

Электростатика

Кузнецов Сергей Иванович
доцент кафедры ОФ ЕНМФ ТПУ

Тема 2. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА

2.1. Силовые линии электростатического поля

2.2. Поток вектора напряженности

2.3. Теорема Остроградского-Гаусса

2.4. Дифференциальная форма теоремы 2.4.

Дифференциальная форма теоремы 2.4.

Дифференциальная форма теоремы

Остроградского-Гаусса

2.5. Вычисление электростатических полей с

помощью теоремы Остроградского 2.5.

Вычисление электростатических полей с

помощью теоремы Остроградского - Гаусса

2.5.1. Поле бесконечной однородно заряженной

2.1. Силовые линии электростатического поля

- ◆ Теорема Остроградского-Гаусса, которую мы докажем и обсудим позже, устанавливает связь между электрическими зарядами и электрическим полем. Она представляет собой более общую и более изящную формулировку закона Кулона.



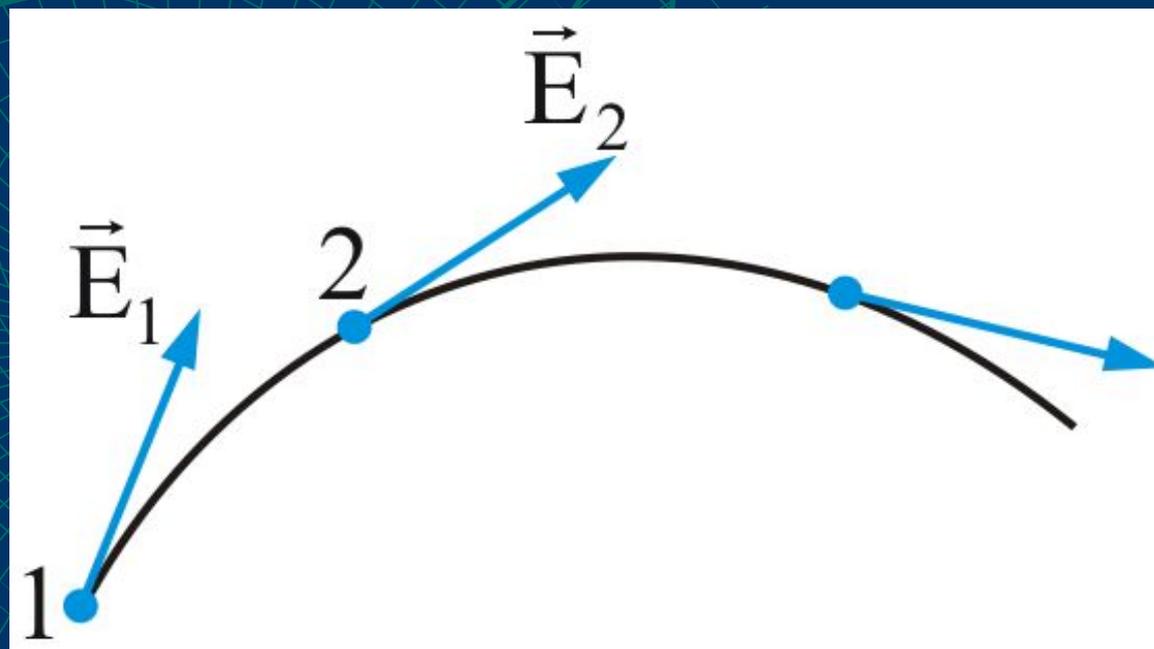
- ◆ **Остроградский Михаил Васильевич (1801 – 1862)**
- ◆ отечественный математик и механик. Учился в Харьковском ун-те (1816 – 1820), совершенствовал знания в Париже (1822 – 1827).
- ◆ Основные работы в области математического анализа, математической физики, теоретической механики. Решил ряд важных задач гидродинамики, теории теплоты, упругости, баллистики, электростатики, в частности задачу распространения волн на поверхности жидкости (1826 г.). Получил дифференциальное уравнение распространения тепла в твердых телах и жидкостях. Известен теоремой Остроградского-Гаусса в электростатике (1828 г.).



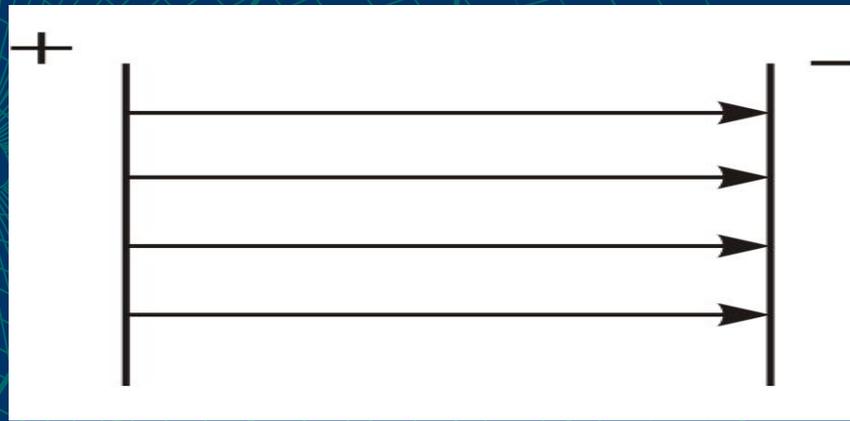
- ◆ **Гаусс Карл Фридрих (1777 – 1855)** немецкий математик, астроном и физик.
- ◆ Исследования посвящены многим разделам физики.
- ◆ В 1832 г. создал абсолютную систему мер (СГС), введя три основных единицы: единицу времени – 1 с, единицу длины – 1 мм, единицу массы – 1 мг.
- ◆ В 1833 г. совместно с В. Вебером построил первый в Германии электромагнитный телеграф.
- ◆ Еще в 1845 г. пришел к мысли о конечной скорости распространения электромагнитных взаимодействий. Изучал земной магнетизм, изобрел в 1837 г. униполярный магнитометр, в 1838 г. – бифилярный. В 1829 г.
- ◆ Сформулировал принцип наименьшего принуждения (принцип Гаусса).
- ◆ Один из первых высказал в 1818 г. предположение о возможности существования неевклидовой геометрии.

- ◆ Основная ценность теоремы Остроградского-Гаусса состоит в том, что она позволяет *глубже понять природу электростатического поля и устанавливает более общую связь между зарядом и полем.*

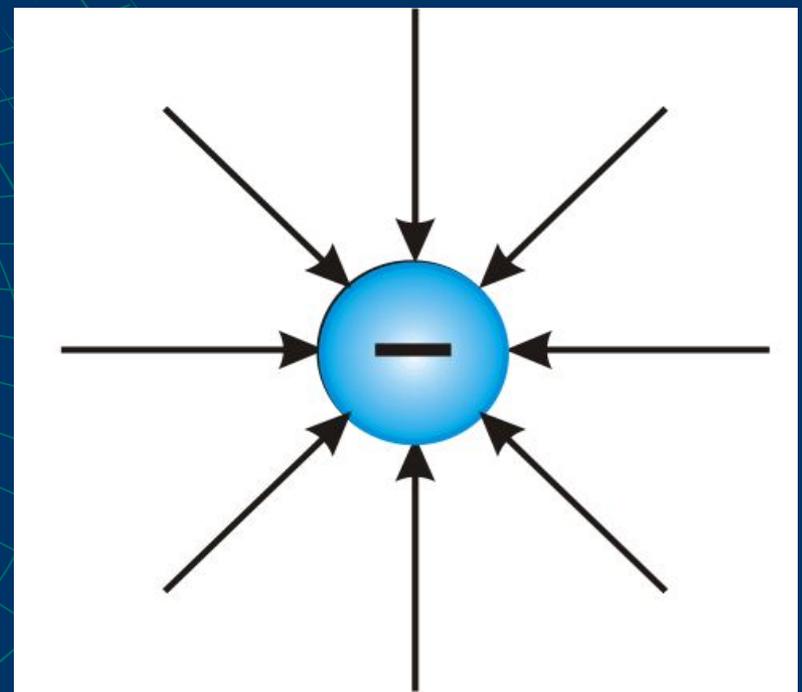
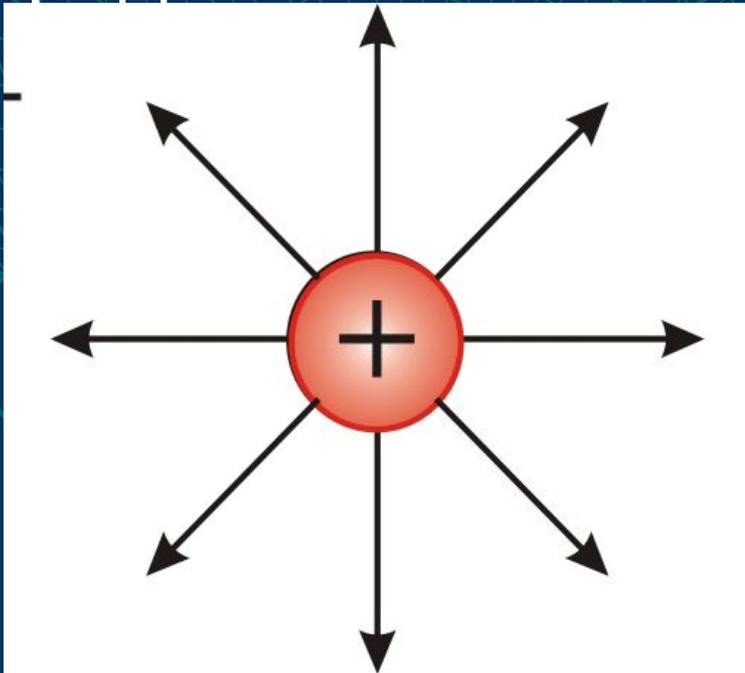
- ◆ **СИЛОВЫЕ ЛИНИИ** – ЭТО ЛИНИИ, касательная к которым в любой точке поля совпадает с направлением вектора напряженности



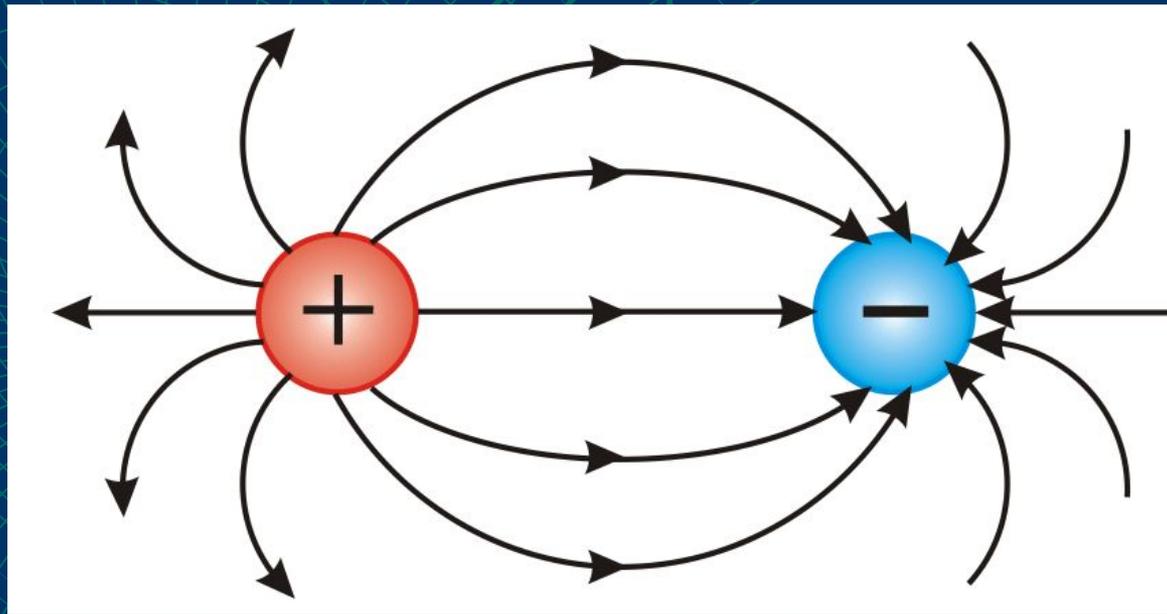
- ◆ **Однородным** называется электростатическое поле, во **всех точках которого напряженность одинакова по величине и направлению**, т.е. Однородное электростатическое поле изображается параллельными силовыми линиями на равном расстоянии друг от друга

