

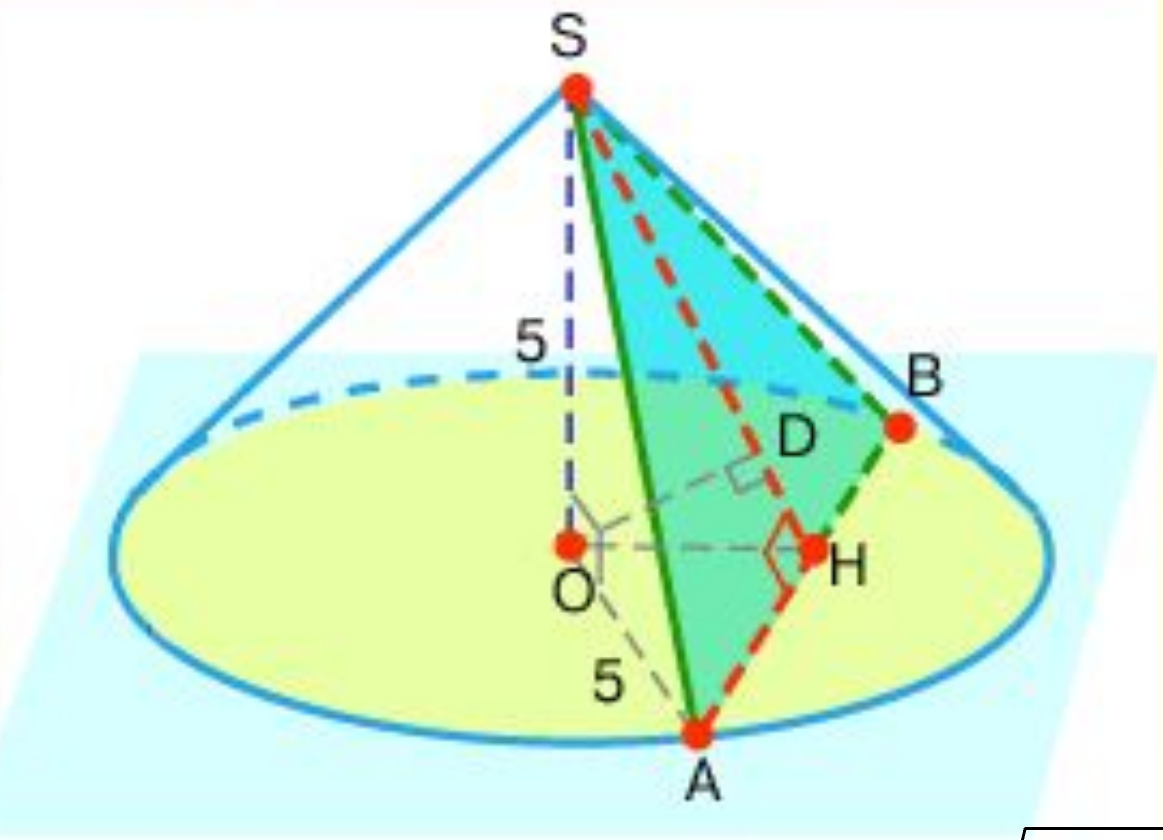


$$\Delta SOH \sim \Delta SDO$$

$$\frac{SD}{SO} = \frac{SO}{SH}$$

$$SH = \frac{SO^2}{SD} = \frac{5 \cdot 5}{\sqrt{5^2 - 3^2}} = \frac{25}{4}$$

2) Определим боковые стороны и основание треугольника, являющегося сечением.



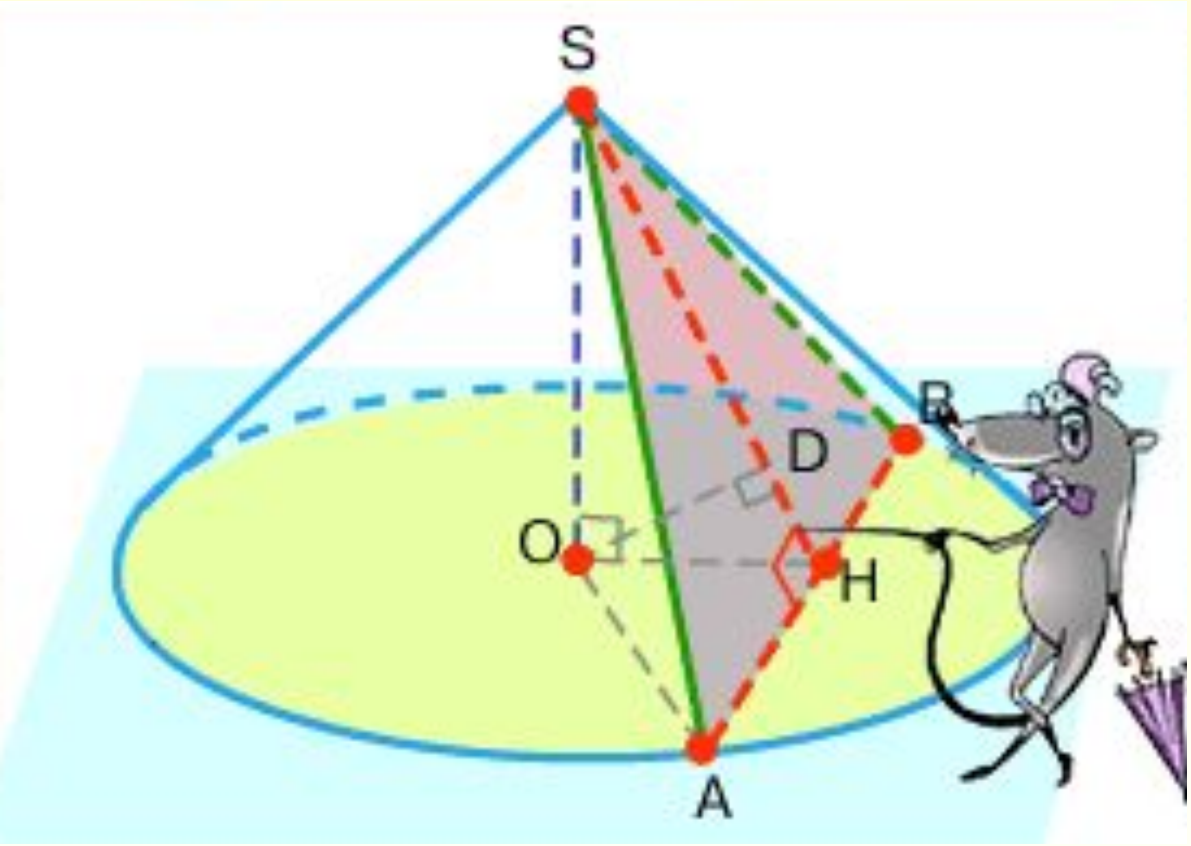
$$\text{Из } \Delta SOA:$$

$$SA = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\text{Из } \Delta SAH:$$

$$AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \frac{\sqrt{175}}{4} = \frac{5\sqrt{7}}{4}$$

3) Вычислим площадь треугольника.

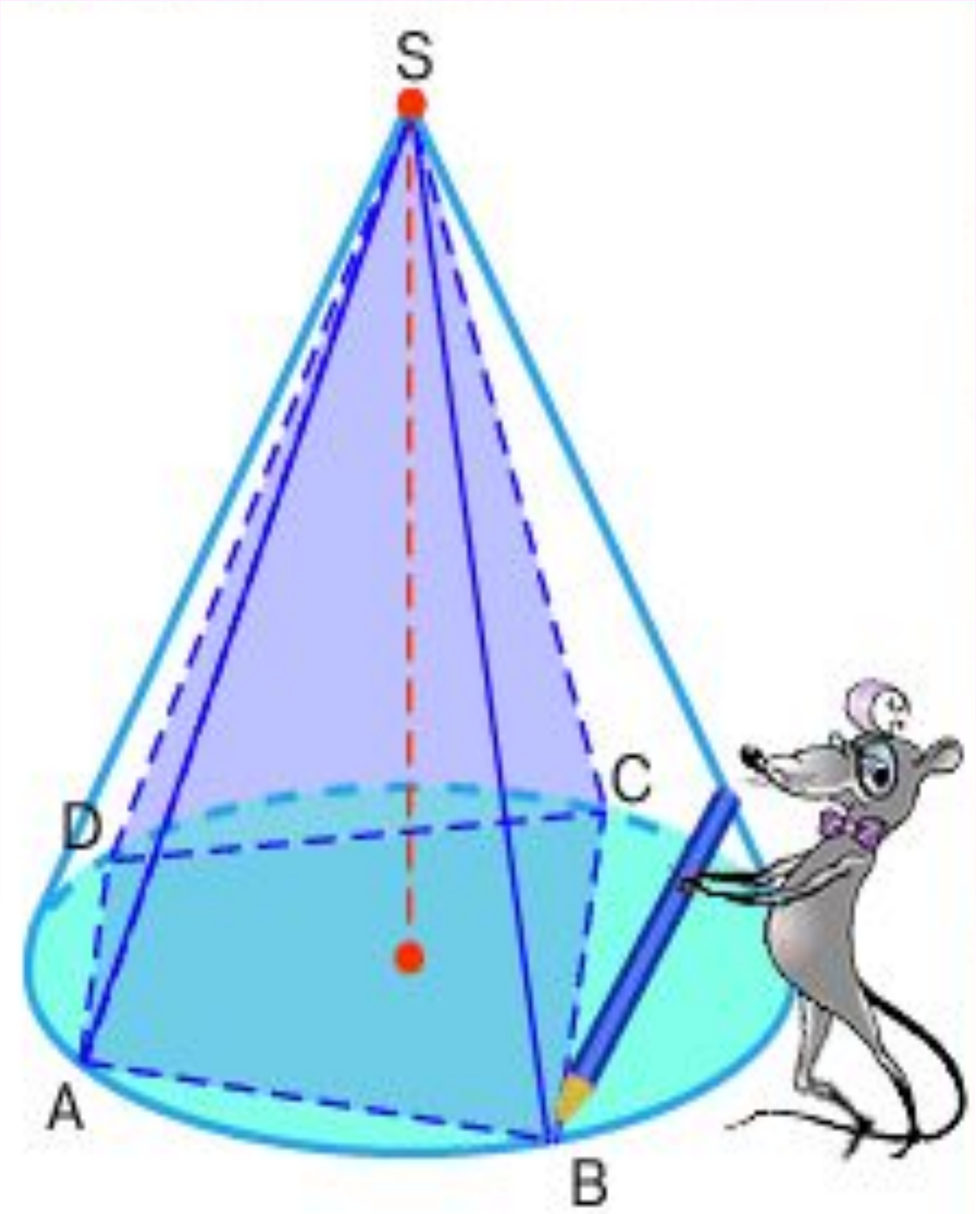


$$SH=\frac{25}{4}\qquad AH=\frac{5\sqrt{7}}{4}$$

$$AB=2\cdot AH=\frac{5\sqrt{5}}{2}$$

$$S_{\Delta SAB}=\frac{1}{2}SH\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{4}\cdot\frac{5\sqrt{7}}{2}=\frac{125\sqrt{7}}{16}$$

Вписанная и описанная пирамиды.

