

# Компланарные векторы



Урок 5

# Цели урока

- Ввести определение компланарных векторов.
- Рассмотреть признак компланарности трех векторов и правило параллелепипеда, сложение трех некопланарных векторов.

# Новый материал

## *Определение.*

Векторы называются **компланарными**, если при откладывании от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.

*Иначе:* векторы называются **компланарными**, если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости.

**Любые два вектора компланарны.**

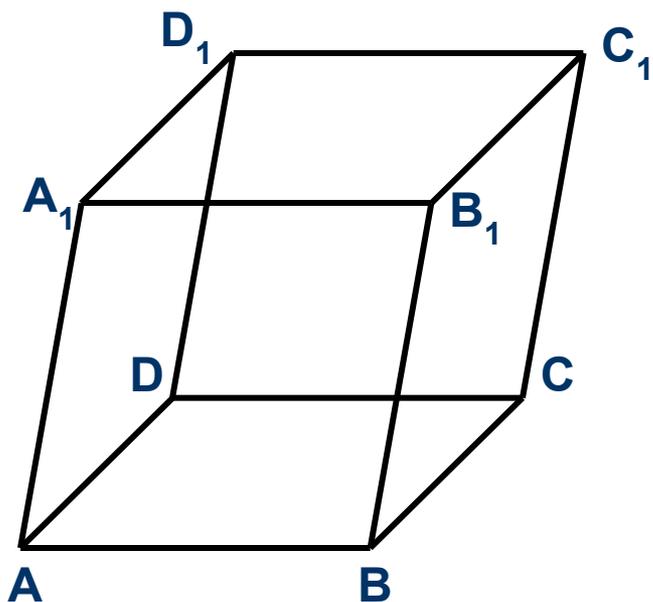
**Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, также компланарны.**

**Почему?**

**Три произвольных вектора могут быть как компланарными, так и некомпланарными.**

# Новый материал

Устно: 355

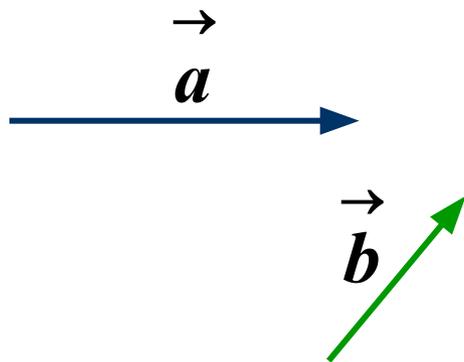


# Новый материал

## Признак компланарности трех векторов:

Если вектор  $\vec{c}$  можно представить в виде  $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ ,

где  $x$  и  $y$  – некоторые числа, то векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны.



Дано :  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

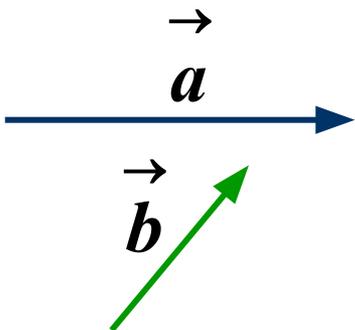
$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

Доказать :  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  – компланарны

# Новый материал

Признак компланарности трех векторов:

*Доказательство.*

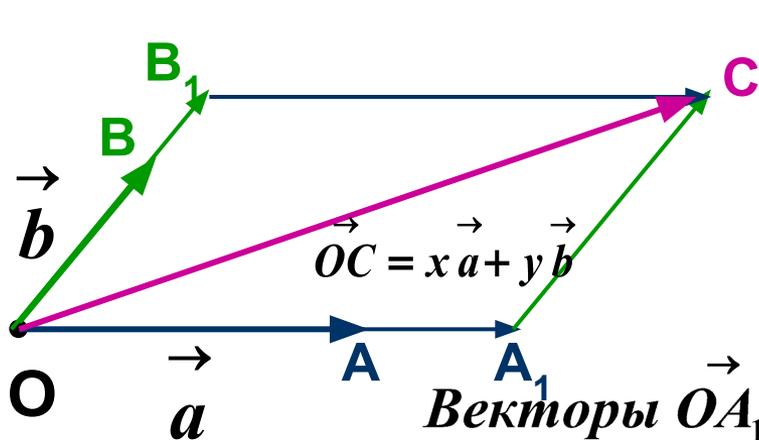


Пусть  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  неколлинеарны.