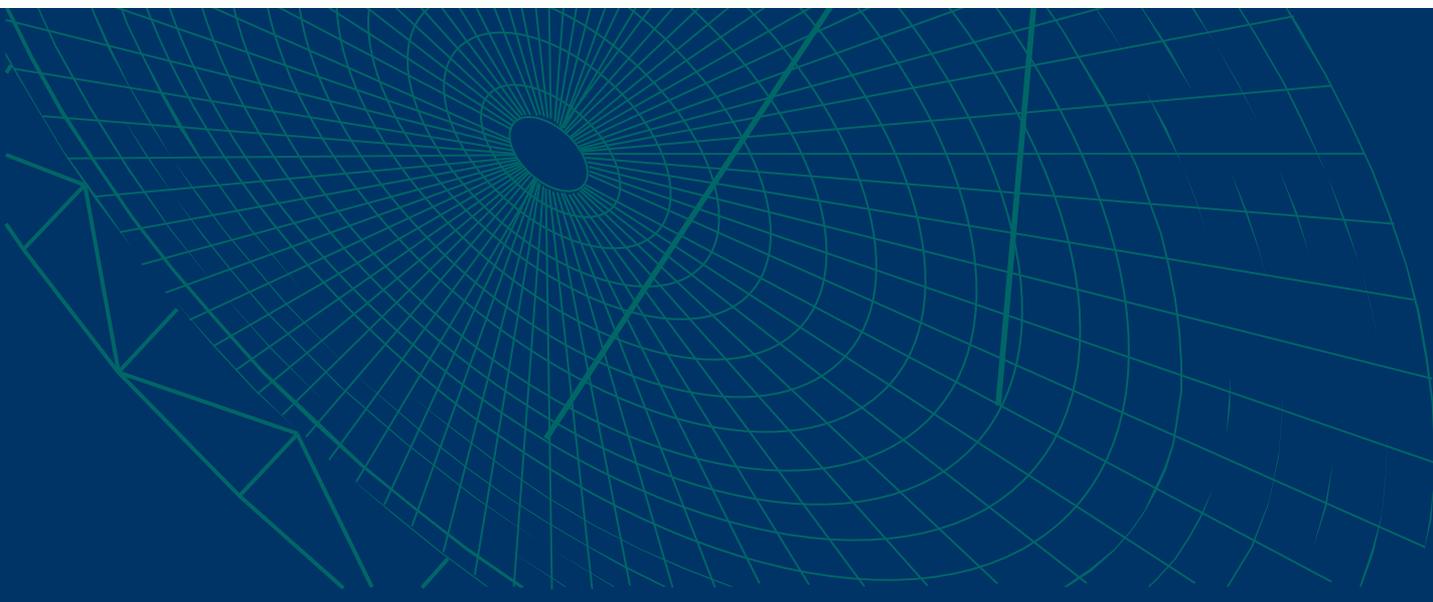
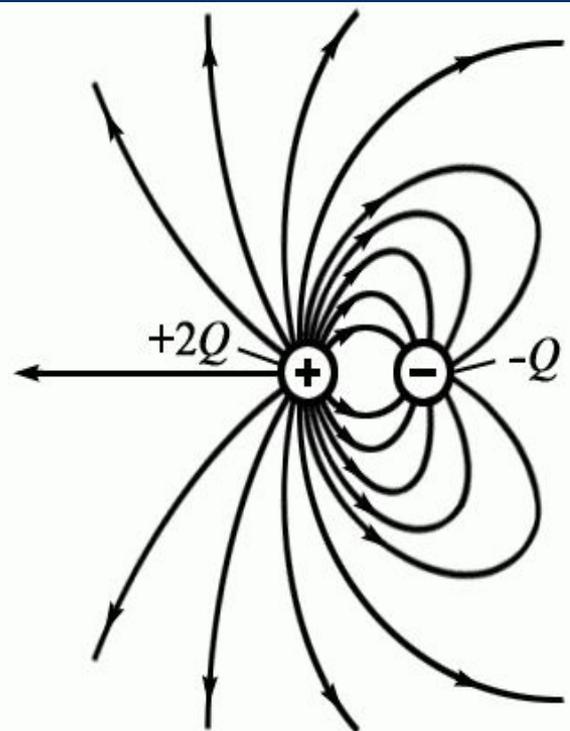
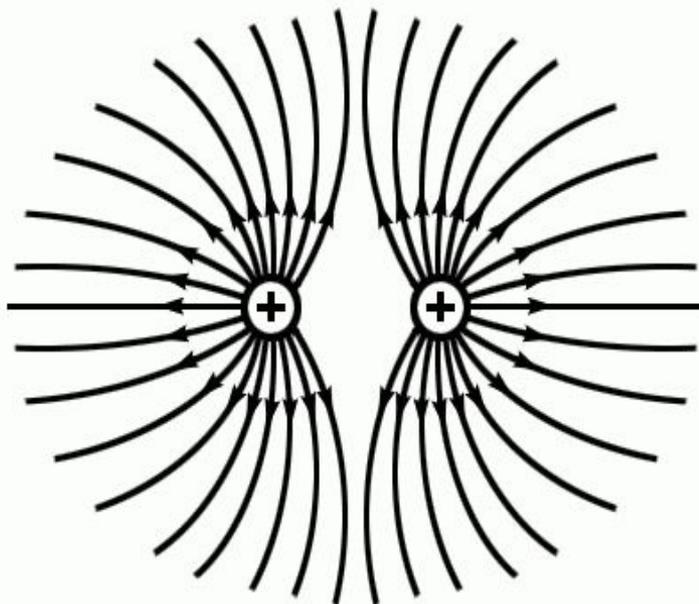
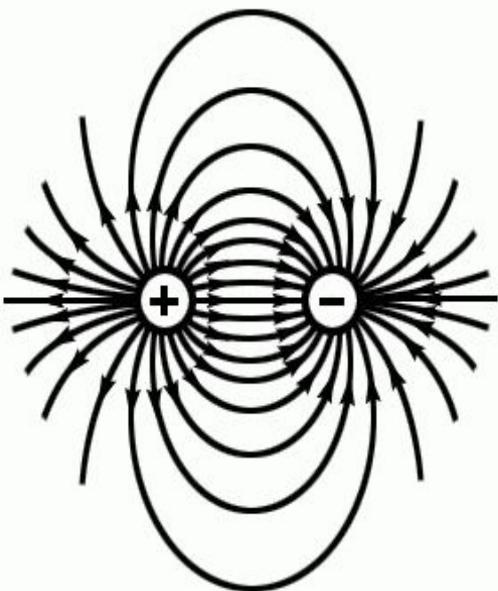


В случае точечного заряда, линии напряженности исходят из положительного заряда и уходят в бесконечность; и из бесконечности входят в отрицательный заряд. Т.к. $E \sim 1/r^2$, то густота силовых линий обратно пропорциональна квадрату расстояния от заряда



- ◆ Для системы зарядов, как видим, силовые линии направлены от положительного заряда к отрицательному



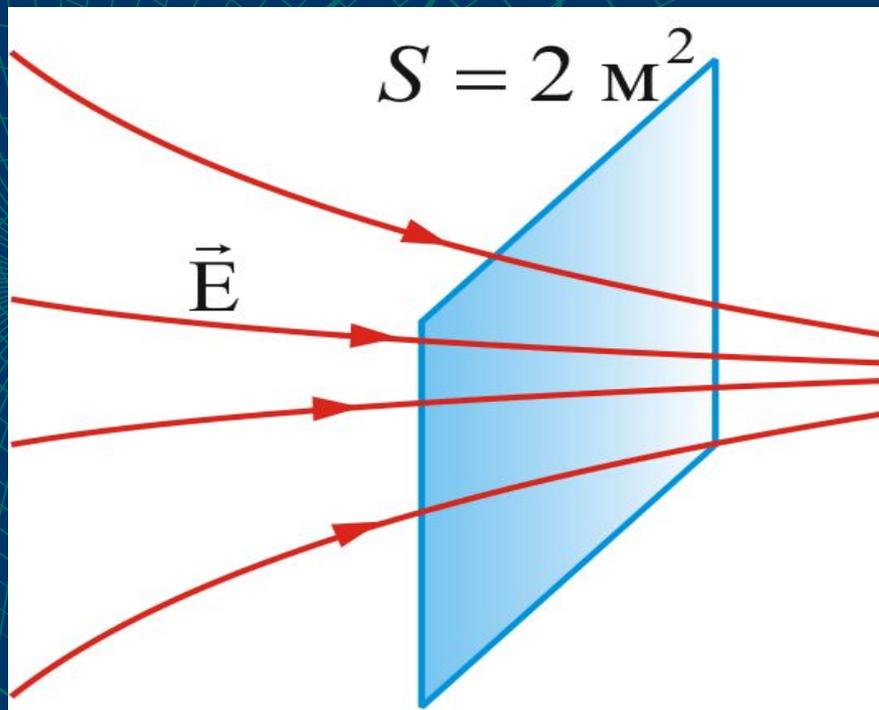


- ◆ Густота силовых линий должна быть такой, чтобы единичную площадку, нормальную к вектору напряженности пересекало такое их число, которое равно модулю вектора напряженности $|\vec{E}|$, т.е.

$$|\vec{E}| = \frac{\text{число линий}}{S} = \frac{\Phi}{S}.$$

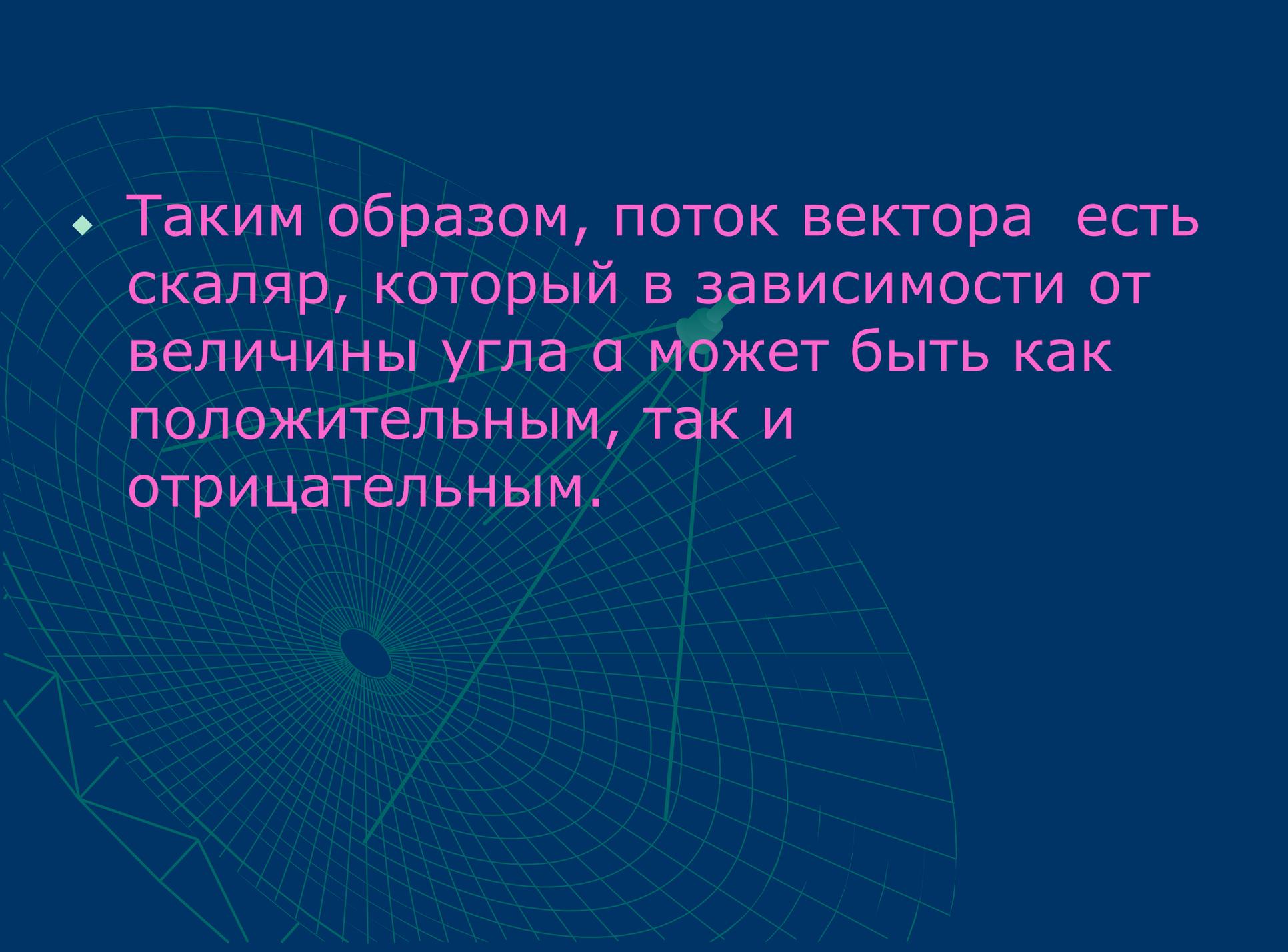
- ◆ если на рисунке выделить площадку $S = 2 \text{ м}^2$, то напряженность изображенного поля будет равна

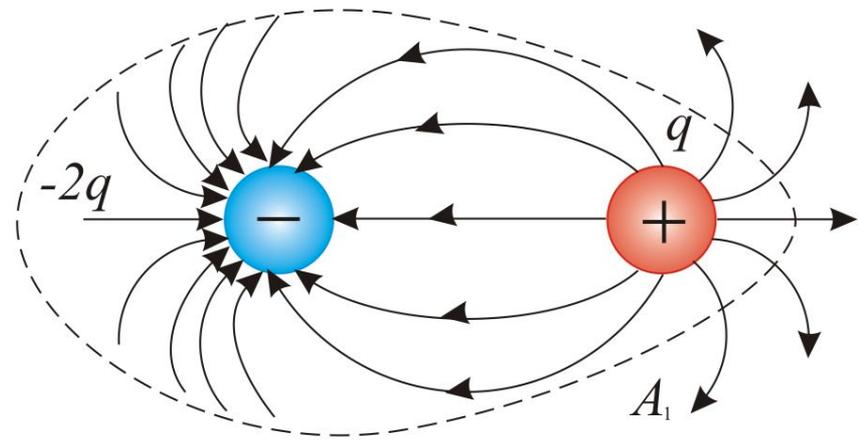
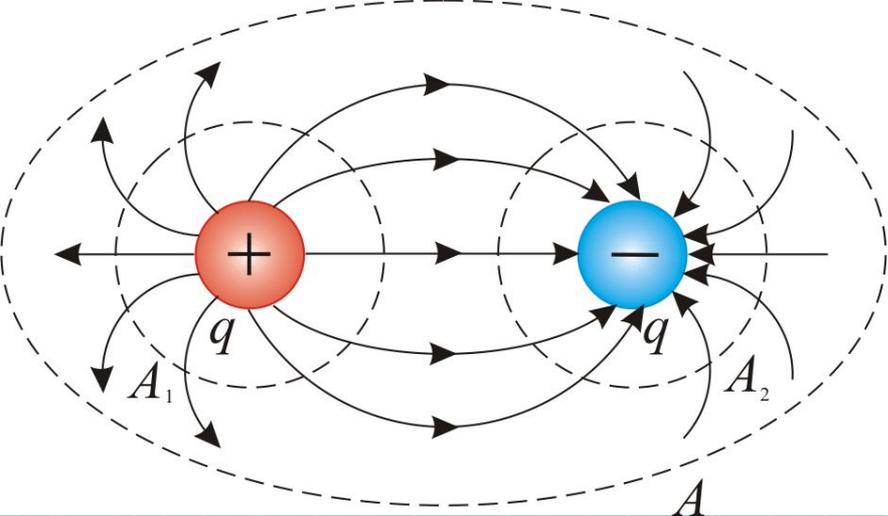
$$|\vec{E}| = \frac{\Phi}{S} = \frac{4}{2} = 2 \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$



2.2. Поток вектора напряженности

- ◆ Полное число силовых линий, проходящих через поверхность S называется **поток вектора напряженности** Φ через эту поверхность
- ◆ В векторной форме можно записать $\Phi_E = (\vec{E}, \vec{S})$ – скалярное произведение двух векторов, где вектор $\vec{S} = nS$.

