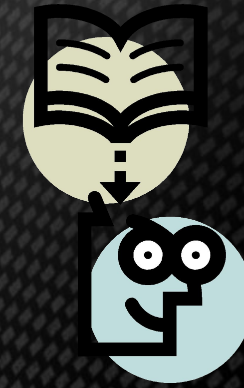


Доверительный интервал и доверительная вероятность.

Выполнила: студентка

Адутова А.Р.

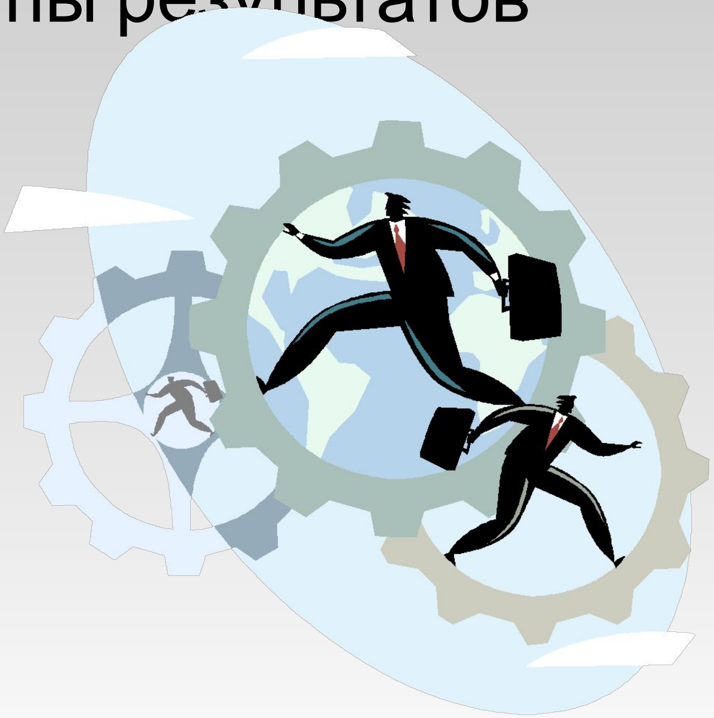
Группы 3ТБб-02-21оп

Проверил: преподаватель

Шестаков Н.И.

На практике мы всегда имеем дело с ограниченным числом измерений, и задача, которая всегда стоит перед оператором, состоит в том, как оценить точность измерений, т.е. найти его меру приближения к истинному значению на основании группы результатов наблюдения.

- В результате отдельных измерений мы получаем некоторые строго фиксированные результаты (точки) измеряемой величины. Их значения являются случайными с некоторым распределением.