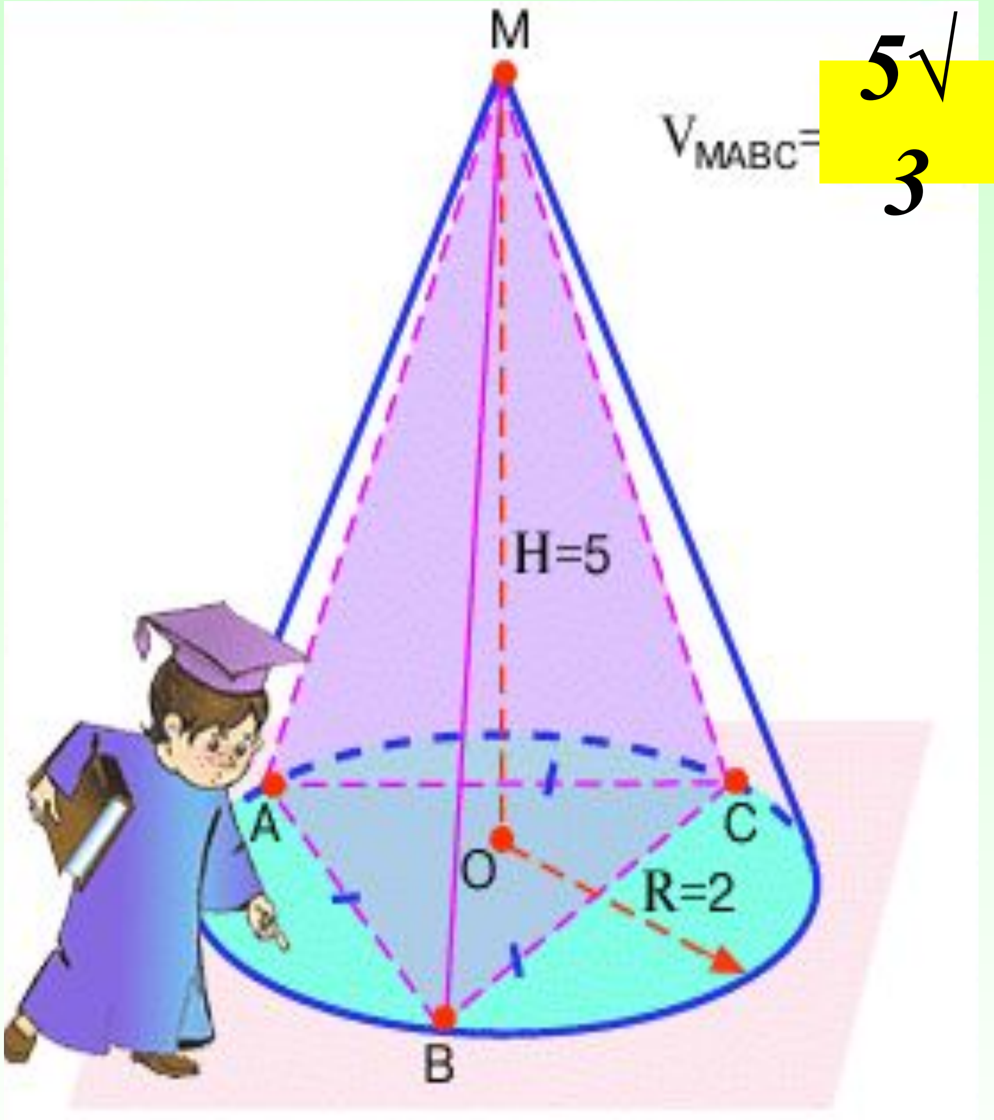


***Пирамидой, вписанной в конус*, называется такая пирамида, основание которой – многоугольник, вписанный в основание конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса.**

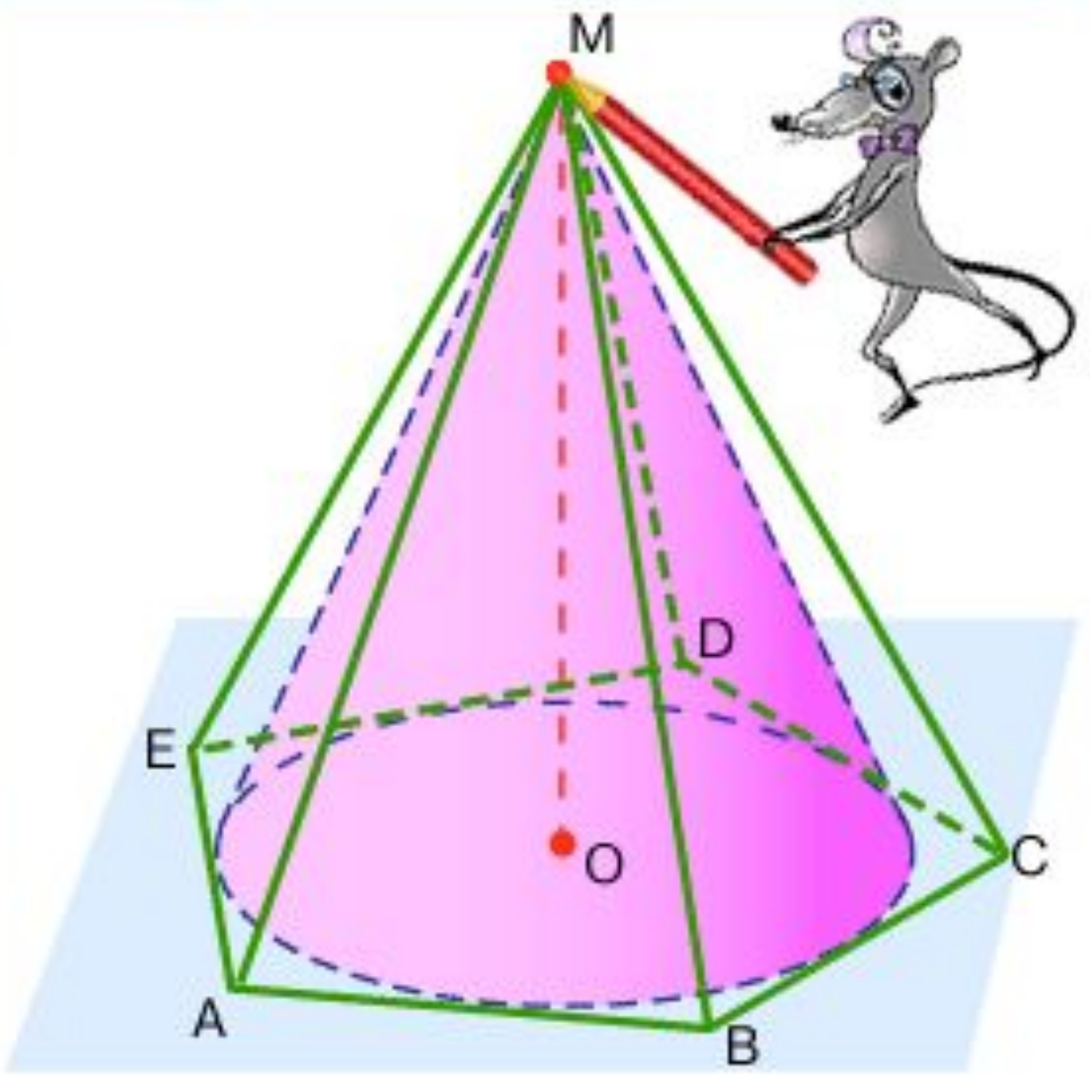
?

- ***Пусть высота конуса равна 5 , а радиус основания – 2.***

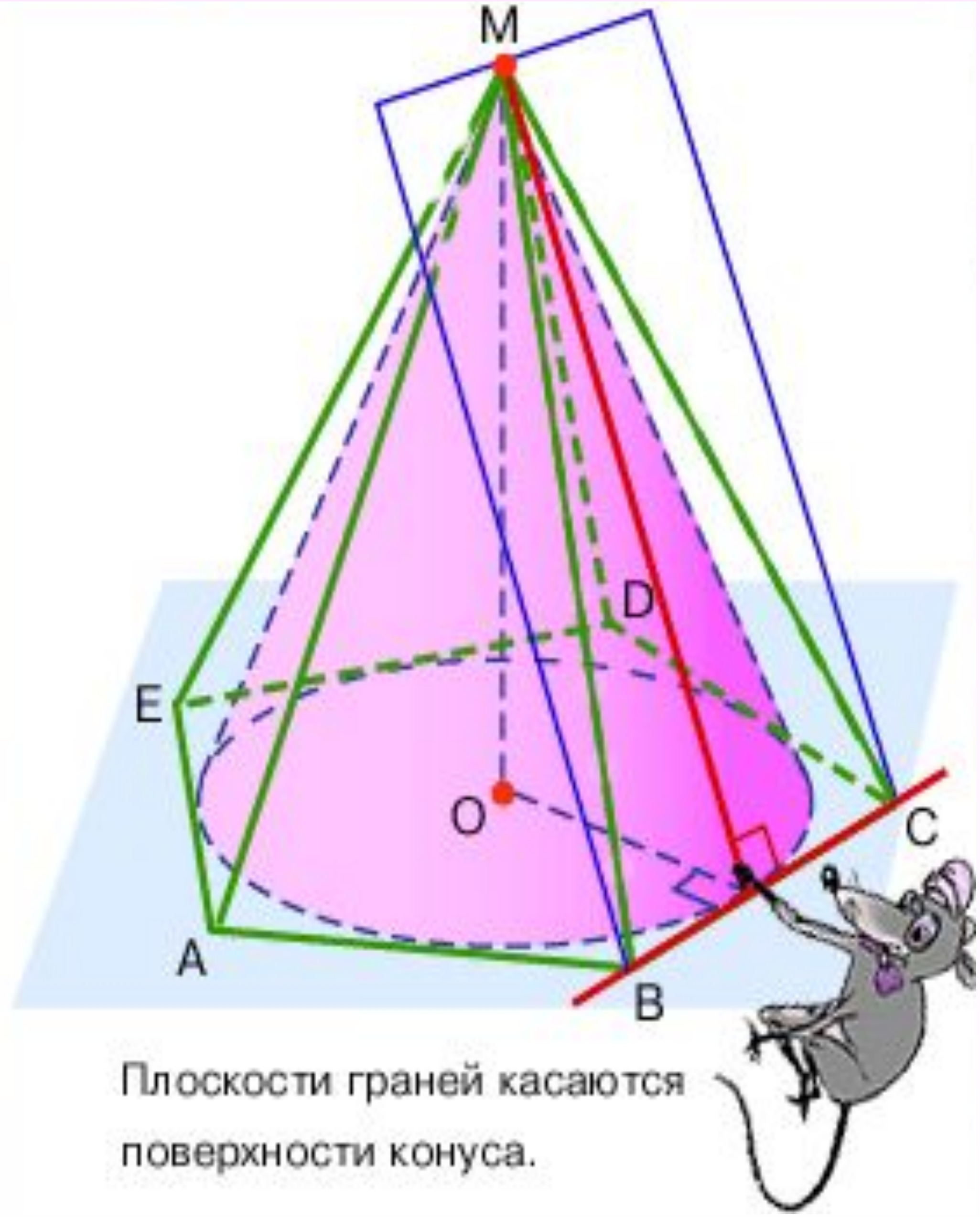
 В конус вписана правильная треугольная пирамида. Определите ее объем.



Вписанная и описанная пирамиды.