- 
- ◆ Таким образом, поток вектора есть скаляр, который в зависимости от величины угла α может быть как положительным, так и отрицательным.



Для первого рисунка – поверхность A_1 окружает положительный заряд и поток здесь направлен наружу, т.е. $\Phi_E > 0$.

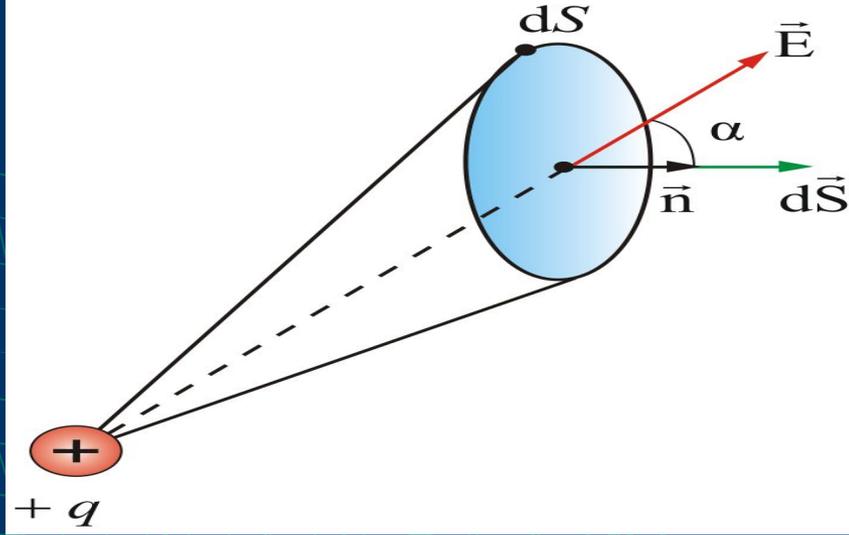
Поверхность A_2 – окружает отрицательный заряд, здесь $\Phi_E < 0$ и направлен внутрь.

Общий поток через поверхность A равен нулю.

Опишите второй рисунок самостоятельно.

2.3. Теорема Остроградского-Гаусса

- ◆ *Итак, по определению, поток вектора напряженности электрического поля равен числу линий напряженности, пересекающих поверхность S .*

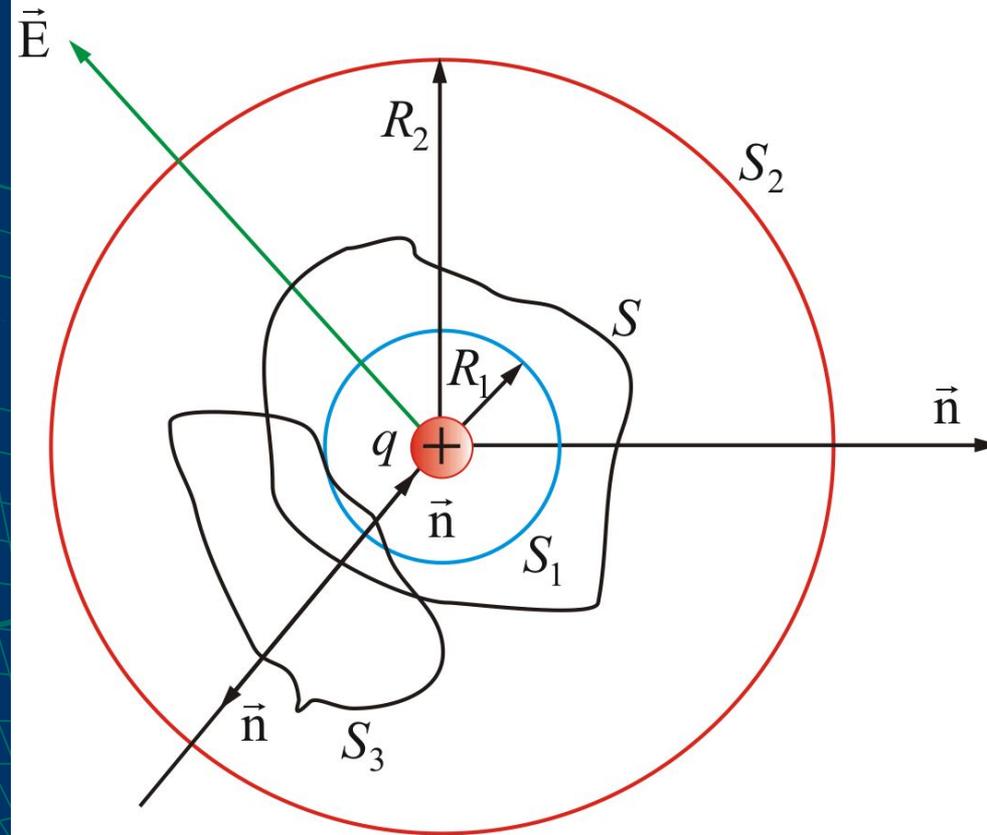


- ♦ поток вектора напряженности через произвольную элементарную площадку dS будет равен:

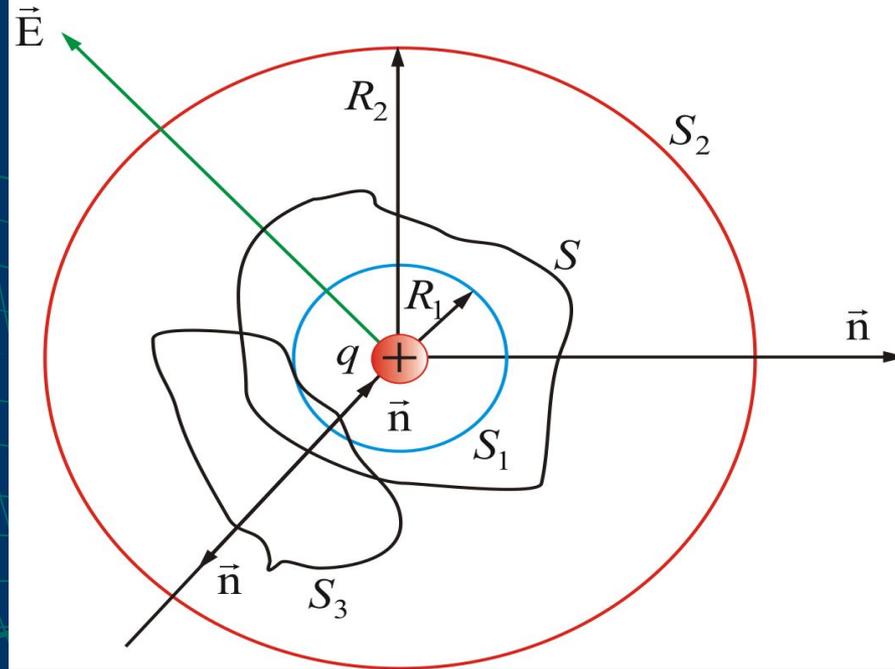
$$d\Phi_E = E dS \cos \alpha = E_n dS.$$

- ♦ Т.е. в однородном поле $\Phi_E = ES$.
- ♦ В произвольном электрическом поле

$$\Phi_E = \int_S E_n dS = \int_S \vec{E} d\vec{S}.$$

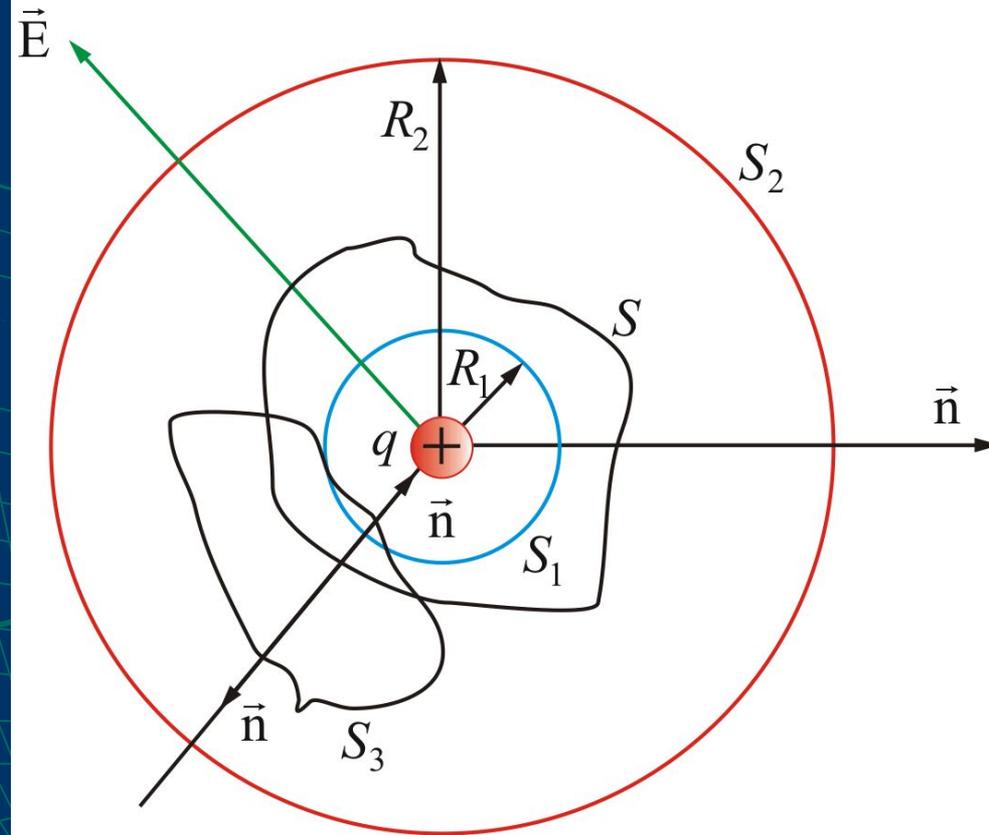


- ◆ Подсчитаем поток вектора через произвольную замкнутую поверхность S , окружающую точечный заряд q .
Окружим заряд q сферой S_1 .



- ◆ Центр сферы совпадает с центром заряда. Радиус сферы S_1 равен R_1 .
- ◆ В каждой точке поверхности S_1 проекция E на направление внешней нормали одинакова и равна

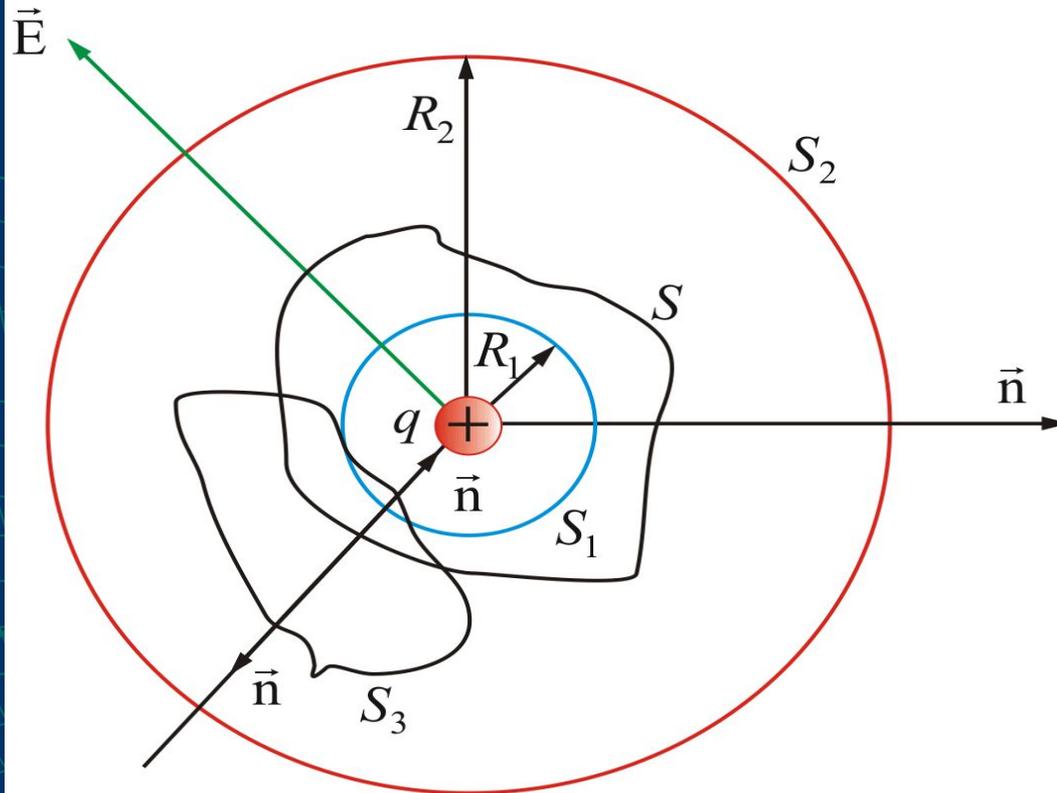
$$E_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_1^2}.$$