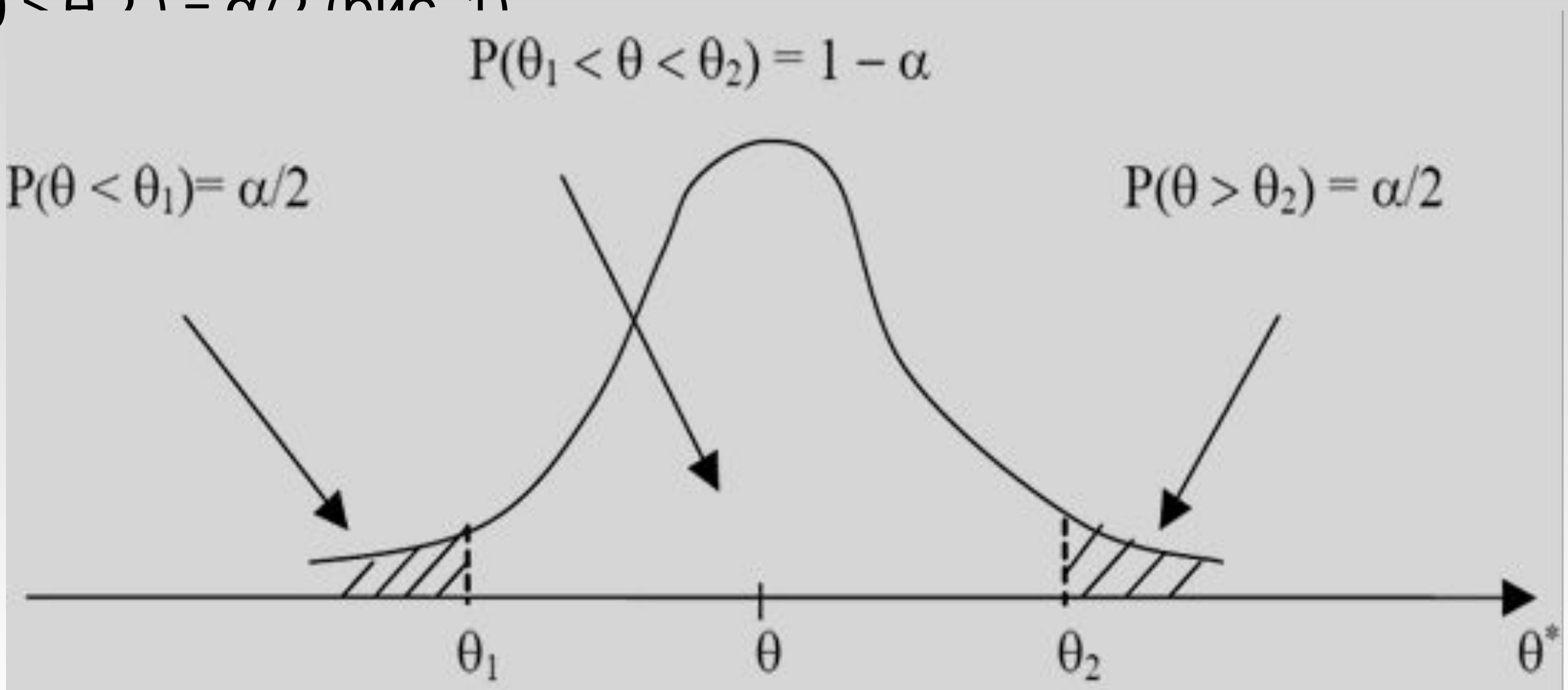
Понятие о доверительных интервалах.

После получения точечной оценки θ* желательно иметь данные о надежности такой оценки. Особенно важно иметь сведения о точности оценок для небольших выборок. Поэтому точечная оценка может быть дополнена интервальной оценкой — интервалом (θ1, θ 2), внутри которого с наперед заданной вероятностью γ находится точное значение оцениваемого параметра θ.

Зачастую для определения доверительного интервала заранее выбирают число $\alpha = 1 - \gamma$, $0 < \alpha < 1$, называемое уровнем значимости, и находят два числа θ_1 и θ_2, зависящих от точечной оценки θ^*, такие, что

$P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = 1 - \alpha = \gamma$.   (1)

В этом случае говорят, что интервал (θ_1, θ_2) накрывает неизвестный параметр θ с вероятностью $(1 - \alpha)$, или в $100(1 - \alpha)\%$ случаев. Границы интервала θ_1 и θ_2 называются доверительными, и они обычно находятся из условия $P(\theta < \theta_1) = P(\theta > \theta_2) = \alpha/2$ (рис. 1)



- Длина доверительного интервала, характеризующая точность интервальной оценки, зависит от объема выборки n и надежности γ (уровня значимости γ= 1 - α). При увеличении величины n длина доверительного интервала уменьшается, а с приближением надежности γ к единице — увеличивается.

  Выбор α (или γ = 1 - α) определяется конкретными условиями.

  Обычно используется α=0,1; 0,05; 0,01, что соответствует 90, 95, 99%-м доверительным интервалам.