*Отложим от некоторой точки пространства O*

*векторы  $\vec{OA} = \vec{a}$  и  $\vec{OB} = \vec{b}$ .*

*Векторы  $\vec{OA}$  и  $\vec{OB}$  лежат в плоскости OAB.*



*Построим векторы  $x\vec{a}$  и  $y\vec{b}$ .*

*Для определенности будем считать*

*что  $x > 0$ ,  $y > 0$ .  $\vec{OA}_1 = x\vec{a}$  и  $\vec{OB}_1 = y\vec{b}$ .*

*Векторы  $\vec{OA}_1$  и  $\vec{OB}_1$  также лежат в плоскости OAB.*

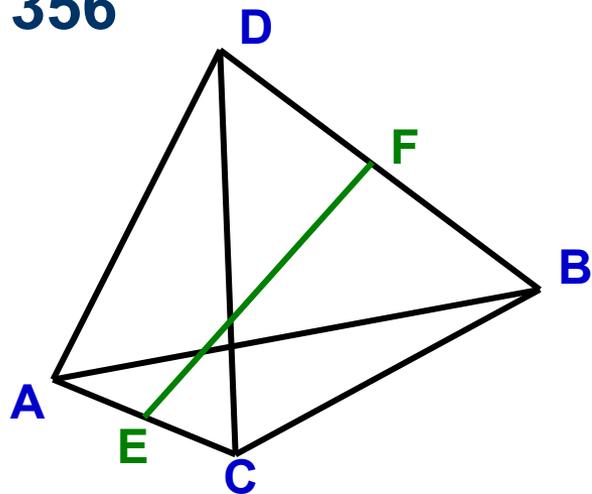
*Их сумма – вектор  $\vec{OC} = x \cdot \vec{OA} + y \cdot \vec{OB}$ , равный вектору  $\vec{c}$ , лежит в плоскости OAB.*

# Новый материал

Итак, векторы  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$  лежат в одной плоскости,

т. е. векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , и  $\vec{c}$  – компланарны.

356



Дано :  $ABCD$  – тетраэдр

$E$  – середина  $AC$ ,

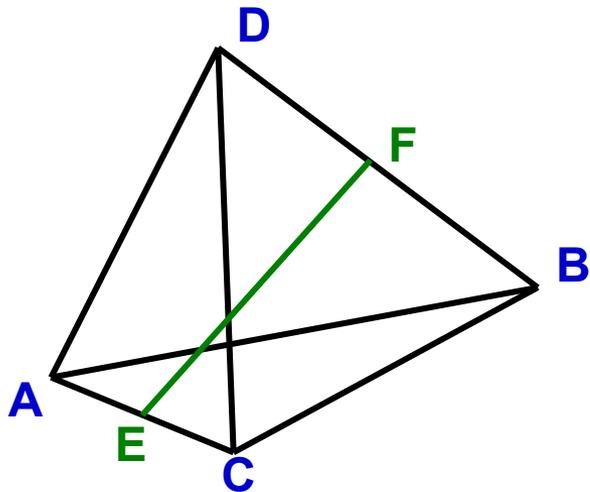
$F$  – середина  $BD$ .

Доказать :  $2\vec{FE} = \vec{BA} + \vec{DC}$ .

Компланарны ли векторы  $\vec{FE}$ ,  $\vec{BA}$  и  $\vec{DC}$ ?

# Новый материал

356



$$\begin{aligned}\vec{FE} &= \vec{DE} - \vec{DF} = \frac{1}{2}(\vec{DA} + \vec{DC}) - \\ &- \frac{1}{2}(\vec{DB} + \vec{DB}) = \frac{1}{2}(\vec{DA} + \vec{DC} - \vec{DB}) = \\ &= \frac{1}{2}(\vec{DA} - \vec{DB} + \vec{DC}) = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{DC}).\end{aligned}$$

Следовательно,  $2\vec{FE} = \vec{BA} + \vec{DC}$ , ч.т.д.

По признаку векторы  $\vec{FE}$ ,  $\vec{BA}$  и  $\vec{DC}$  – компланарны.

**Ответ : компланарны.**

# Новый материал

## Определение.

Разложить вектор  $\vec{r}$  по векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , это значит, представить его в виде  $\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b}$ .

## Утверждение, обратное признаку компланарности векторов:

Если векторы  $\vec{r}$ ,  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – компланарны, то вектор  $\vec{r}$  можно представить в виде  $\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b}$ , где  $x$  и  $y$  – некоторые числа.

Докажем это.