◆ Тогда поток через S_1

$$\Phi_E = \oint_{S_1} E_n dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} 4\pi R_1^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

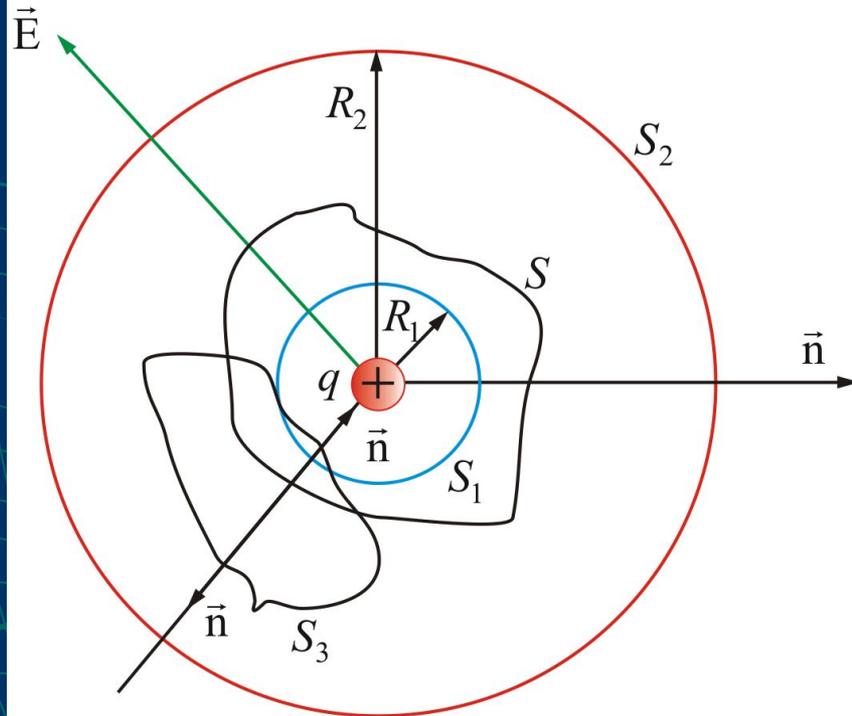
$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}.$$



- ◆ Подсчитаем поток через сферу S_2 , имеющую радиус R_2 :

$$\Phi_E = \oint_{S_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} 4\pi R_2^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}.$$



- Из непрерывности линии \vec{E} следует, что поток и через любую произвольную поверхность S будет равен этой же величине:

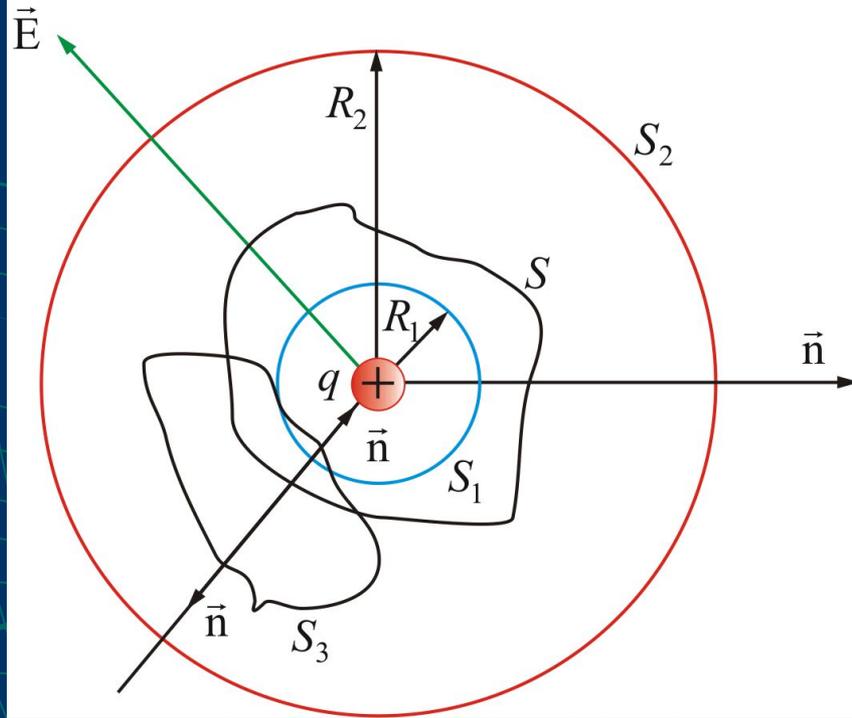
$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

- теорема Гаусса для одного заряда.

- ◆ Для любого числа произвольно расположенных зарядов, находящихся внутри поверхности:

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{\sum q}{\epsilon_0}$$

- ◆ – **теорема Гаусса для нескольких зарядов.**
- ◆ **Поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность в вакууме равен алгебраической сумме всех зарядов, расположенных внутри поверхности, деленной на ϵ_0 .**



Полный поток проходящий через S_3 , не охватывающую заряд q , равен нулю:

$$\Phi_3 = 0$$

- ◆ Таким образом, для точечного заряда q , полный поток через любую замкнутую поверхность S будет равен:

- ◆ $\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$ – если заряд расположен внутри замкнутой поверхности;
- ◆ $\Phi_E = 0$ – если заряд расположен вне замкнутой поверхности;
- ◆ этот результат не зависит от формы поверхности, и знак потока совпадает со знаком заряда.

- ◆ Электрические заряды могут быть «размазаны» с некоторой **объемной плотностью** различной в разных местах пространства: $\rho = dq / dV$

- ◆ Здесь dV – **физически бесконечно малый объем**, под которым следует понимать такой объем, который с одной стороны достаточно мал, чтобы в пределах его плотность заряда считать одинаковой, а с другой – достаточно велик, чтобы не могла проявиться дискретность заряда, т.е. то, что любой заряд кратен целому числу элементарных зарядов электрона или протона .

- ◆ Суммарный заряд объема dV будет равен:

$$\sum q_i = \int \rho dV.$$

- ◆ Тогда из теоремы Гаусса можно получить:

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

- ◆ – это ещё одна форма записи **теоремы Остроградского-Гаусса**, если заряд неравномерно распределен по объему.

2.4. Дифференциальная форма теоремы Остроградского-Гаусса

- Пусть заряд распределен в пространстве ΔV , с объемной плотностью $\langle \rho \rangle$ Тогда

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{\langle \rho \rangle \Delta V}{\epsilon_0}$$

$$\frac{1}{\Delta V} \oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{\langle \rho \rangle}{\epsilon_0}$$

- ◆ Теперь устремим $\Delta V \rightarrow 0$, стягивая его к интересующей нас точке. Очевидно, что при этом $\langle \rho \rangle$ будет стремиться к ρ в данной точке, т.е.

$$\frac{\langle \rho \rangle}{\epsilon_0} \rightarrow \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

- ◆ Величину, являющуюся пределом отношения $\oint \vec{E} d\vec{S}$ к ΔV , при $\Delta V \rightarrow 0$, называют **дивергенцией поля E** и обозначается $\text{div} \vec{E}$.

- ◆ **Дивергенция поля \mathbf{E}**

- ◆
$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} \quad (2.4.1)$$

- ◆ Аналогично определяется дивергенция любого другого векторного поля.

- ◆ Из этого определения следует, что *дивергенция является скалярной функцией координат.*

- ◆ В декартовой системе координат

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

- ◆ Итак,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (2.4.3)$$

- ◆
- ◆ **Это теорема Остроградского-Гаусса в дифференциальной форме.**

- ◆ Написание многих формул упрощается, если ввести векторный дифференциальный оператор ∇ (Набла)

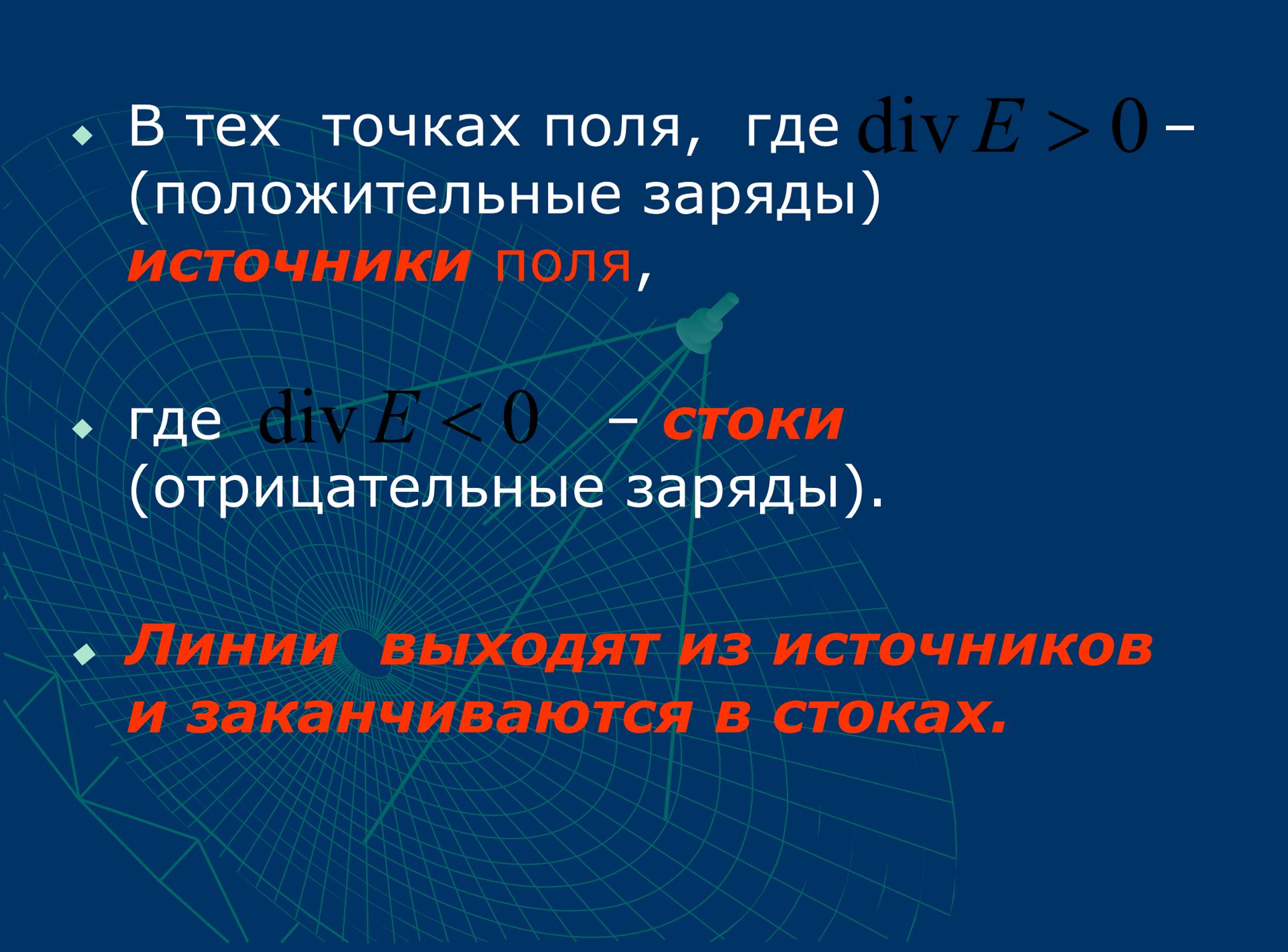
- ◆ $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$, где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – орты осей (единичные векторы).