Общая схема построения доверительного интервала:

1. Из генеральной совокупности с известным распределением f(x, θ) случайной величины X извлекается выборка объема n, по которой находится точечная оценка θ * параметра θ.
2. Строится случайная величина Y(θ), связанная с параметром θ и имеющая известную плотность вероятности f(y, θ).
3. Задается уровень значимости α.
4. Используя плотность вероятности случайной величи $P\left(c_1 < Y(\theta) < c_2 = \int_{c_1}^{c_2} f(y,\theta)dy\right) = 1-\alpha$ кие, что

(2)

$$P(Y(\theta) < c_1) = \alpha/2; \qquad P(Y(\theta) < c_2) = \alpha/2.$$

- Интервальная оценка также носит случайный характер, так как она напрямую связана с результатами выборки. Однако она позволяет сделать следующий вывод. Если построен доверительный интервал, который с надежностью γ = 1 - α накрывает неизвестный параметр, и его границы рассчитываются по К выборкам одинакового объема п, то в (1-α)К случаях построенные интервалы накроют истинное значение исследуемого параметра.

Доверительный интервал для математического ожидания нормальной случайной величины при известной дисперсии.

Пример 1. На основе продолжительных наблюдений за весом X пакетов орешков, заполняемых автоматически, установлено, что стандартное отклонение веса пакетов σ = 10 г. Взвешено 25 пакетов, при этом их средний вес составил $\bar{x}$ = 244 г. В каком интервале с надежностью 95 % лежит истинное значение среднего веса пакетов?

Логично считать, что случайная величина X имеет нормальный закон распределения: $X \sim N(m,\ 10)$. Для определения 95%-го доверительного интервала найдем критическую точку $u_{\frac{\alpha}{2}} = u_{0,025}$ из приложения 1 по соотношению

$$\Phi(u_{0.025}) = \frac{0.95}{2} = 0.475 \to u_{0.025} = 1.96.$$

Тогда по формуле (3) построим доверительный интервал:

$$\left(244 - 1,96 * \frac{10}{5}; 244 + 1,96 * \frac{10}{5}\right) = (240,8; 247,92).$$

Доверительный интервал для математического ожидания нормальной случайной величины при неизвестной дисперсии.

Пример 2.

Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания нормально распределенного признака, если известны: σ = $\overline{x_B}$ = 5,4; n = 10; γ = 0,95.

Решение.

2Φ(t) = 0,95, Φ(t) = 0,5*0,95=0,475.

Найдя t = 1,96, получим $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1.96*2}{\sqrt{10}} = 1.24.$

Доверительный интервал

$(\overline{x_B} - \delta; \overline{x_B} + \delta) = (5,4-1,24; 5,4+1,24)=(4,16; 6,64).$

Генеральная совокупность.

- Генеральной совокупностью называется множество всех возможных значений или реализаций исследуемой случайной величины при данном реальном комплексе условий.
- Выборкой называют часть генеральной совокупности, отобранную для изучения.
- Изучение всей генеральной совокупности во многих случаях либо невозможно, либо нецелесообразно в силу больших материальных затрат, поэтому на практике часто приходится иметь дело с выборками небольшого объема п<10-20. В этом случае используемый обычно метод построения интервальной оценки для генеральной средней и генеральной доли неприменим в силу двух обстоятельств:

1) необоснованным становится вывод о нормальном законе распределения выборочных средней   и доли w, так как он основан на центральной предельной теореме при больших п;

2) необоснованной становится замена неизвестных генеральной дисперсии σ2 и доли р их точечными оценками   (или) или w, так как в силу закона больших чисел (состоятельности оценок) эта замена возможна лишь при больших п .

Построение доверительного интервала для генеральной средней по малой выборке.

Задача построения доверительного интервала для генеральной средней может быть решена, если в генеральной совокупности рассматриваемый признак имеет нормальное распределение.