# Новый материал

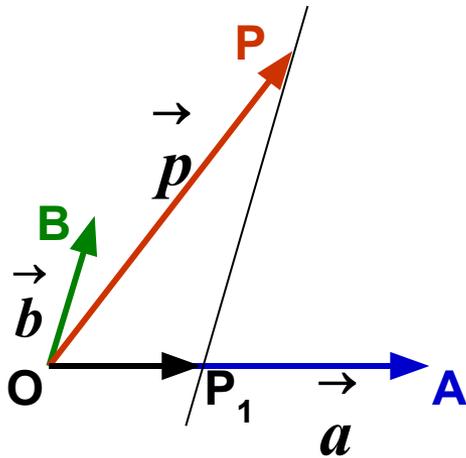
*Доказательство.*

Пусть  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  неколлинеарны.

Отложим от некоторой точки пространства  $O$

векторы  $\vec{p}$ ,  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Так как векторы компланарны, то они лежат в одной плоскости.

Проведем через точку  $P$  прямую, параллельную  $BO$ .



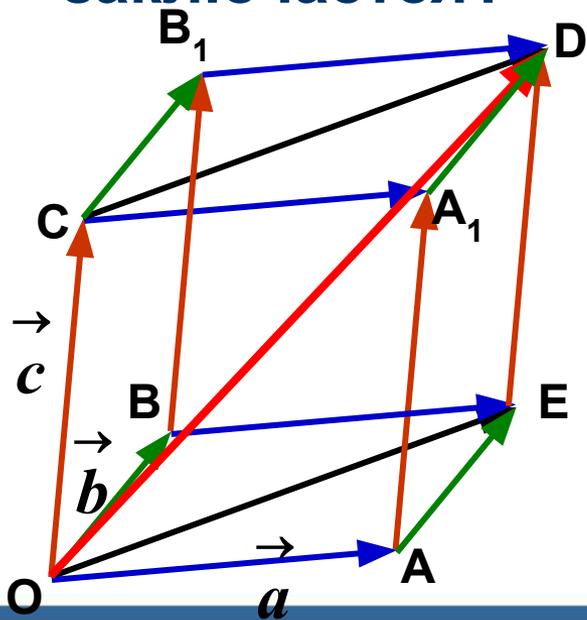
Тогда  $\vec{OP} = \vec{OP}_1 + \vec{P}_1P$ , но  $\vec{OP}_1 = x\vec{a}$ , т.к.  $\vec{OP}_1 \parallel \vec{a}$ ,  $\vec{P}_1P = y\vec{b}$ , т.к.  $\vec{P}_1P \parallel \vec{b}$ , следовательно,  $\vec{OP} = x\vec{a} + y\vec{b}$ , т.е.  $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$ , ч.т.д.

А если  $\vec{p} \parallel \vec{b}$ , то  $\vec{p} = 0\vec{a} + y\vec{b}$ .

# Новый материал

Мы умеем на плоскости складывать векторы по правилу треугольника и параллелограмма. А если в пространстве?

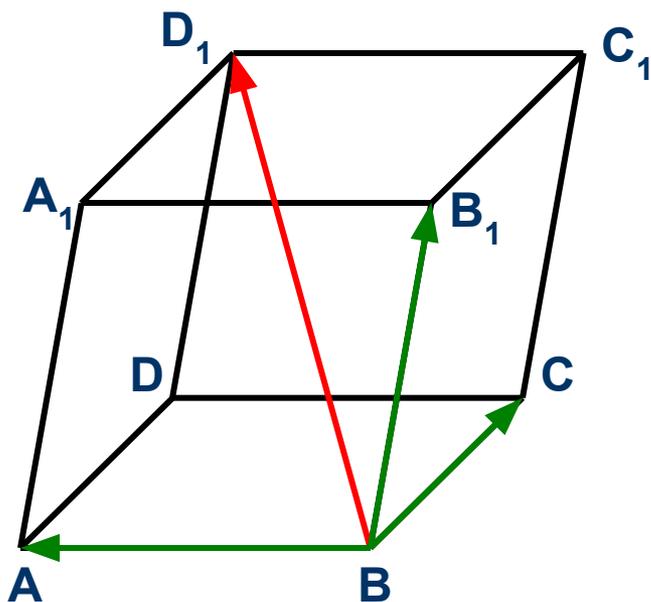
Для сложения трех некопланарных векторов пользуются **правилом параллелепипеда**. В чем оно заключается?



$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OE} + \vec{OC} = \vec{OD}$$

# Решение упражнений

360(a)



$$\vec{BD}_1 = \vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB}_1$$

**Определение.**

Разложить вектор  $\vec{r}$  по трем некопланарным векторам

$\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ , это значит, представить его в виде  $\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ .

# Домашнее задание

**п. 39, 40**

**вопросы 13-15 стр. 97**

**358, 360(б), 368(а, б)**



**Спасибо!**