- ◆ Сам по себе оператор смысла не имеет. Он приобретает смысл в сочетании с векторной или скалярной функцией, на которую символично умножается:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla_x E_x + \nabla_y E_y + \nabla_z E_z = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

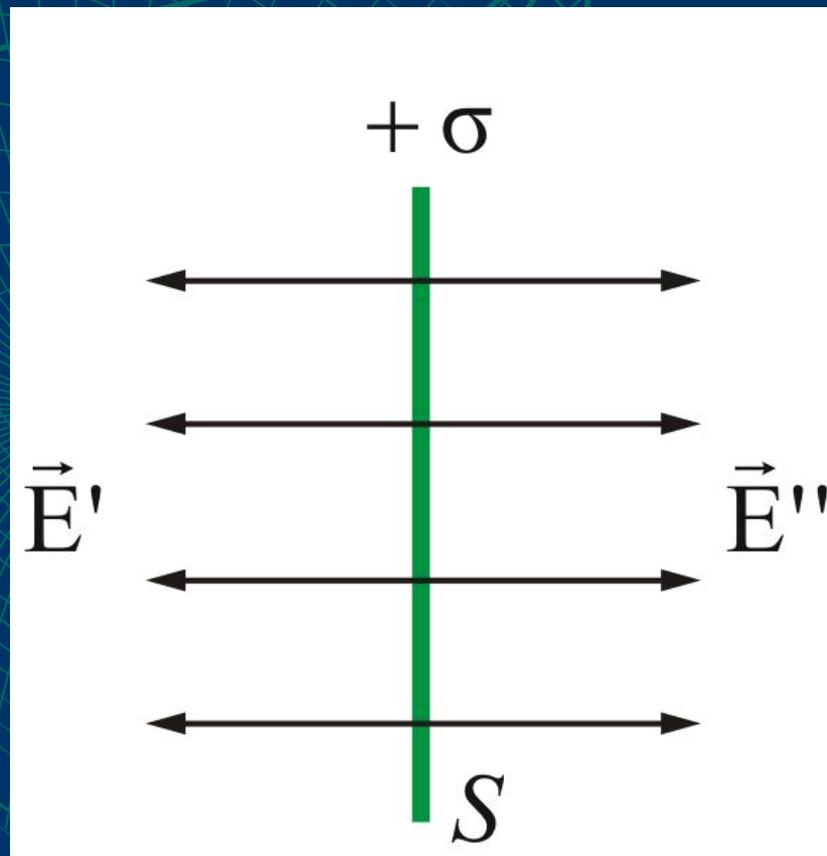
- ◆ **дифференциальная форма теоремы Остроградского-Гаусса.**

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

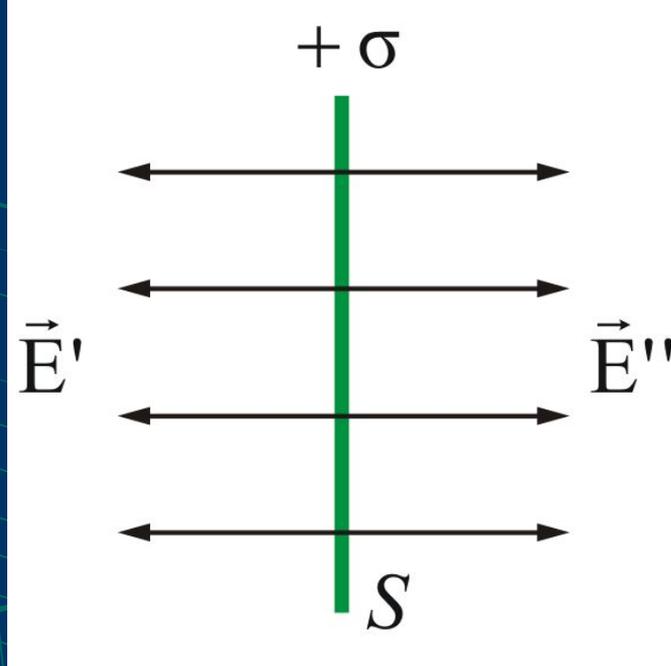
- 
- ◆ В тех точках поля, где $\text{div } E > 0$ – (положительные заряды) **ИСТОЧНИКИ** поля,
 - ◆ где $\text{div } E < 0$ – **СТОКИ** (отрицательные заряды).
 - ◆ **Линии выходят из источников и заканчиваются в стоках.**

2.5. Вычисление электрических полей с помощью теоремы Остроградского-Гаусса

2.5.1. Поле бесконечной однородно заряженной плоскости



$$\sigma = \frac{dq}{dS},$$

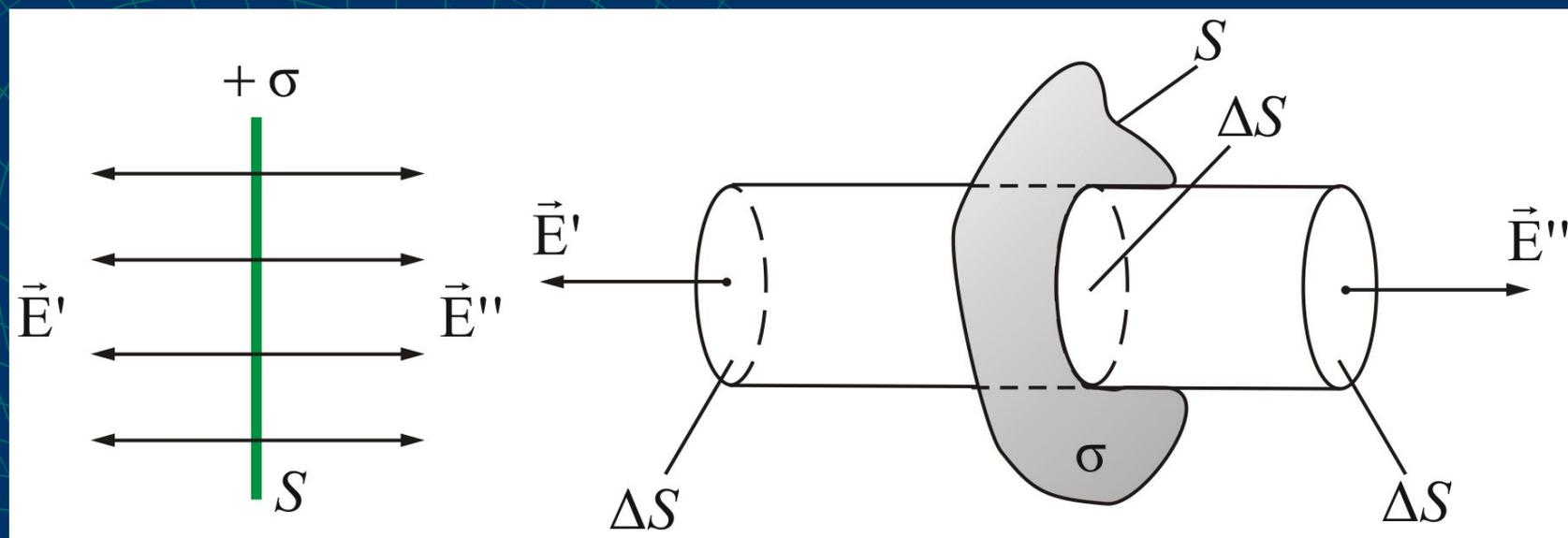


Поверхностная плотность заряда на произвольной плоскости площадью S определяется по формуле:

$$\sigma = \frac{dq}{dS},$$

dq – заряд, сосредоточенный на площади dS ;
 dS – физически бесконечно малый участок поверхности.

- ◆ Представим себе цилиндр с образующими, перпендикулярными плоскости, и основаниями ΔS , расположенными симметрично относительно плоскости



- ◆ Тогда

$$E' = E'' = E.$$

- ◆ Суммарный поток через замкнутую поверхность (цилиндр) будет равна:

$$\Phi_E = 2\Delta SE.$$

- ◆ Внутри поверхности заключен заряд. Следовательно, из теоремы Остроградского-Гаусса получим:

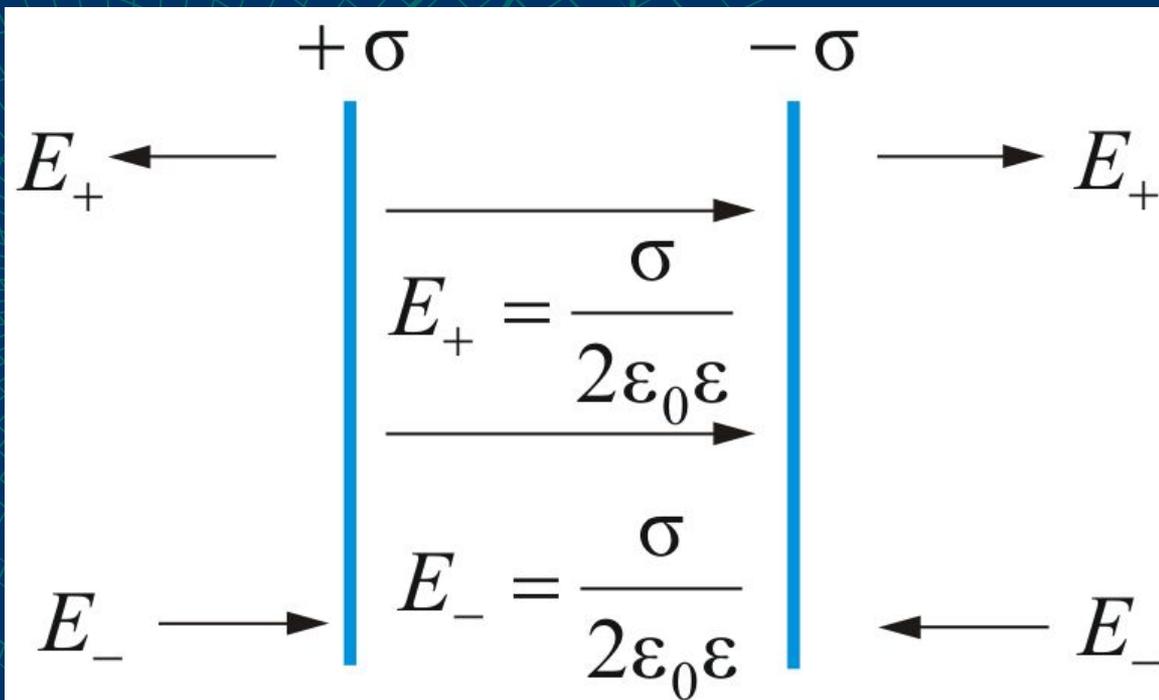
$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} = 2\Delta SE = \sigma\Delta S \frac{1}{\epsilon_0}$$

- ◆ откуда видно, что напряженность поля плоскости S равна:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (2.5.1)$$

2.5.2. Поле двух равномерно заряженных плоскостей

- Пусть две бесконечные плоскости заряжены разноименными зарядами с одинаковой по величине плотностью σ



- ◆ **Результирующее поле**, как было сказано выше, находится как суперпозиция полей, создаваемых каждой из плоскостей. Тогда *внутри плоскостей*

$$E = E_+ + E_- \quad \text{отсюда} \quad E = \sigma / \varepsilon_0$$

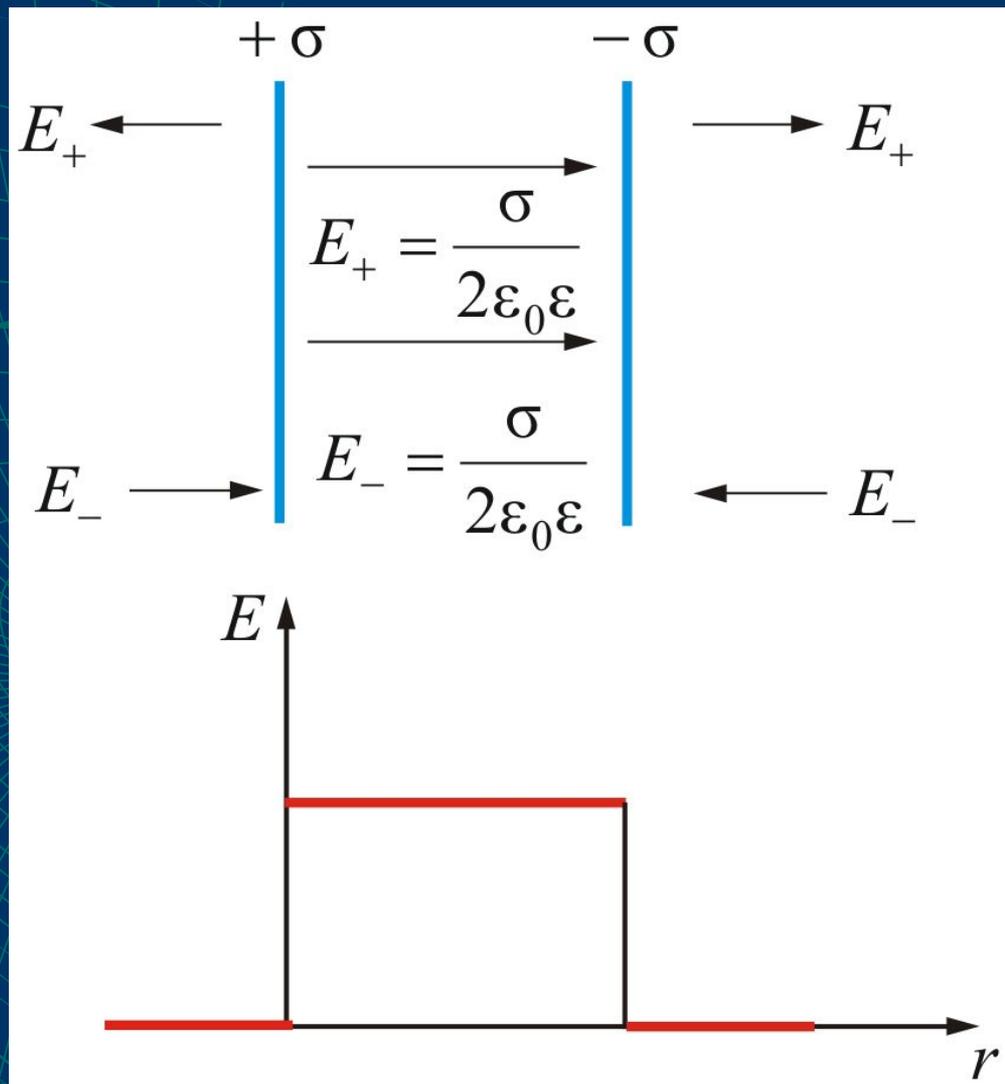
- ◆ **Вне плоскостей напряженность поля**

$$E = 0.$$

- ◆ Полученный результат справедлив и для плоскостей конечных размеров, если расстояние между плоскостями гораздо меньше линейных размеров плоскостей (плоский конденсатор).

● **Распределение напряженности**

электростатического поля между пластинами конденсатора показано на рисунке:



- ◆ Между пластинами конденсатора действует **сила взаимного притяжения** (на единицу площади пластин):

- ◆
$$F_{\text{ед}} = \frac{F}{S} = \frac{S\sigma E}{S}$$
 т.е.

$$F_{\text{ед}} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0\varepsilon}$$

- ◆ Механические силы, действующие между заряженными телами, называют **пондермоторными**.