Теорема. Если признак (случайная величина) X имеет нормальный закон распределения с параметрами $M(x) = x_0$, $\chi_x{}^2 = \chi^2$, т.е. $N(\overline{x_0}, \chi^2)$, то выборочная средняя $\bar{x}$ при любом n имеет нормальный закон распределения $N\left(\overline{x_0}, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Используя свойства математического ожидания и дисперсии, получим, что:

$$M(t) = M\left(\frac{\bar{x}-\overline{x_0}}{\sigma}\sqrt{n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left[M(\bar{x}) - M(\overline{x_0})\right] = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\bar{x} - \overline{x_0}\right) = 0,$$

$$\sigma_t^2 = D(t) = D\left(\frac{\bar{x}-\overline{x_0}}{\sigma}\sqrt{n}\right)\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)^2\left[D(\bar{x}) - D(\overline{x_0})\right] = \frac{n}{\sigma^2}\left(\frac{\sigma^2}{n} + 0\right) = 1.$$

- Пример 5. Для контроля срока службы электроламп из большой партии было отобрано 17 электроламп. В результате испытаний оказалось, что средний срок службы отобранных ламп равен 980 ч, а среднее квадратическое отклонение их срока службы — 18 ч. Необходимо определить: а) вероятность того, что средний срок службы ламп во всей партии отличается от среднего срока службы отобранных для испытаний ламп не более чем на 8 ч (по абсолютной величине); б) границы, в которых с вероятностью 0,95 заключен средний срок службы ламп во всей партии.
- Решение.

Имеем по условию п = 20, = 980(ч), S = 18 ч.

а) Зная предельную ошибку малой выборки = 8 (ч), найдем из соотношения (9):

$$t_{\gamma,n-1} = \frac{\Delta_{\text{м.в.}}}{S}\sqrt{n-1} = \frac{8}{18}\sqrt{17-1} = 1.78.$$

Теперь искомая доверительная вероятность $P(|\bar{x} - \overline{x_0}| \le 8) = \theta(1.78, 16) = 0.906$

, а $\theta(1.78, 16)$ находится по таблице значений при числе степеней свободы ν = 16.

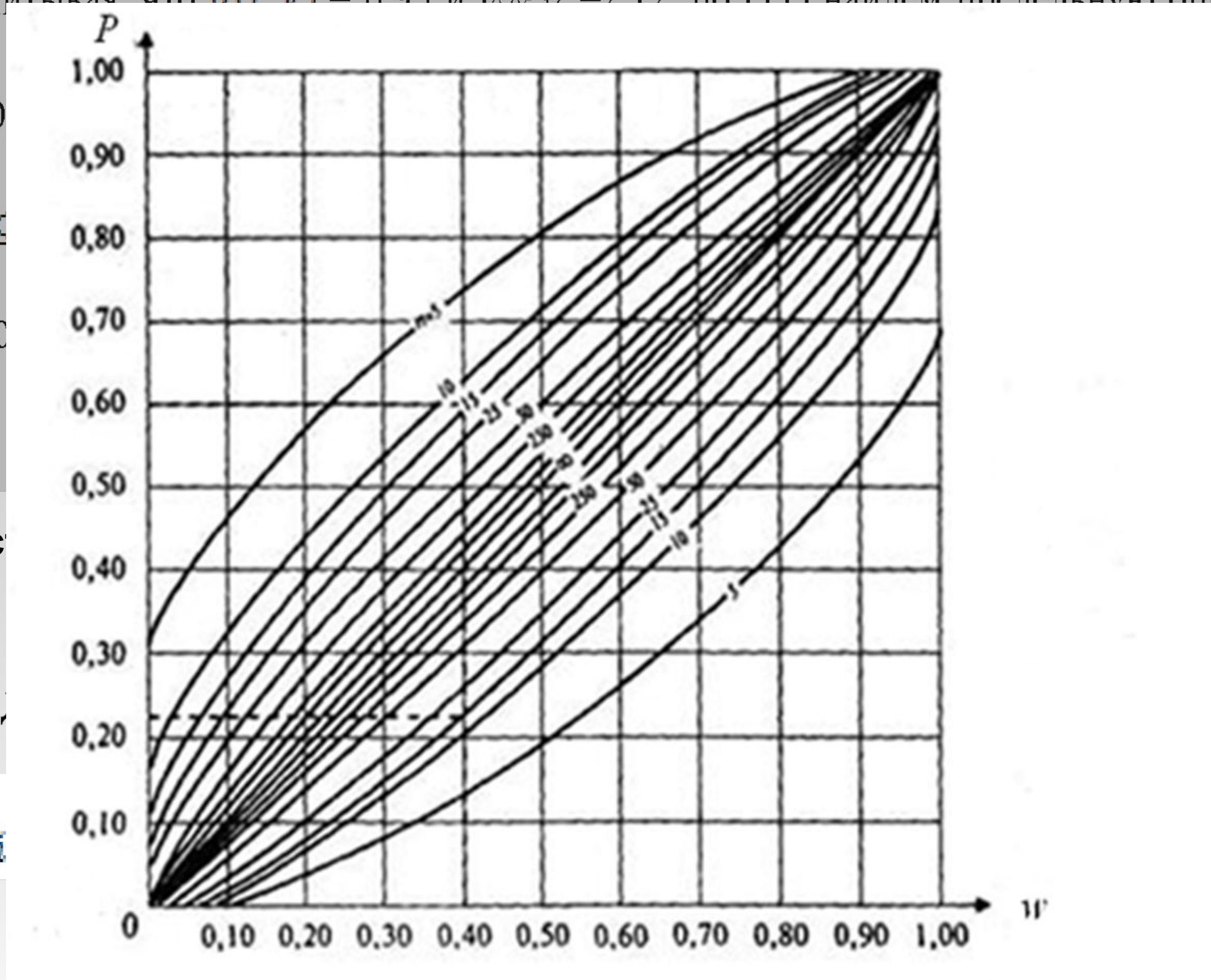
Итак, вероятность того, что расхождение средних сроков службы электроламп в выборке и во всей партии не превысит 8 ч (по абсолютной величине), равна 0,906.