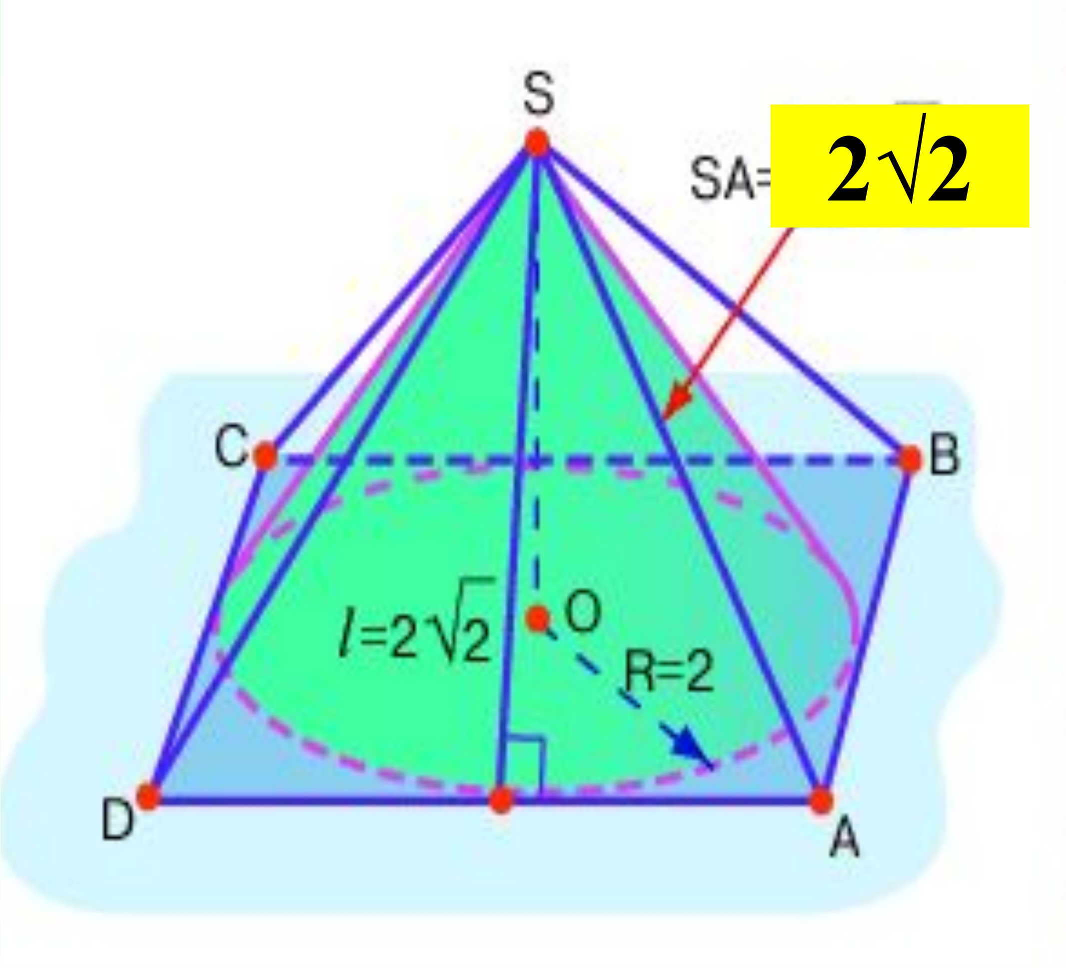
***Пирамида* называется *описанной около конуса*, если ее основание – это многоугольник, описанный около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса.**



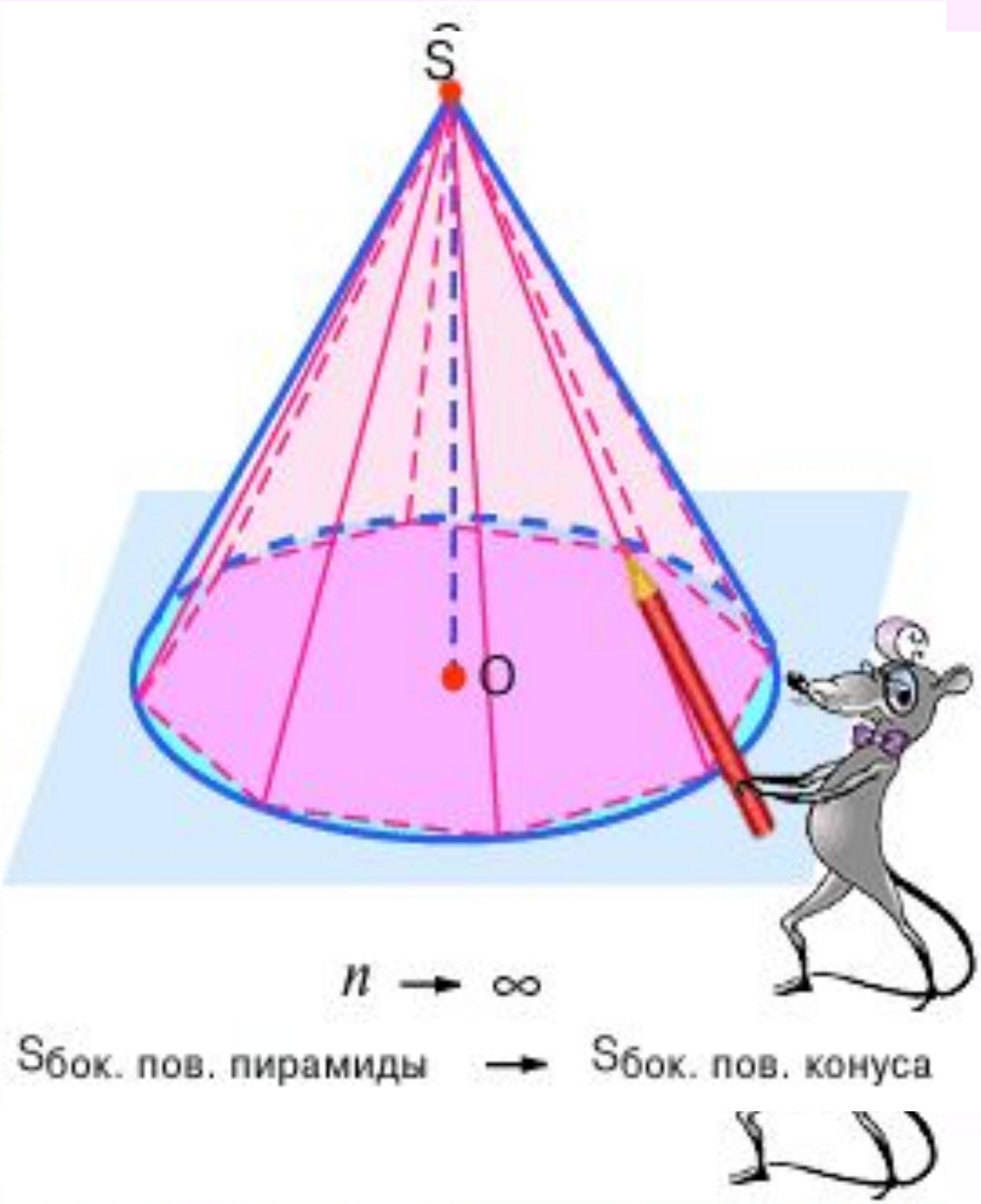
Плоскости боковых граней описанной пирамиды проходят через образующую конуса и касательную к окружности основания, т.е. касаются боковой поверхности конуса.

?

- ***Вокруг конуса описана правильная четырехугольная пирамида. Радиус основания и образующая конуса известны. Найдите боковое ребро пирамиды.***

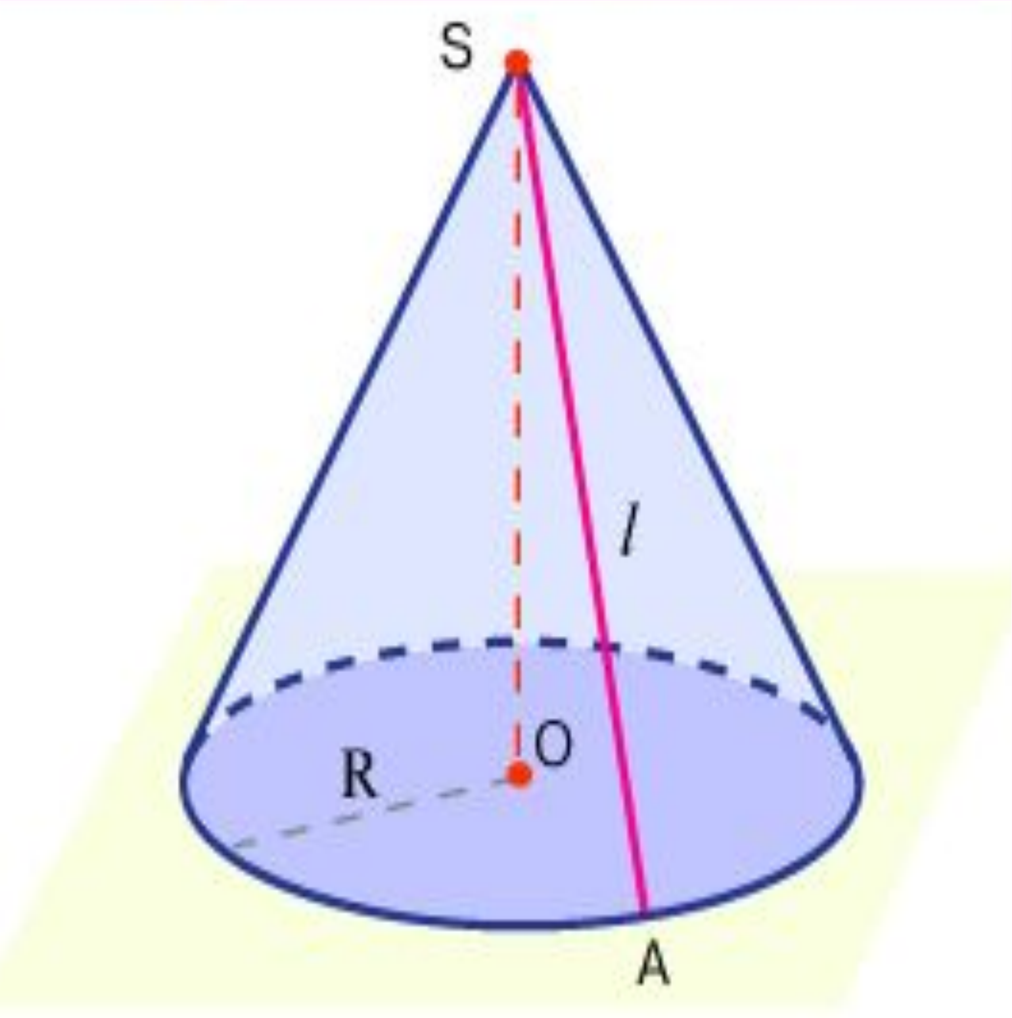


Боковая поверхность конуса.



Под боковой поверхностью конуса мы будем понимать предел, к которому стремится боковая поверхность вписанной в этот конус правильной пирамиды, когда число боковых граней неограниченно увеличивается.

Теорема. ***Площадь боковой поверхности конуса равна половине произведения длины окружности основания на образующую.***



Дано:

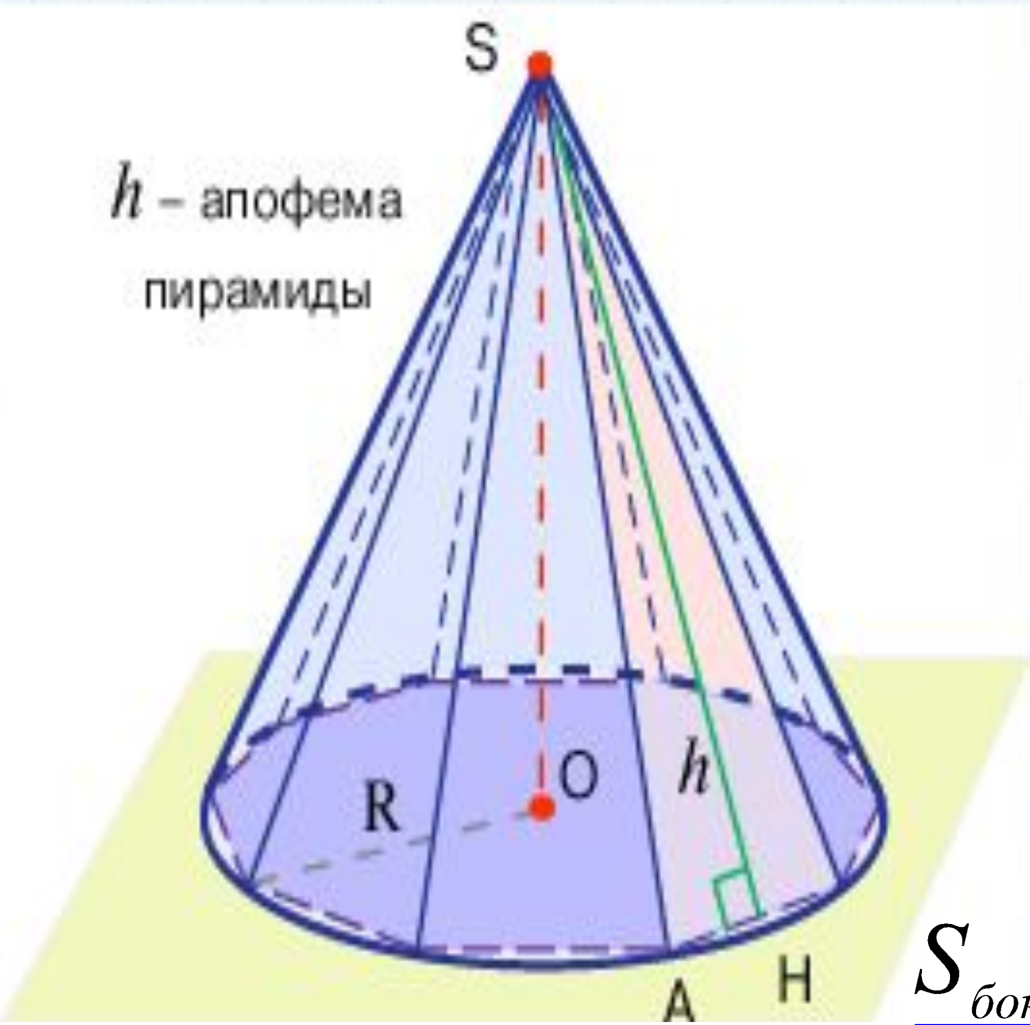
R – радиус основания конуса,

l – образующая конуса.