- ◆ Сила притяжения между пластинами конденсатора:

$$F = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0},$$

- ◆ где S – площадь обкладок конденсатора.

- ◆ Т.к. $\sigma = \frac{q}{S} = E\varepsilon_0$

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} = \frac{\varepsilon_0 E^2 S}{2}$$

- ◆ Это формула для расчета **пондермоторной силы**

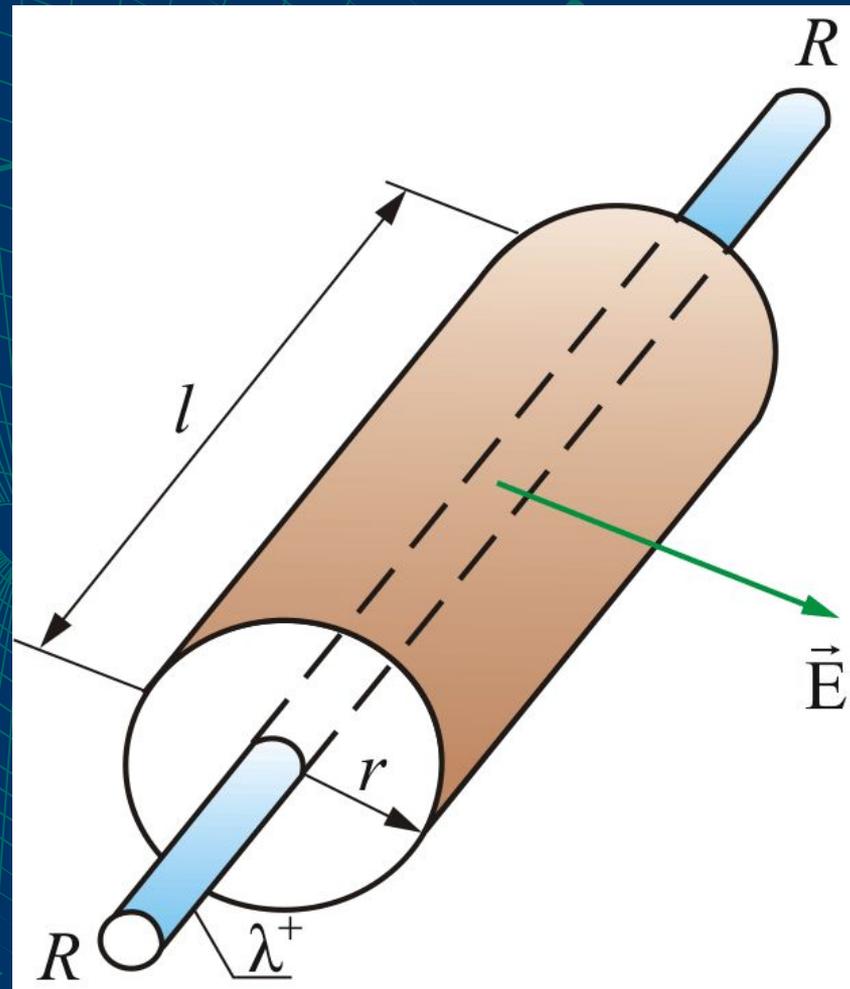
2.5.3. Поле заряженного бесконечного цилиндра (нити)

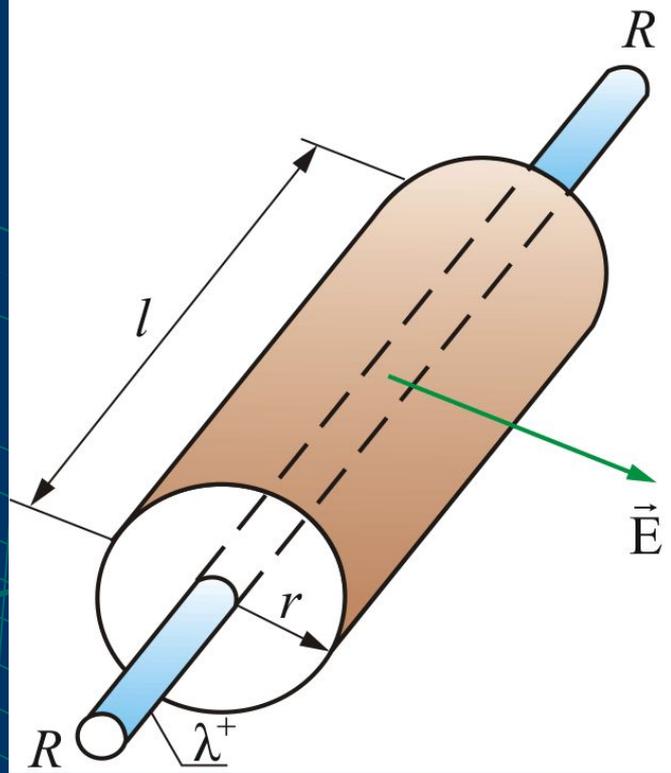
- ◆ Пусть поле создается бесконечной цилиндрической *поверхностью* радиуса R , заряженной с постоянной линейной плотностью

$$\lambda^+ = \frac{dq}{dl}$$

- ◆ где dq – заряд, сосредоточенный на отрезке цилиндра

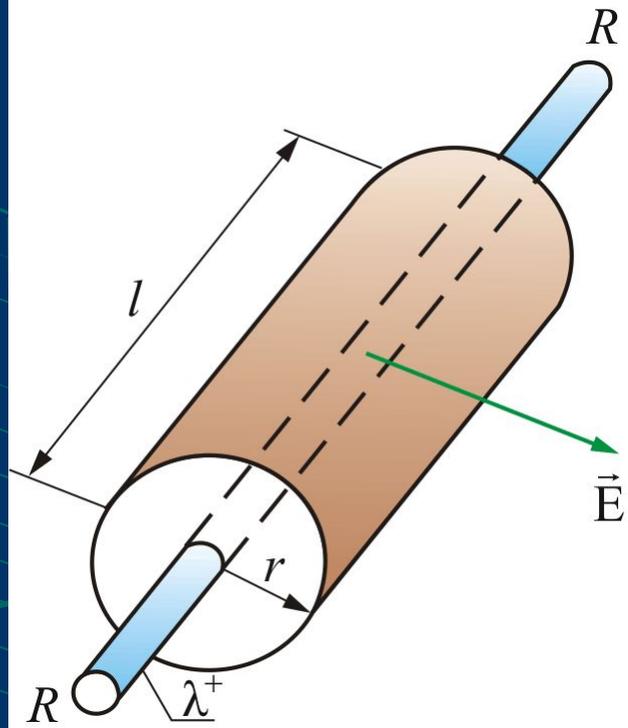
Представим вокруг цилиндра (нити) коаксиальную замкнутую поверхность (цилиндр в цилиндре) радиуса r и длиной l (основания цилиндров перпендикулярно оси).





- ◆ Для оснований цилиндров $E_n = 0$,
- ◆ для боковой поверхности $E_n = E(r)$,
е. зависит от расстояния r .
- ◆ Следовательно, поток вектора через рассматриваемую поверхность, равен

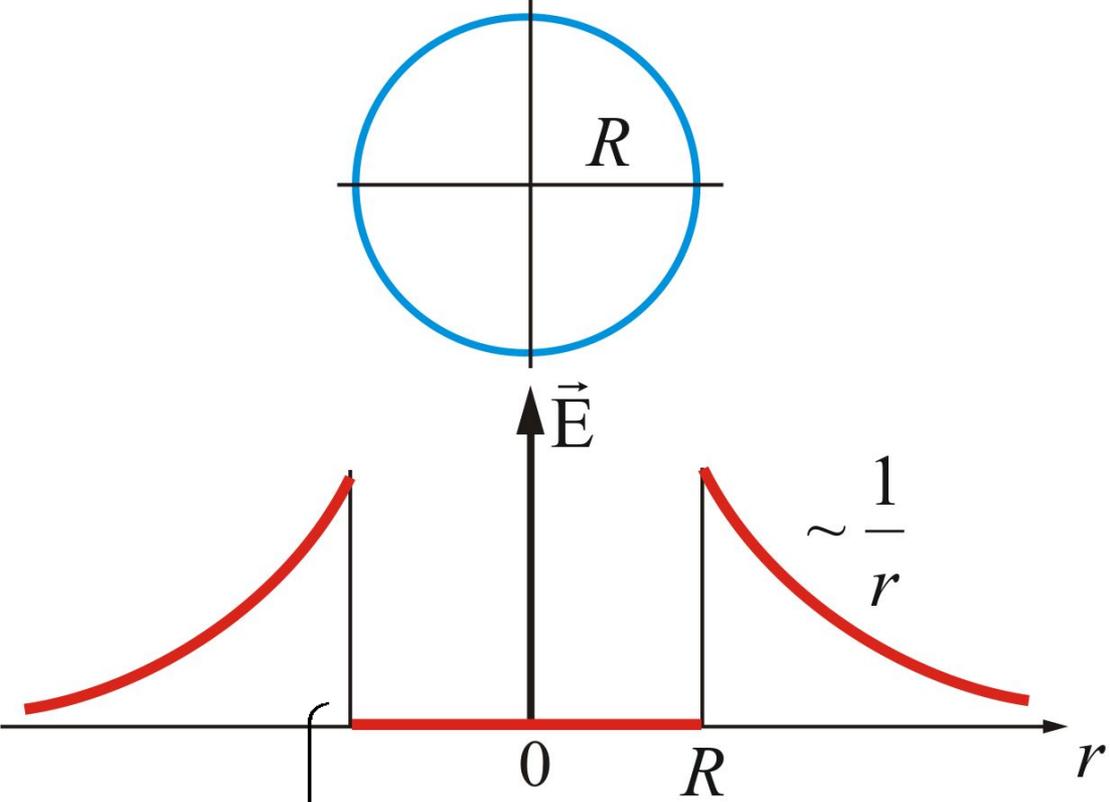
$$\Phi_E = E(r)S = E(r)2\pi r l.$$



- ◆ При $r \geq R$, на поверхности будет заряд $q = \lambda l$.
- ◆ По теореме Остроградского-Гаусса $E(r)2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$
- ◆ Тогда

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \text{ при } r \geq R$$
- ◆ Если $r < R$, $E(r) = 0$, т.к. внутри замкнутой поверхности зарядов нет.

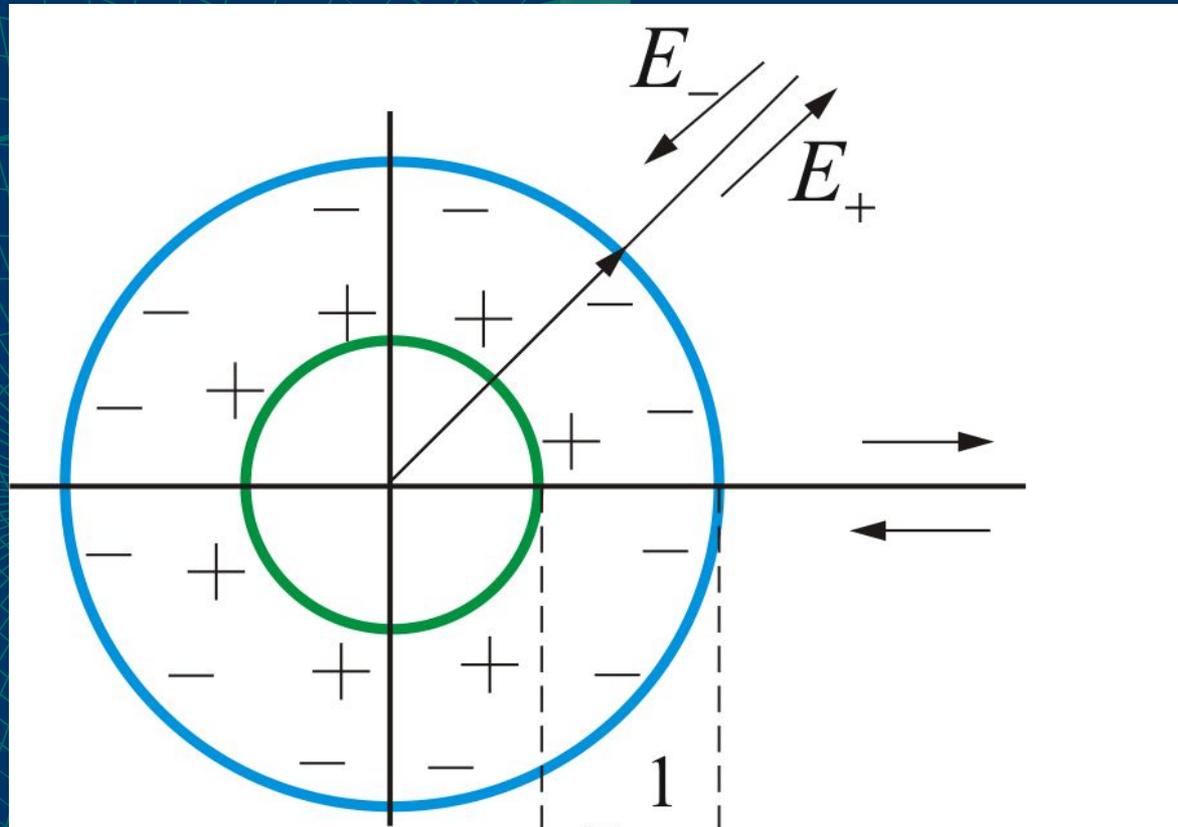
- Графически распределение напряженности электростатического поля цилиндра показано на рис