б) Учитывая, что $\theta(t,\nu) = 0{,}95$ и $t_{0,95;16} = 2{,}12$, по (11) найдем предельную ошибку

малой выбо ... рвал

$980 - 9.5 \leq$ ... 0,95

средний сро



Пос

Опред ... ,

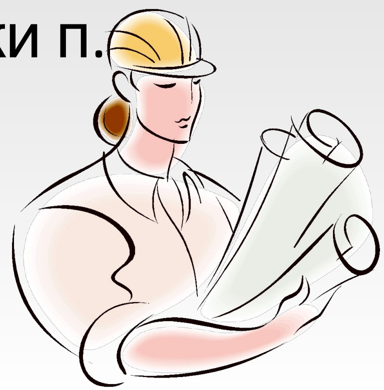
$\sum_{m=\tilde{m}}^{n}$

где ... **их**

- Пример 6. Опрос случайно отобранных 15 жителей города показал, что 6 из них будут поддерживать действующего мэра на предстоящих выборах. Найти границы, в которых с надёжностью 0,9 заключена доля граждан города, которые будут поддерживать на предстоящих выборах действующего мэра.

Решение.

Выборочная доля жителей, поддерживающих мэра, w = т/п = 6/15 = 0,4 . По рисунку 3 для γ = 0,9 находим при w = 0,4 и для п = 15 по нижнему графику р1=0,23, а по верхнему — р2 = 0,60, т.е. доля жителей города, поддерживающих мэра, с надёжностью 0,9 заключена в границах от 0,23 до 0,60. Очевидно, что более точный ответ на вопрос задачи может быть получен при увеличении объёма выборки п.



Заключение

- В данной работе рассмотрено понятие доверительного интервала и его разновидности в метрологии.
- Провести бесконечное число измерений для получения верного результата в реальной жизни невозможно, поэтому важно дать объективное представление результатов ограниченного числа измерений, чему и призван помочь изучаемый подход.
- Цель любого оценивания состоит в получении наиболее точного значения исследуемой характеристики. Доверительный интервал позволяет с определенной точностью получить распределение параметра, что дает хорошее