Доказать:

$$S_{бок.кон.} = \pi Rl$$

Доказательство:



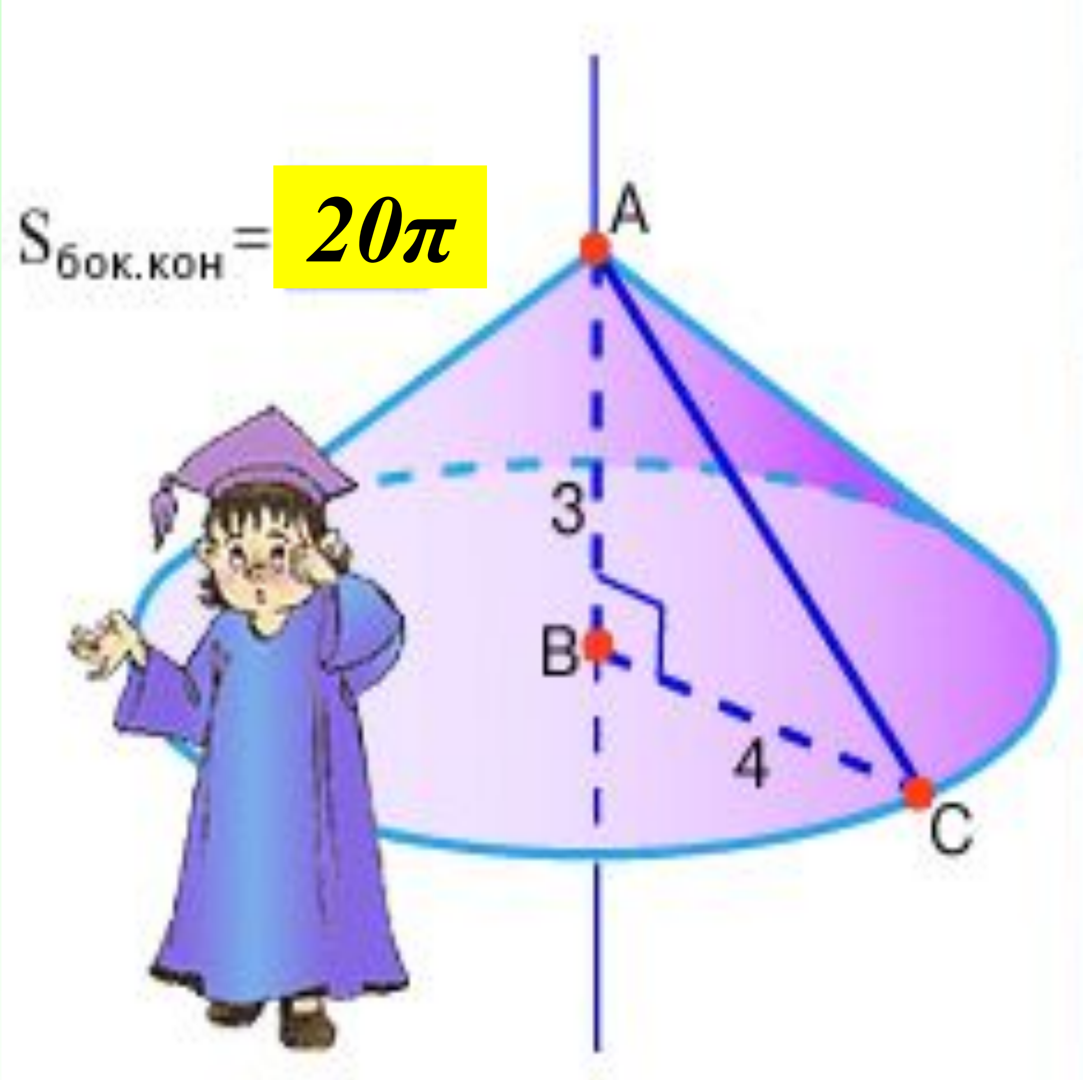
$$S_{бок.пир.} = \frac{1}{2} P_{осн.пир.} \cdot h$$

$$\left.\begin{aligned} h &\to l \\ P_{осн.пир.} &\to 2\pi R \end{aligned}\right\}$$

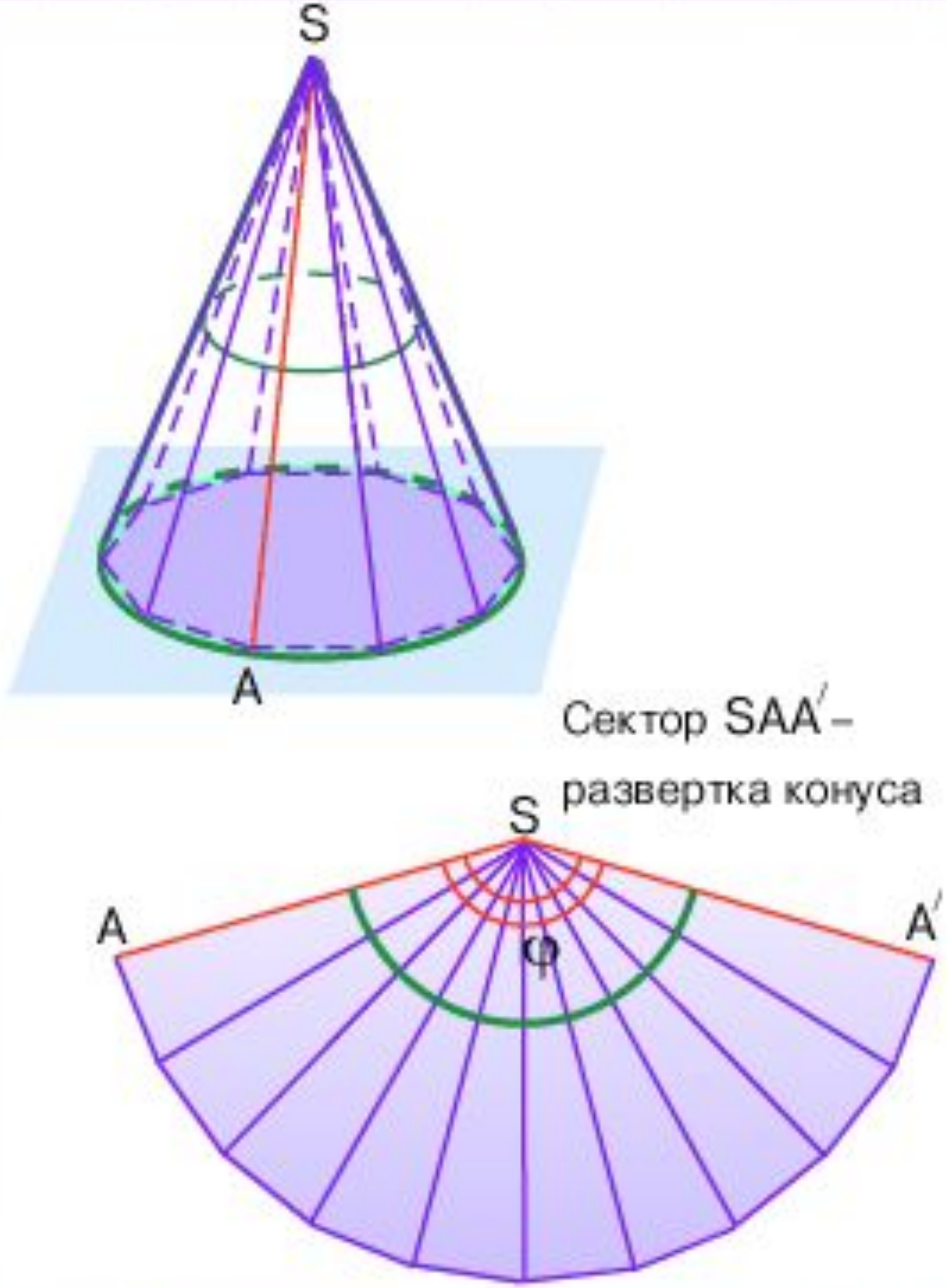
$$\underline{S_{бок.кон.}} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot Rl = \underline{\pi Rl}$$

?

- ***Пусть конус будет получен от вращения прямоугольного треугольника с известными катетами. Найдите боковую поверхность этого конуса.***

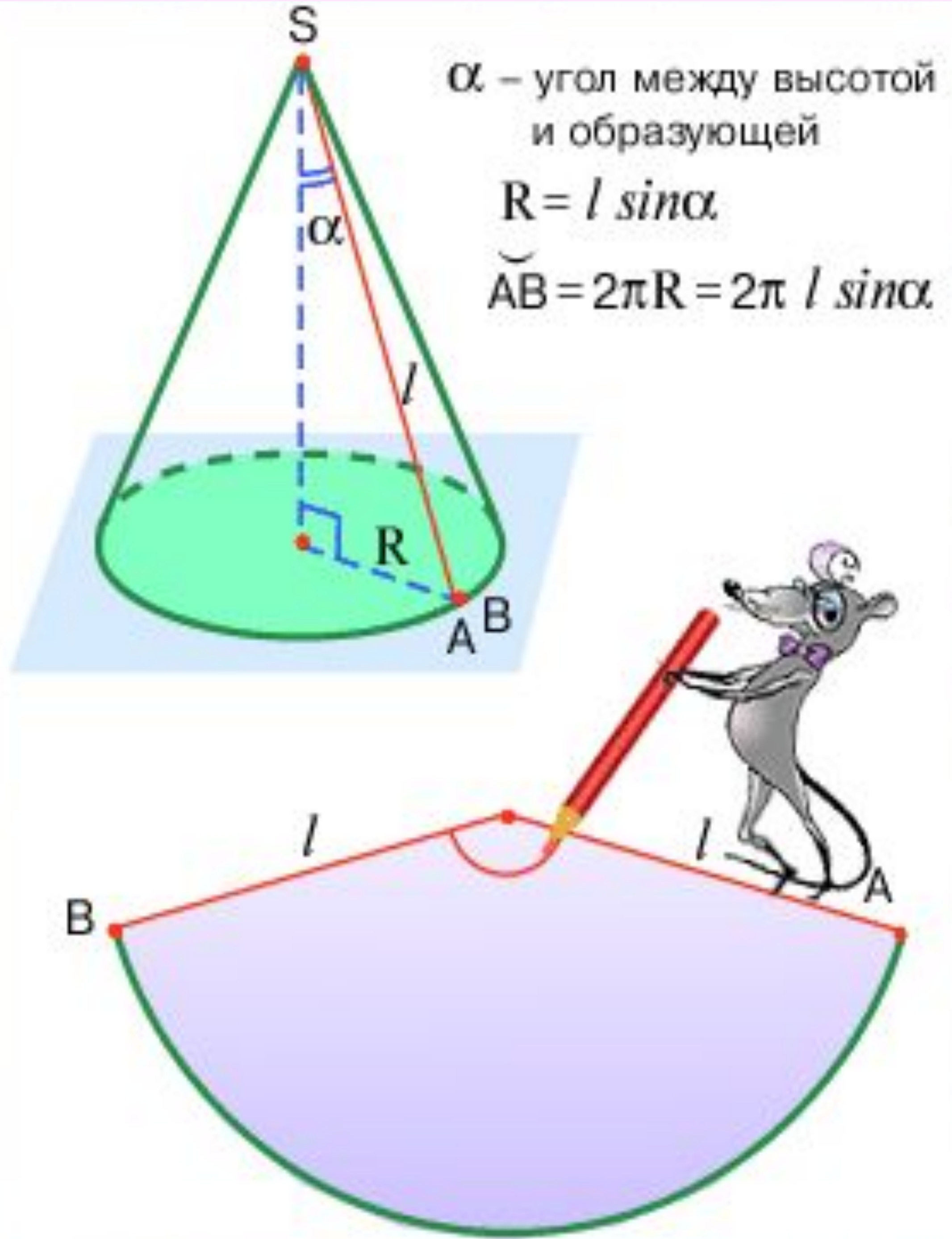


Развертка конуса.