0 – внутри цилиндра, т.к. нет зарядов

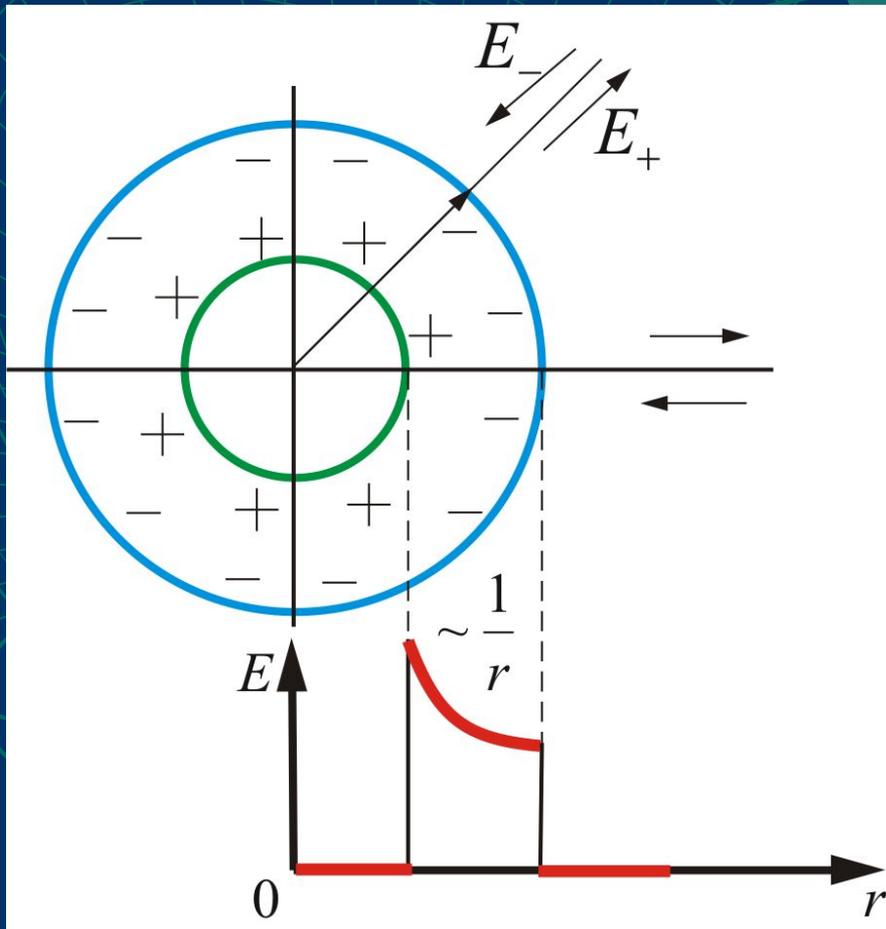
$$E = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \text{ или } \frac{q}{2\pi\epsilon_0 Rl} & \text{на поверхности цилиндра} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \text{ или } \frac{q}{2\pi\epsilon_0 rl} & \text{вне цилиндра} \end{cases}$$

2.5.4. Поле двух коаксиальных цилиндров с одинаковой линейной плотностью λ , но разным знаком



Внутри меньшего и вне большего цилиндров поле будет отсутствовать $E = 0$

В зазоре между цилиндрами, поле определяется так же, как в п. 2.5.3:

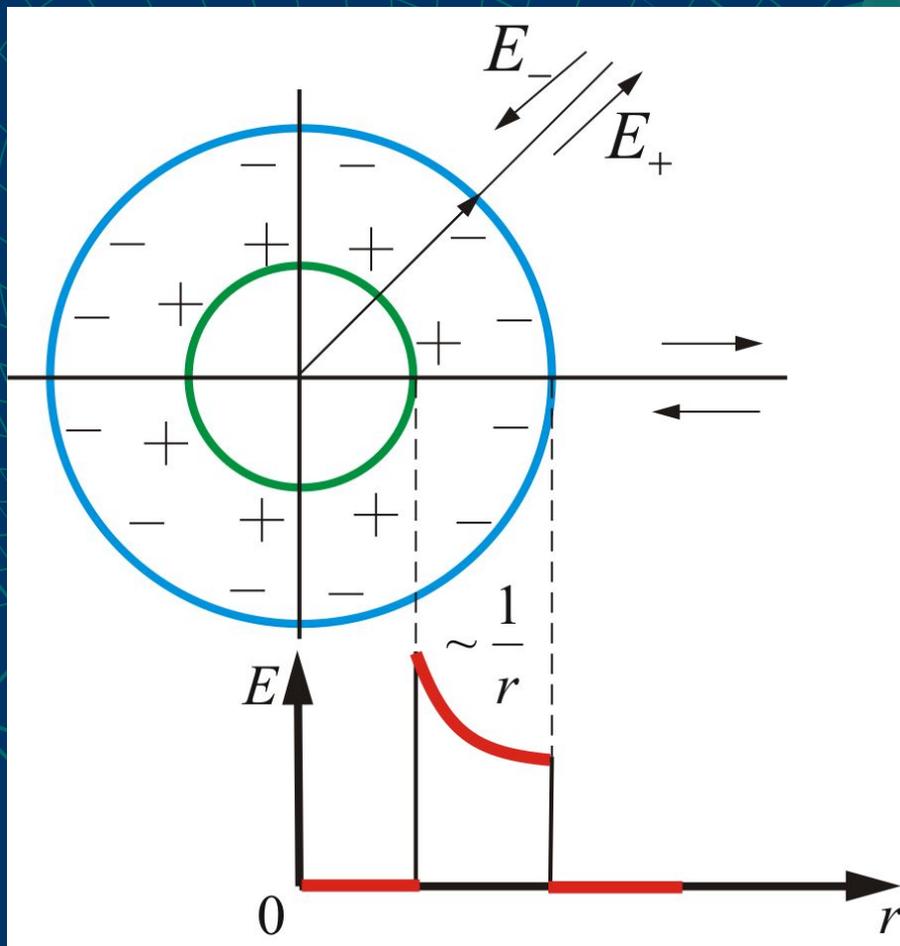


$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Таким образом для коаксиальных цилиндров

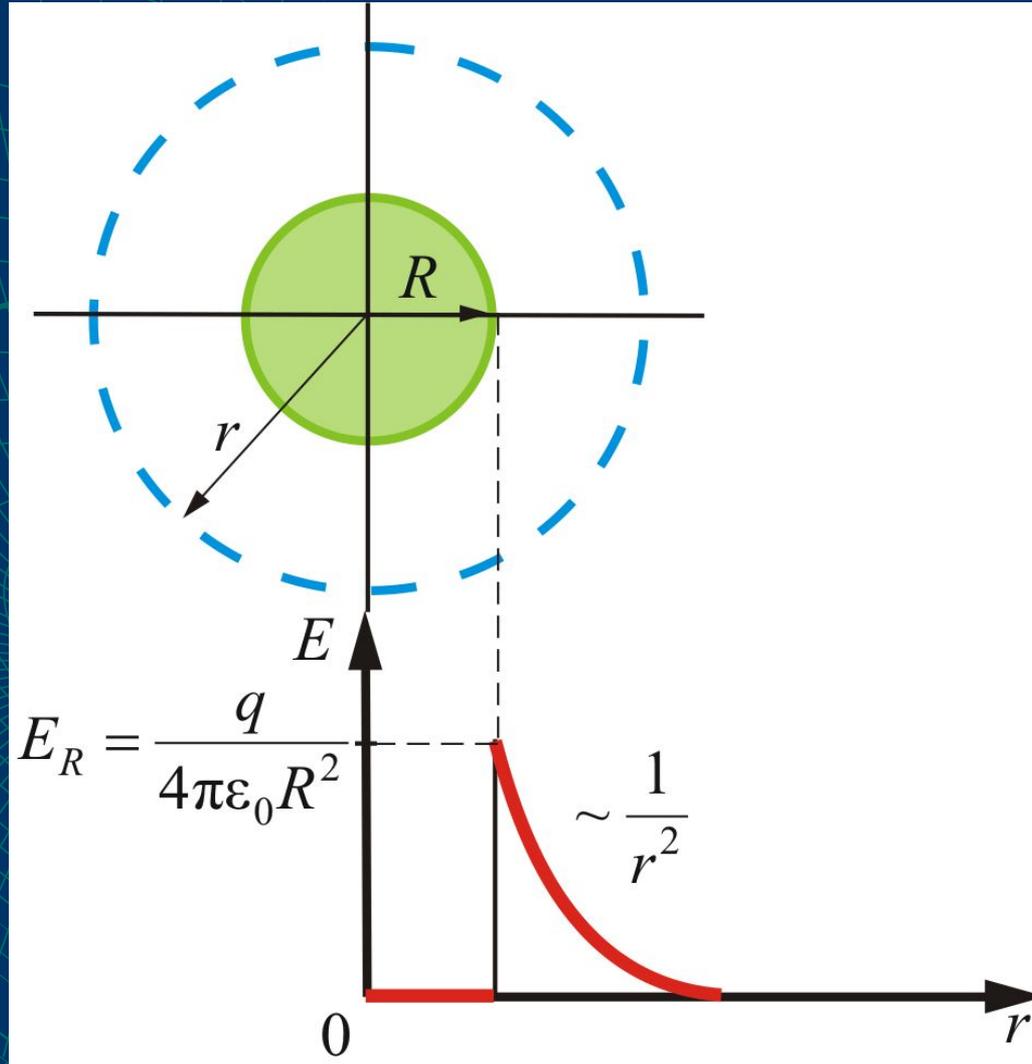
имеем:

$$E = \begin{cases} 0 & \text{— внутри меньшего и вне большего цилиндров зарядов нет} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} & \text{— между цилиндрами, когда } R_1 < r < R_2 \end{cases}$$

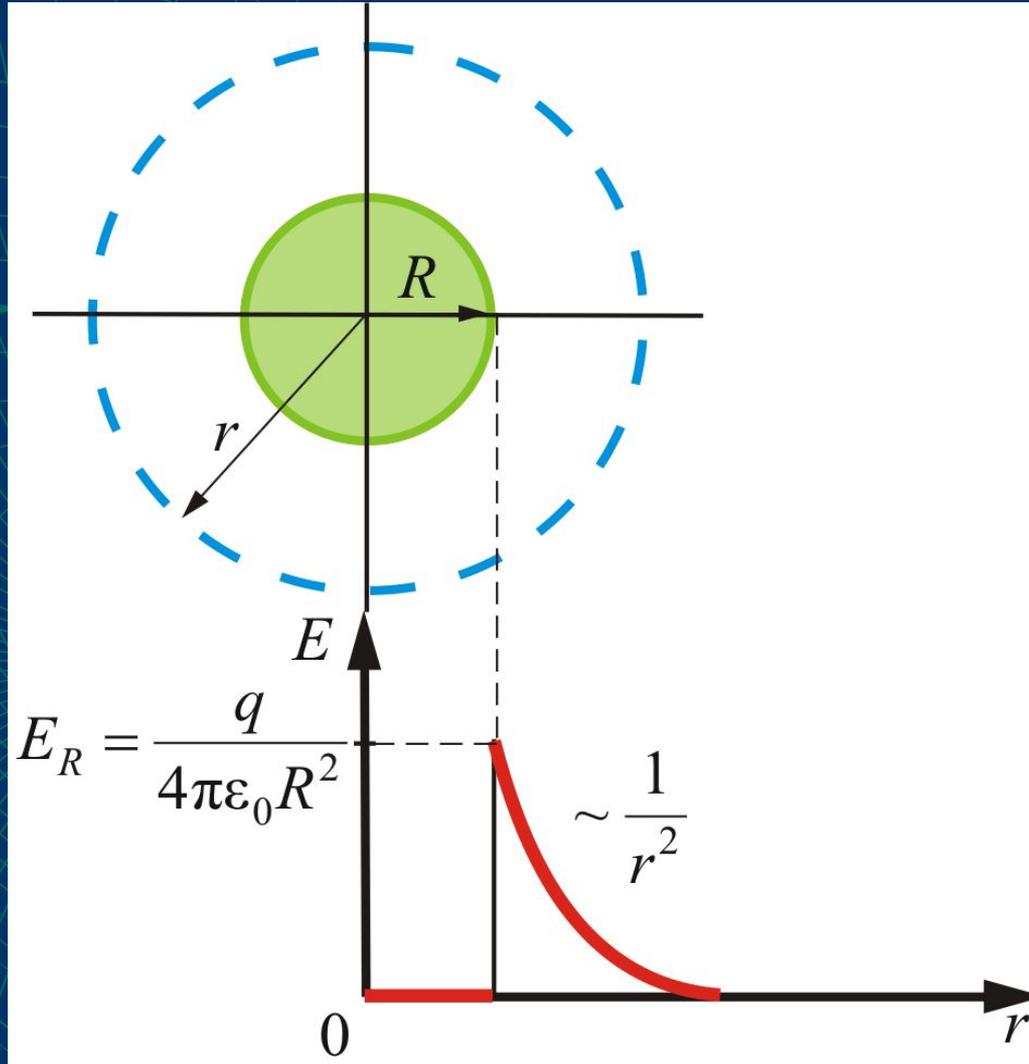


- ◆ Это справедливо и для бесконечно длинного цилиндра, и для цилиндров конечной длины, если зазор между цилиндрами намного меньше длины цилиндров (цилиндрический конденсатор).

2.5.5. Поле заряженного пустотелого шара



- ◆ Вообразим вокруг шара – сферу радиуса r (рис).