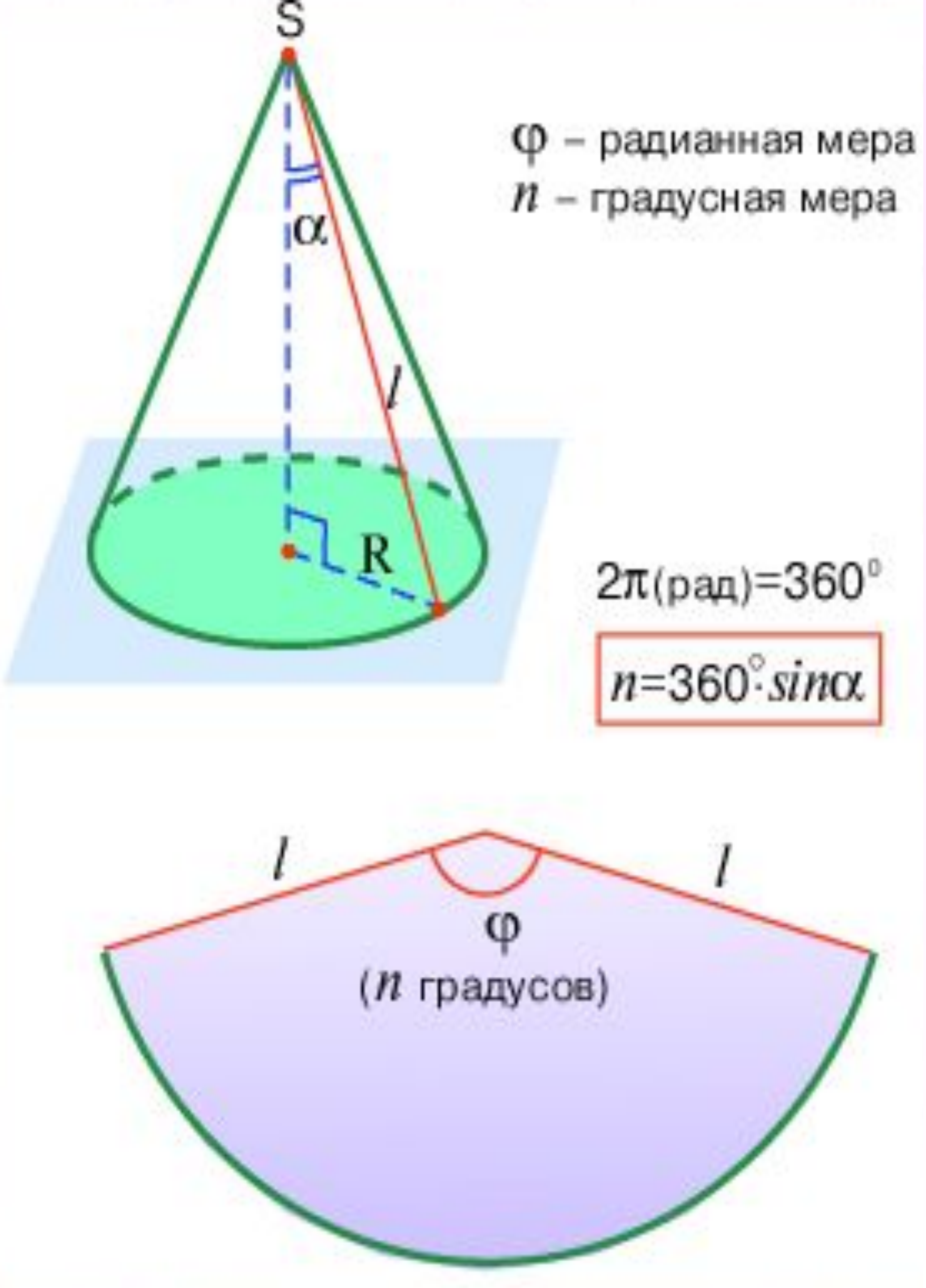


Развертка конуса – это круговой сектор. Его можно рассматривать как развертку боковой поверхности вписанной правильной пирамиды, у которой число боковых граней бесконечно увеличивается.

- ***Зная угол, образованный высотой и образующей конуса, можно вычислить угол сектора, полученного при развертке конуса, и наоборот.***

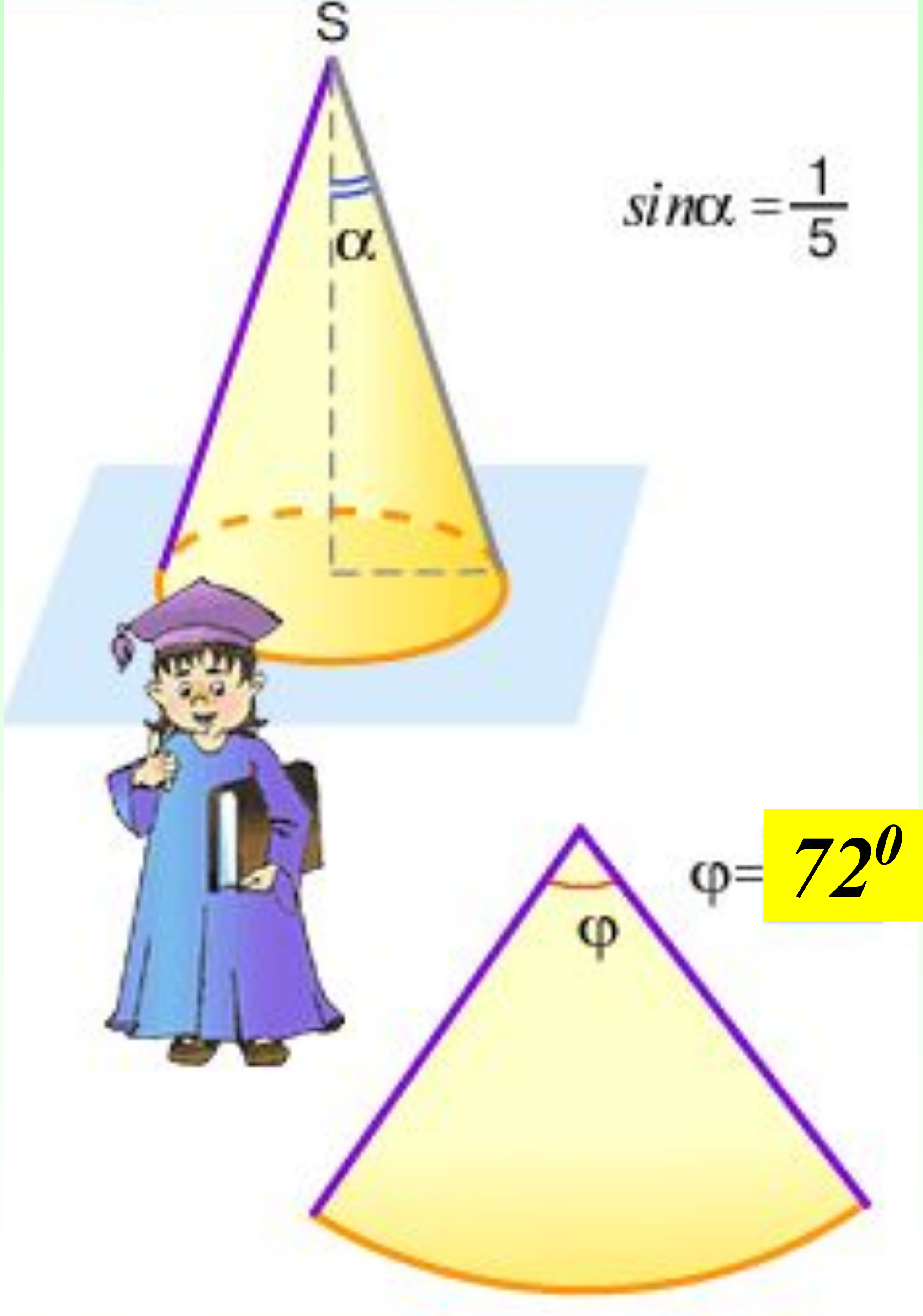


- ***Найдем выражение для градусной меры угла развертки конуса.***

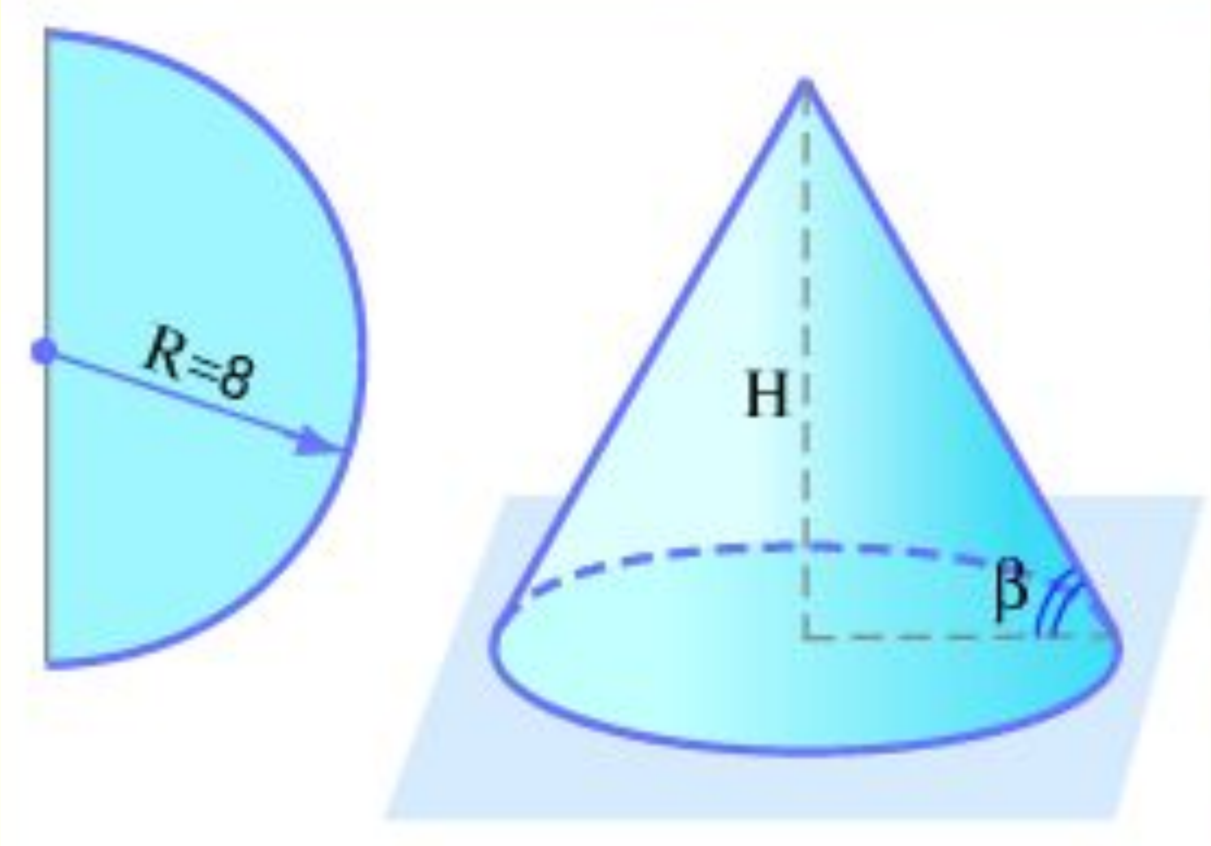


?

- ***По данным рисунка определите, чему равен угол развертки этого конуса. Ответ дайте в градусах.***



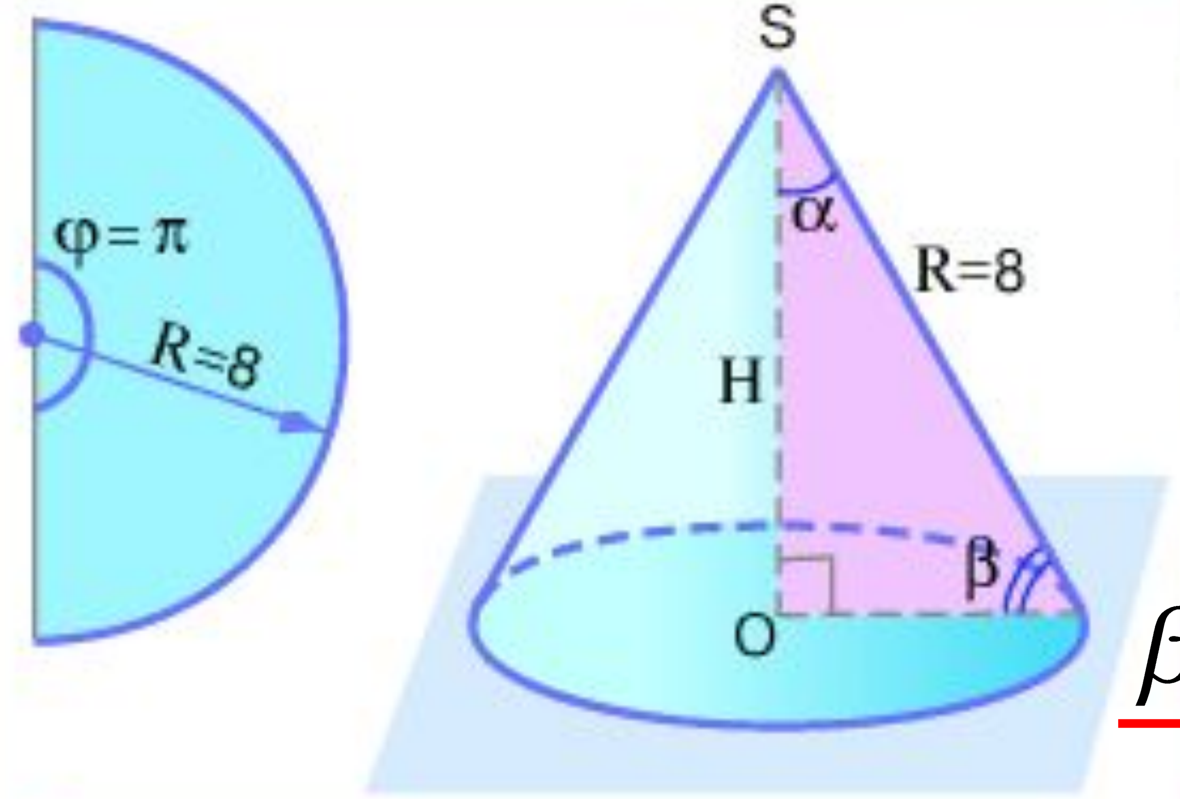
Задача.



Дано: полукруг радиусом R = 8.

Найти: H, β (угол между образующей и основанием.)

1) Используем формулу, связывающую угол кругового сектора развертки с углом между высотой и образующей конуса. Получим угол между высотой и образующей, а затем найдем угол между образующей и основанием конуса.



$$\varphi = \pi$$

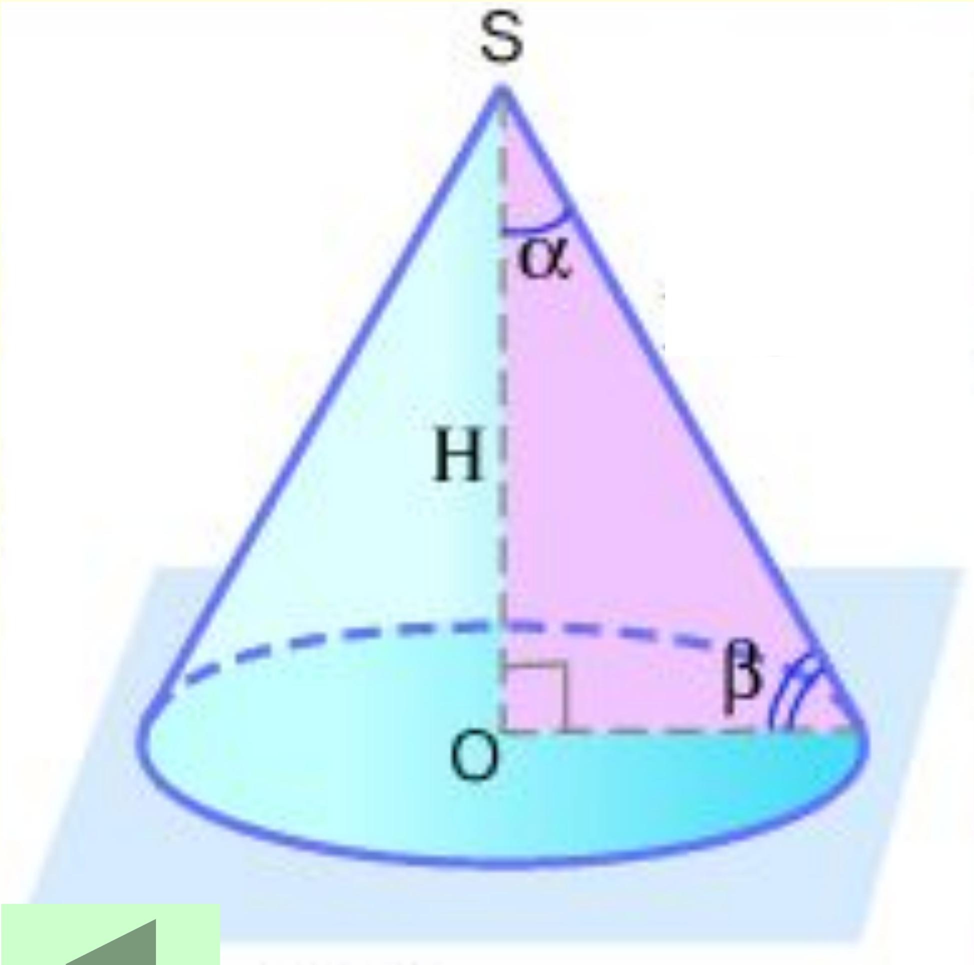
$$\pi = 2\pi \cdot \sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 30^0$$

$$\beta = 90^0 - \alpha = 60^0$$

2) Найдем высоту конуса, используя определение тангенса угла в прямоугольном треугольнике.



$$tg\beta = \frac{H}{R}$$

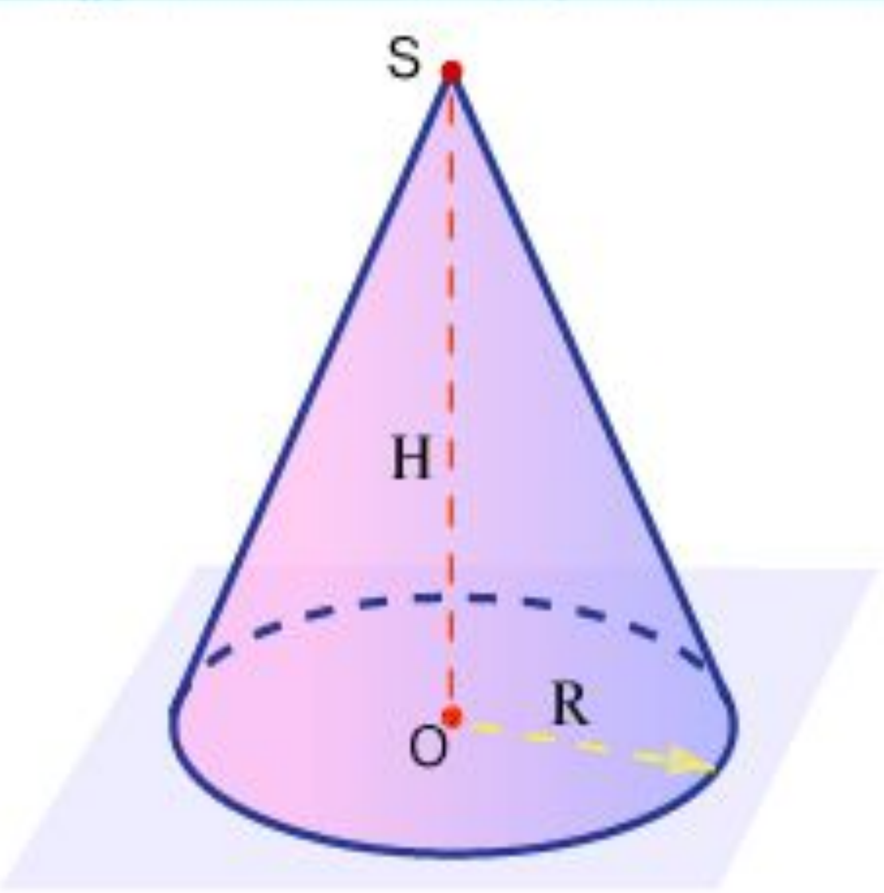
$$tg60^0 = \sqrt{3}$$

$$H = R \cdot tg\beta$$

$$H = 8\sqrt{3}$$

Объем конуса.