- ◆ Если $r \geq R$, то внутрь воображаемой сферы попадет весь заряд q , распределенный по сфере, тогда

$$\Phi_E = E(r)S = E(r)4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

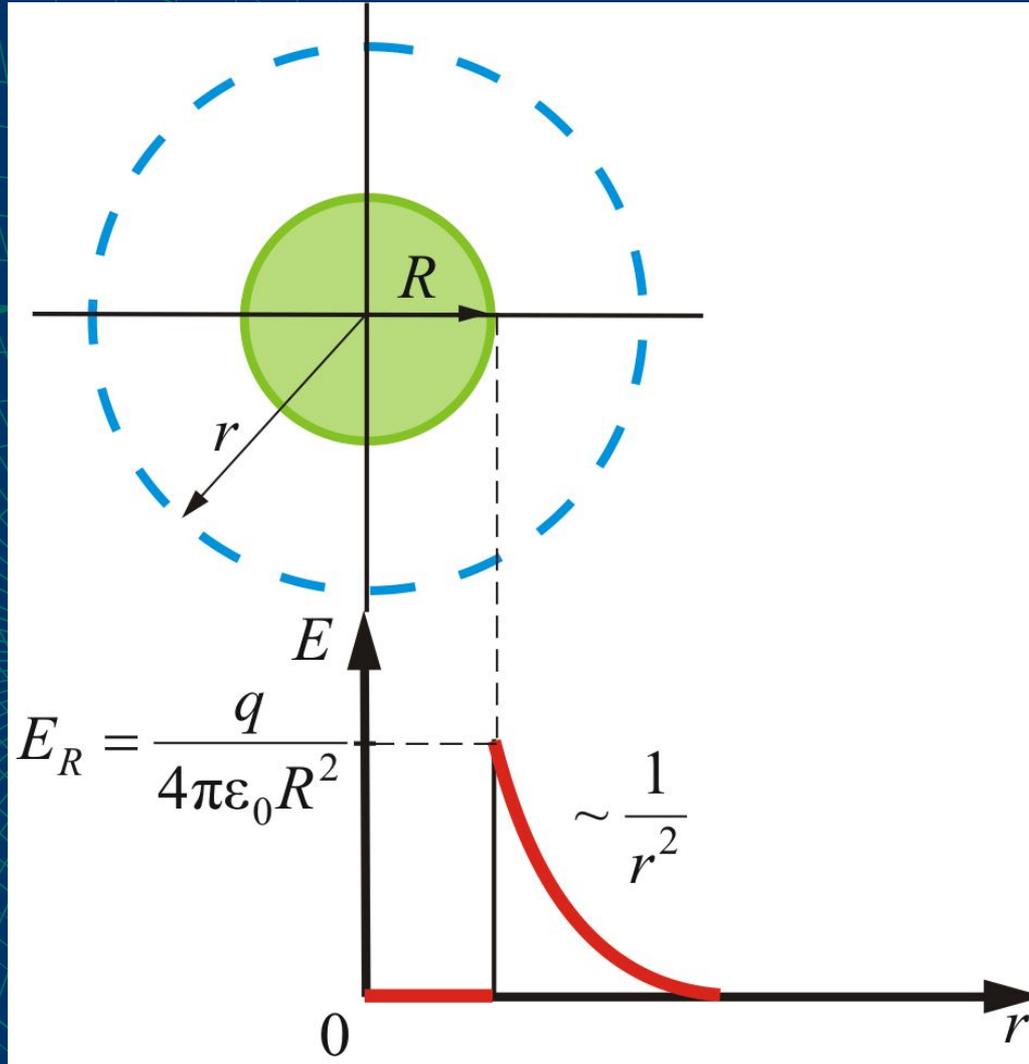
- ◆ откуда **поле вне сферы:**

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

- ◆ **Внутри сферы**, при $r < R$, поле будет равно нулю, т.к. там нет зарядов:

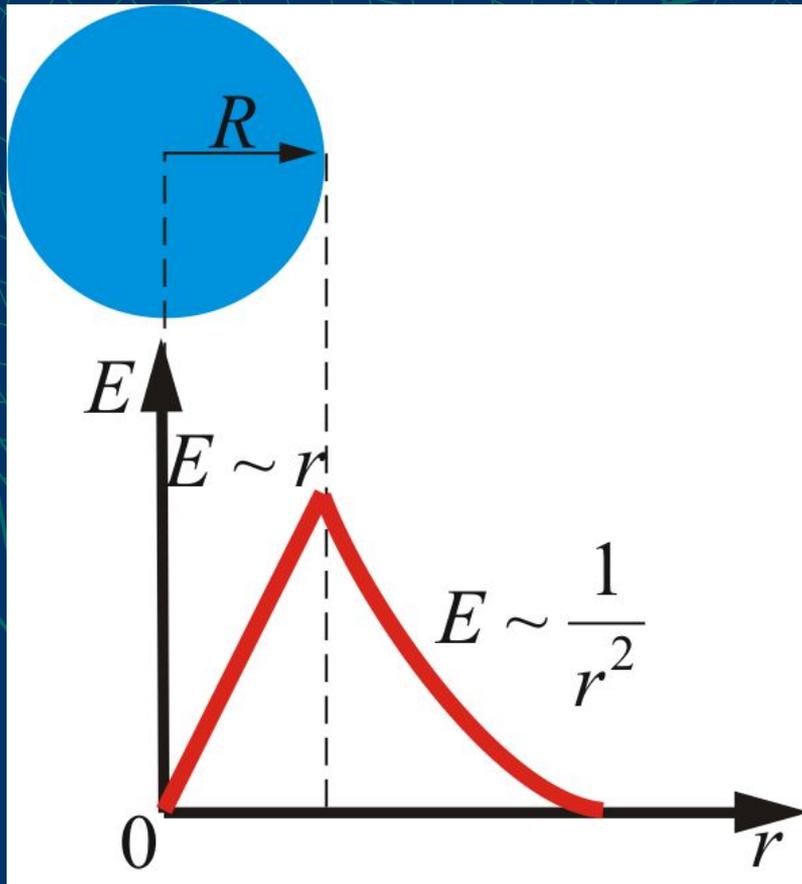
$$E(r) = 0.$$

Как видно, вне сферы поле тождественно полю точечного заряда той же величины, помещенному в центр сферы.



2.5.6. Поле объемного заряженного шара

- Для поля **вне шара** радиусом R получается тот же результат, что и для пустотелой сферы, т.е. справедлива формула:



$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

- ◆ **Внутри шара** при $r < R$, сферическая поверхность будет содержать в себе заряд, равный

$$q = \rho \frac{4}{3} \pi r^3,$$

- ◆ где ρ – объемная плотность заряда: $\rho = \frac{q}{V}$
объем шара:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

- ◆ Тогда по теореме Остроградского-Гаусса запишем

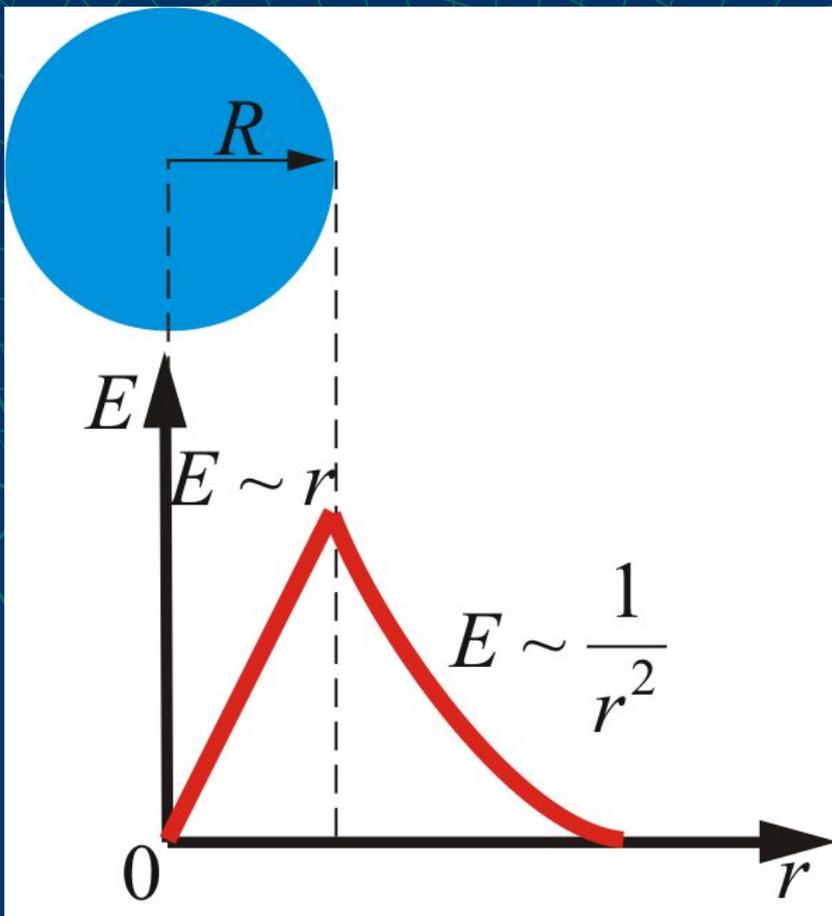
$$\Phi_E = E(r)S = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

- ◆ Т.е. *внутри шара*

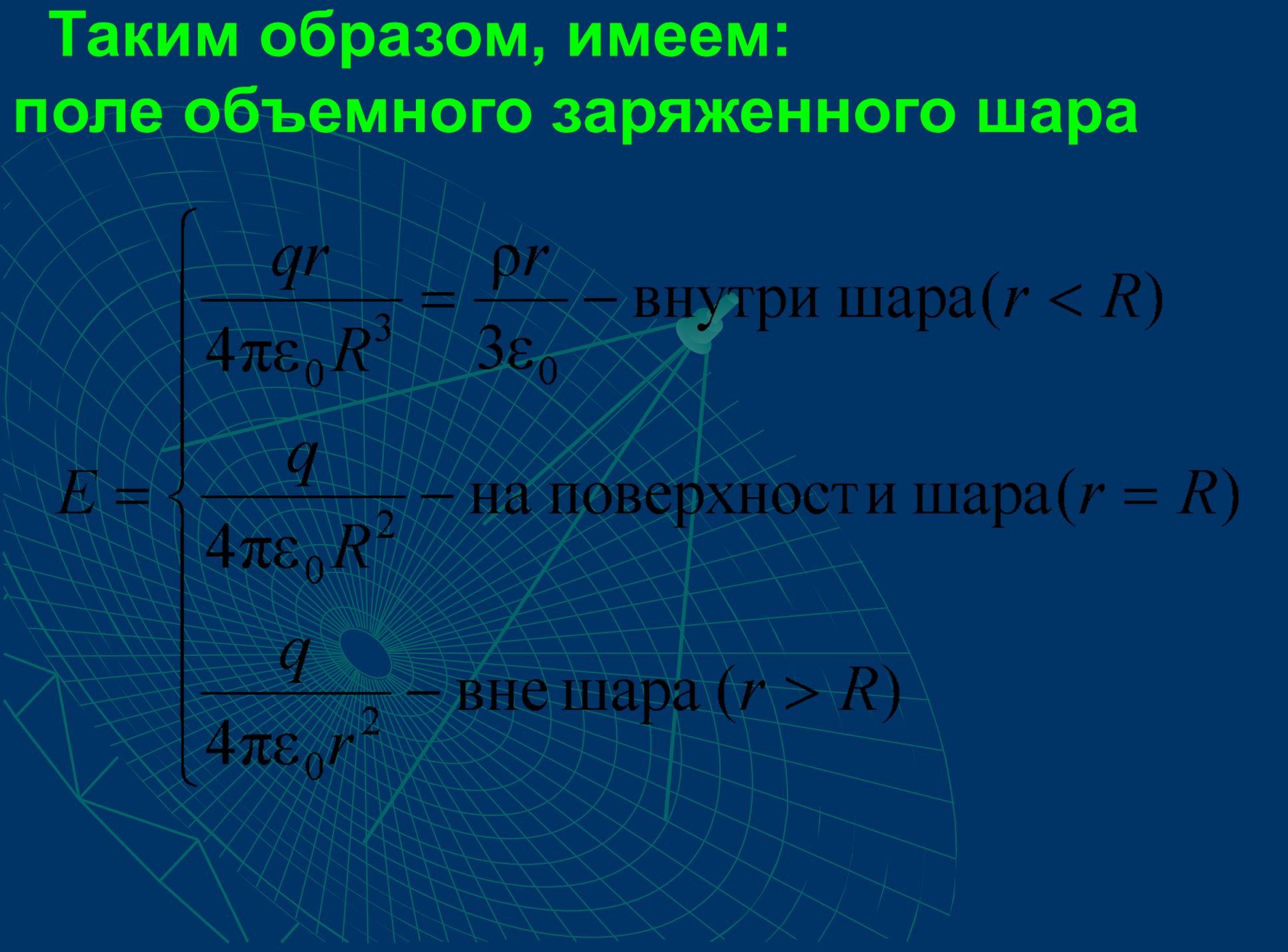
$$E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

- ◆ Т.е., *внутри шара* имеем

$$E \sim r.$$



Таким образом, имеем: поле объемного заряженного шара

$$E = \begin{cases} \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} & \text{— внутри шара } (r < R) \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} & \text{— на поверхности шара } (r = R) \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{— вне шара } (r > R) \end{cases}$$
The background of the slide features a diagram of a uniformly charged sphere. The sphere is represented by a grid of concentric circles and radial lines. A central point is marked with a small blue circle. A larger blue circle is drawn on the surface of the sphere, representing a Gaussian surface. From this surface, several blue lines radiate outwards, representing the electric field lines. The lines are denser near the surface and become sparser as they move away from the sphere.

Лекція окончена!