Теорема. ***Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.***



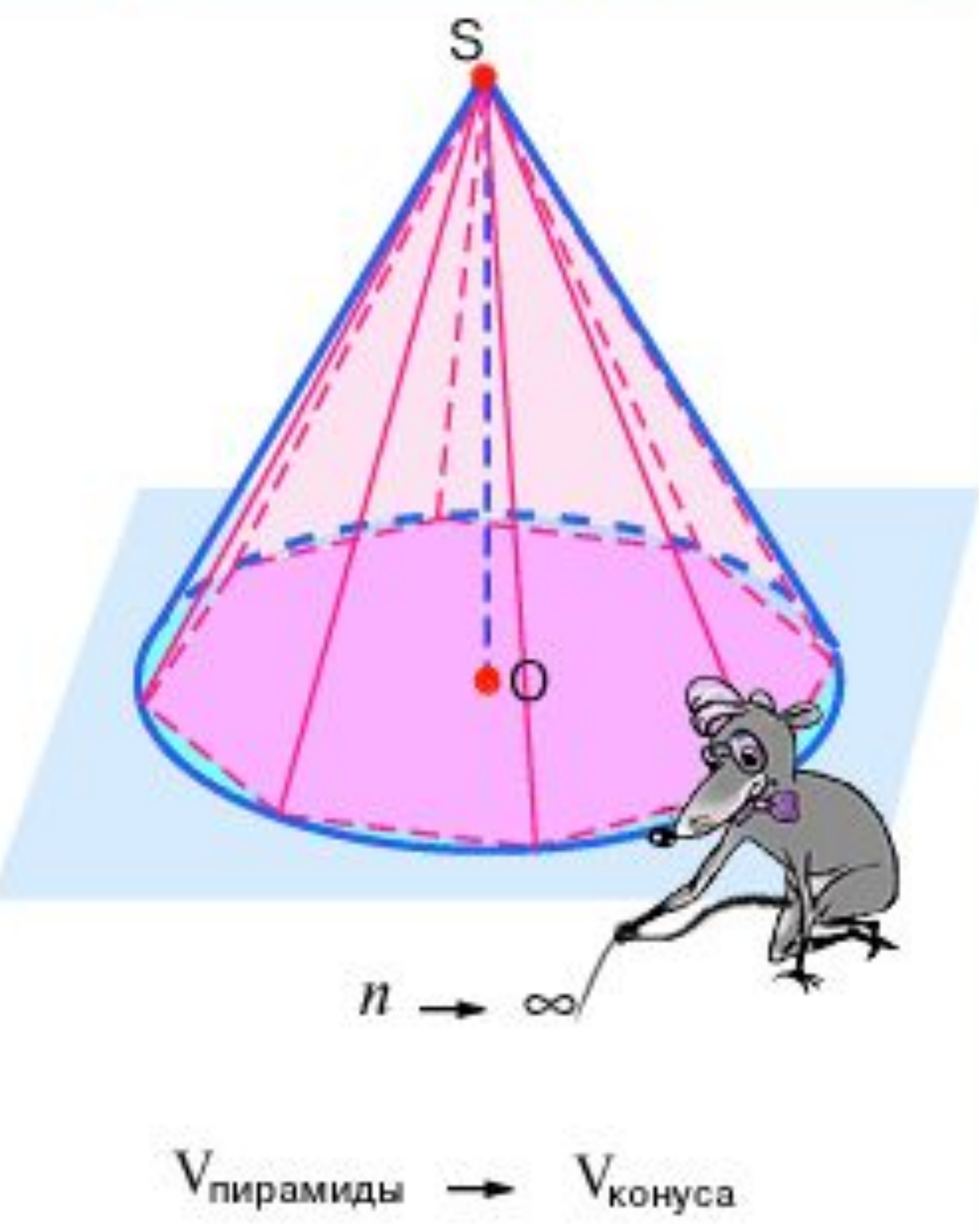
Дано: ***R – радиус основания***

H – высота конуса

Доказать: $V_{кон.} = 1/3\ S_{осн.}H$

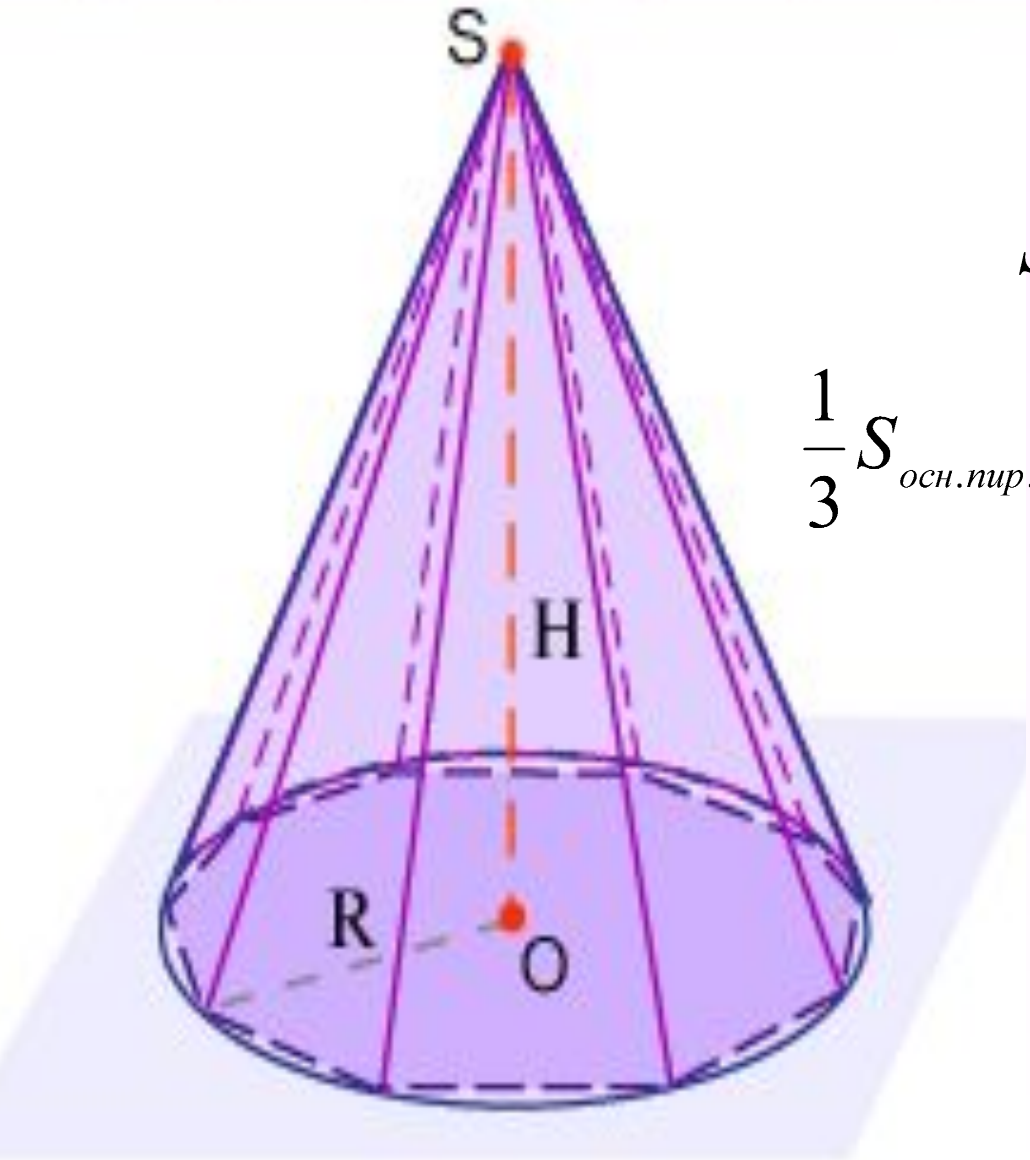
$$V_{кон.} = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot H$$

Доказательство:



Объемом конуса будем считать предел, к которому стремится объем вписанной в этот конус правильной пирамиды, когда число боковых граней неограниченно увеличивается.

Доказательство:



$$V_{пир.} = \frac{1}{3} S_{осн.пир.} \cdot H$$

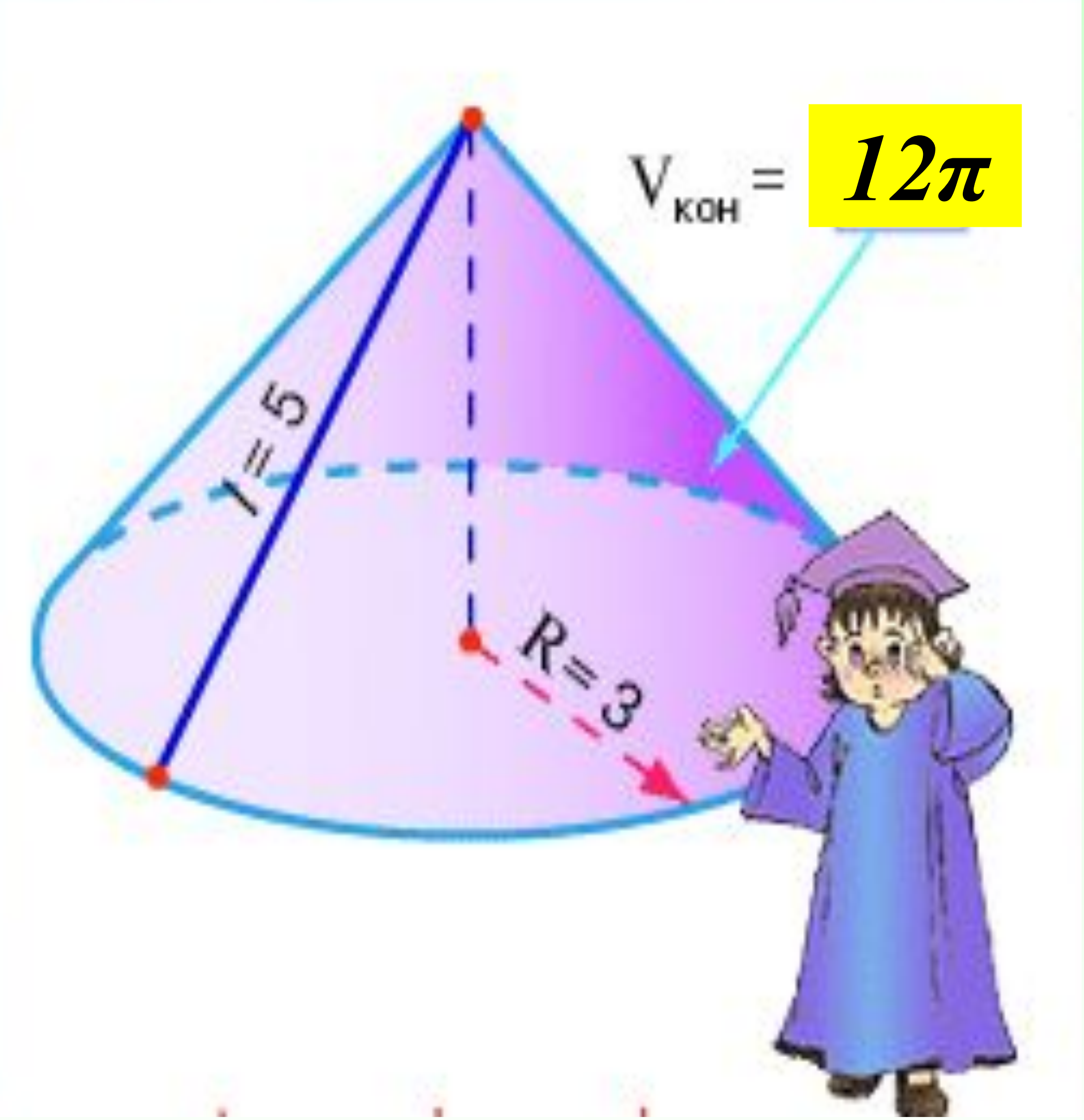
$$S_{осн.пир.} \to S_{осн.кон.} = \pi R^2$$

$$\frac{1}{3} S_{осн.пир.} H \to \frac{1}{3} S_{осн.кон.} H = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

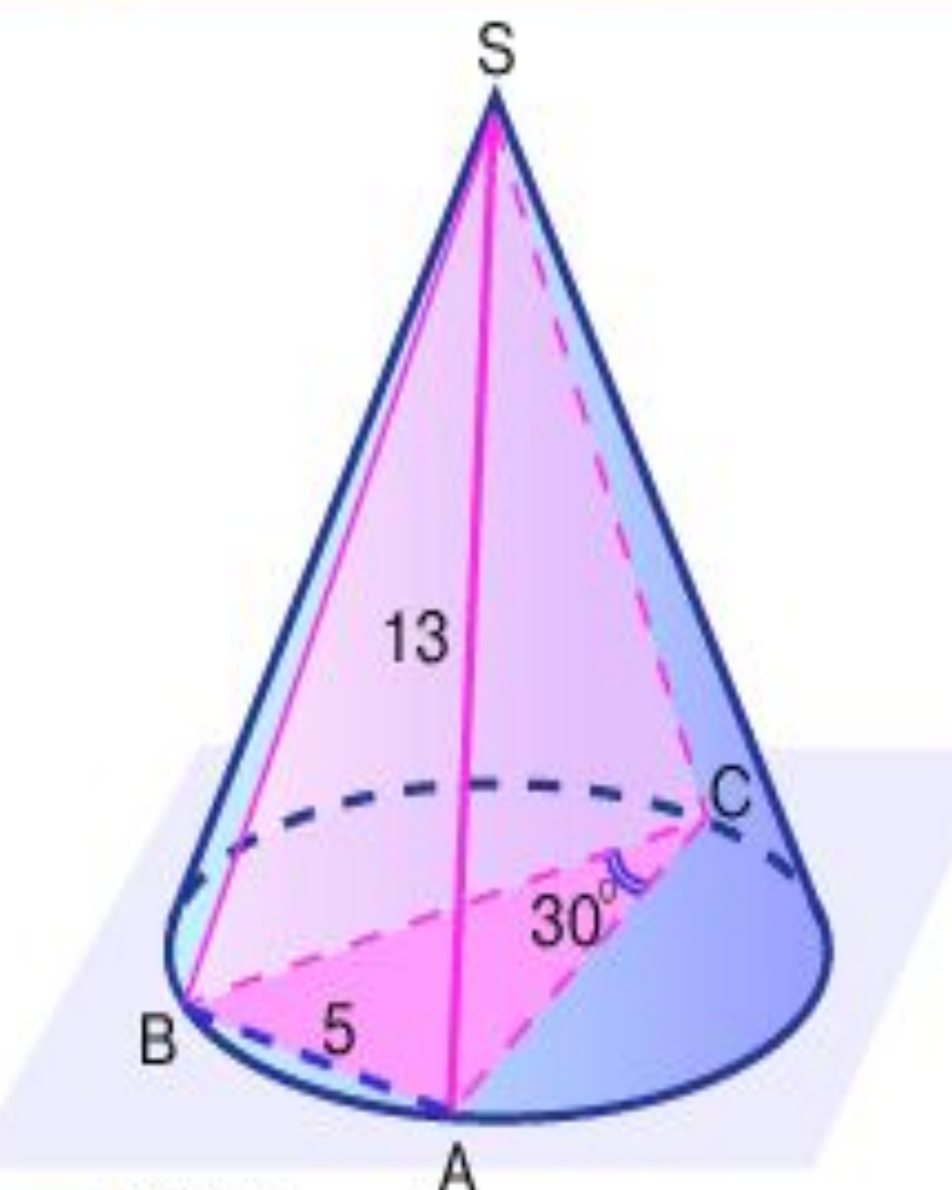
$$V_{кон.} = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

?

- ***Найдите объем конуса, если радиус его основания равен трем, а образующая равна пяти.***



Задача.



Дано:

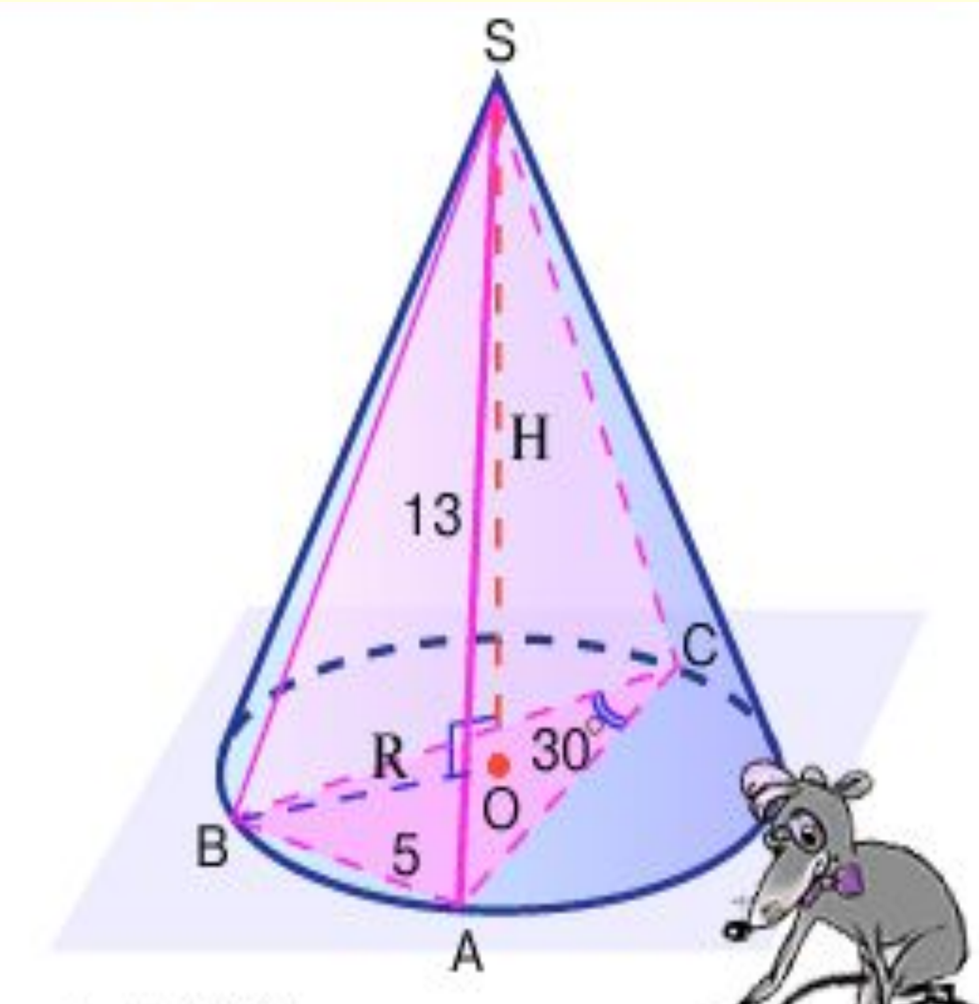
SABC – пирамида, вписанная в конус

SA = 13, AB = 5,

$\angle$ ACB = 30^0.

Найти: $V_{конуса}$

1) Найдем радиус конуса по теореме синусов.



Из ΔABC:

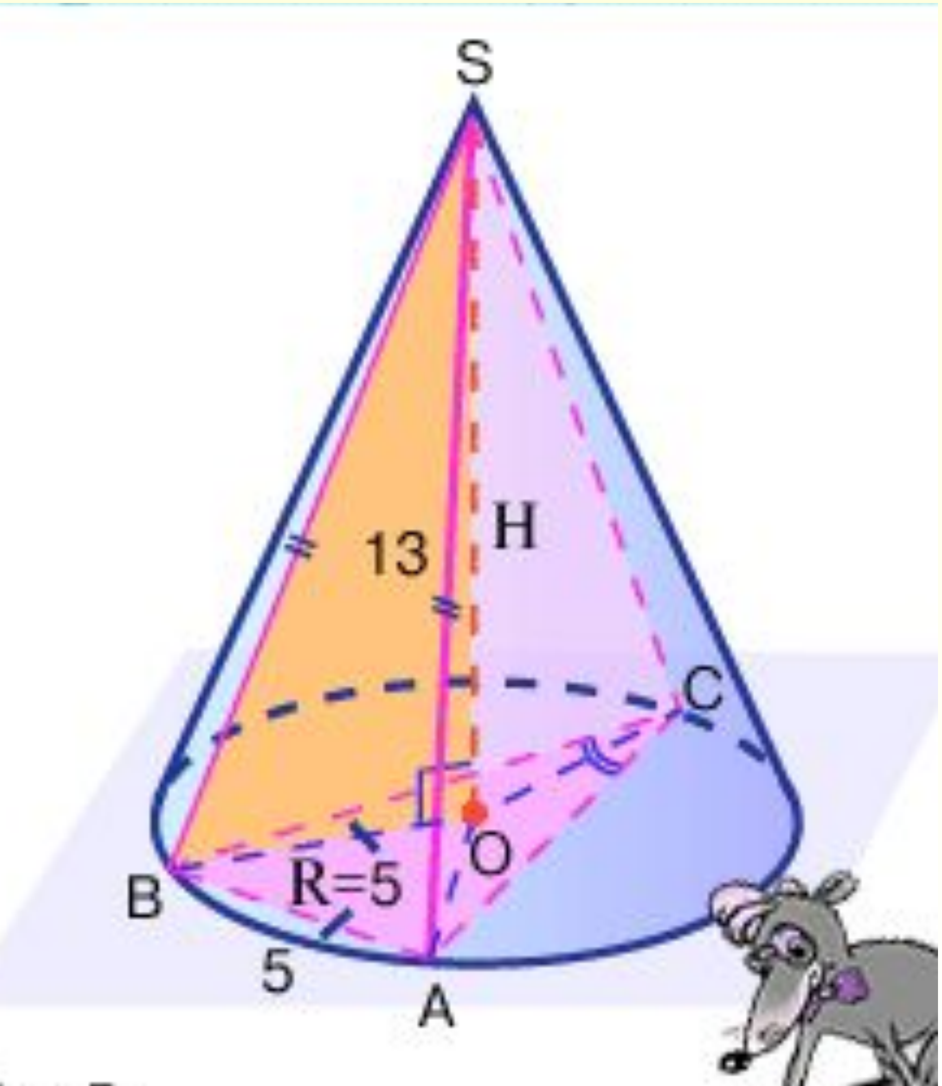
$$\frac{AB}{\sin\angle ACB}=2R$$ (по теореме синусов)

$$\frac{5}{\sin 30^0}=2R$$

$$\sin 30^0=\frac{1}{2}$$

$$R=5$$

2) У пирамиды, вписанной в конус, высота равна высоте конуса и попадает в центр описанной окружности. Найдем высоту пирамиды.

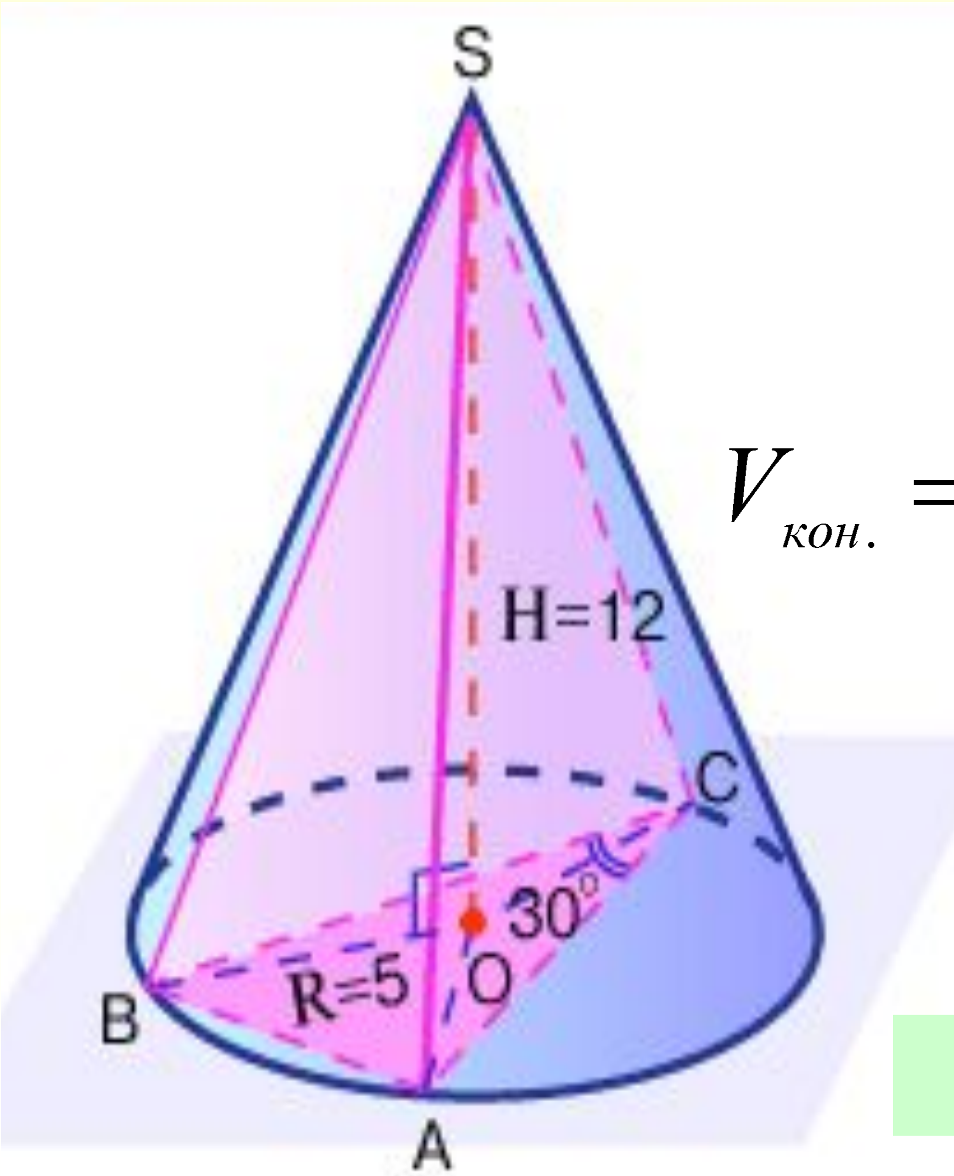


$$\text{Из } \Delta SOB:$$

$$SB^2 = R^2 + H^2$$

$$H = \sqrt{SB^2 - R^2} = 12$$

3) Определим объем конуса.



$$V_{кон.} = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$V_{кон.} = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 12 = \underline{\underline{100\pi}}$$