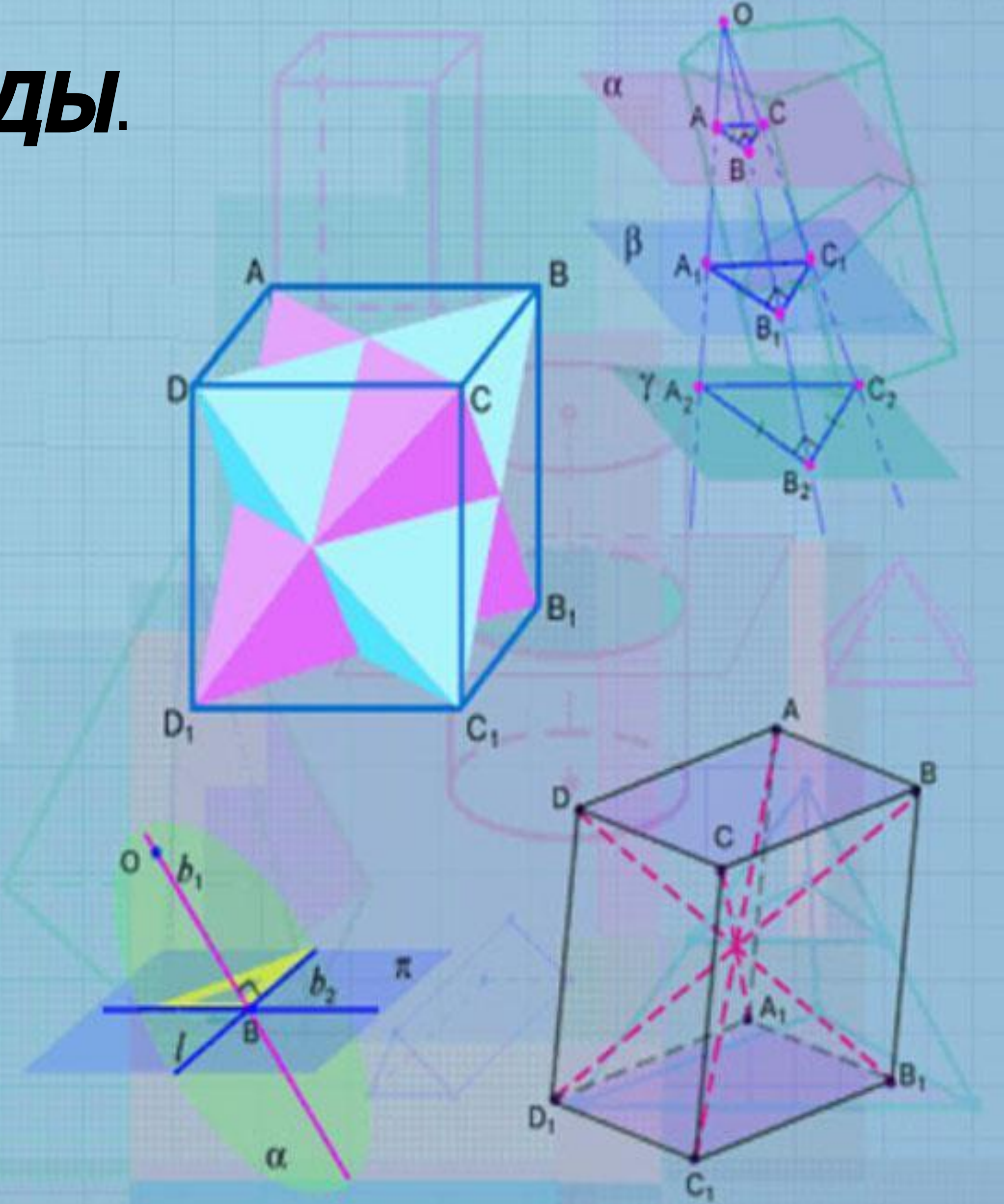
Объём пирамиды.

$$V_{\text{ïèðàìèäû}} = \frac{1}{3} S_{\text{îñí.}} \cdot H$$



Геометрия,
11 класс.

Воробьев Леонид Альбертович, г.Минск

Рассмотрим произвольную треугольную пирамиду SABC с высотой SO=*H*.

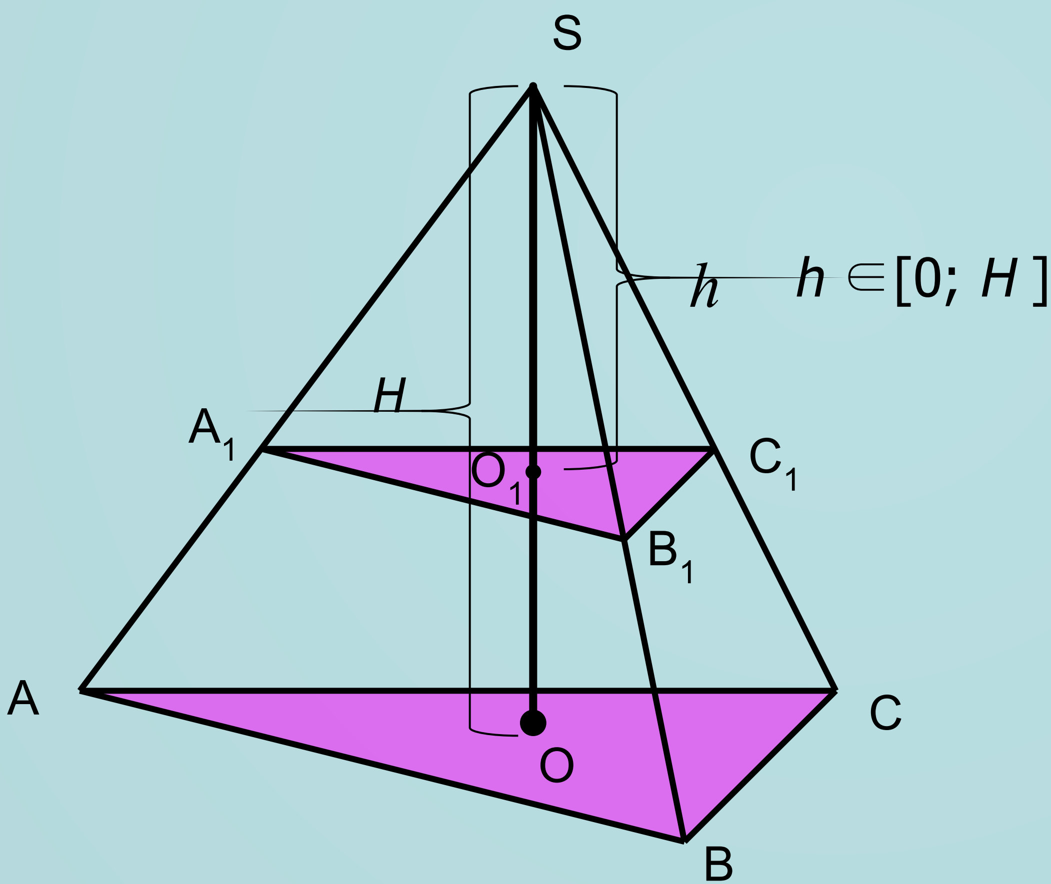
Построим сечение пирамиды, параллельное плоскости основания и находящееся на расстоянии h от её вершины.

Т.к. ΔABC□□$A_1B_1C_1$, то по свойству площадей подобных фигур :

$$\frac{S_{\text{î ńí .}}}{S_{\text{ńĺ ÷.}}} = \frac{H^2}{h^2}$$

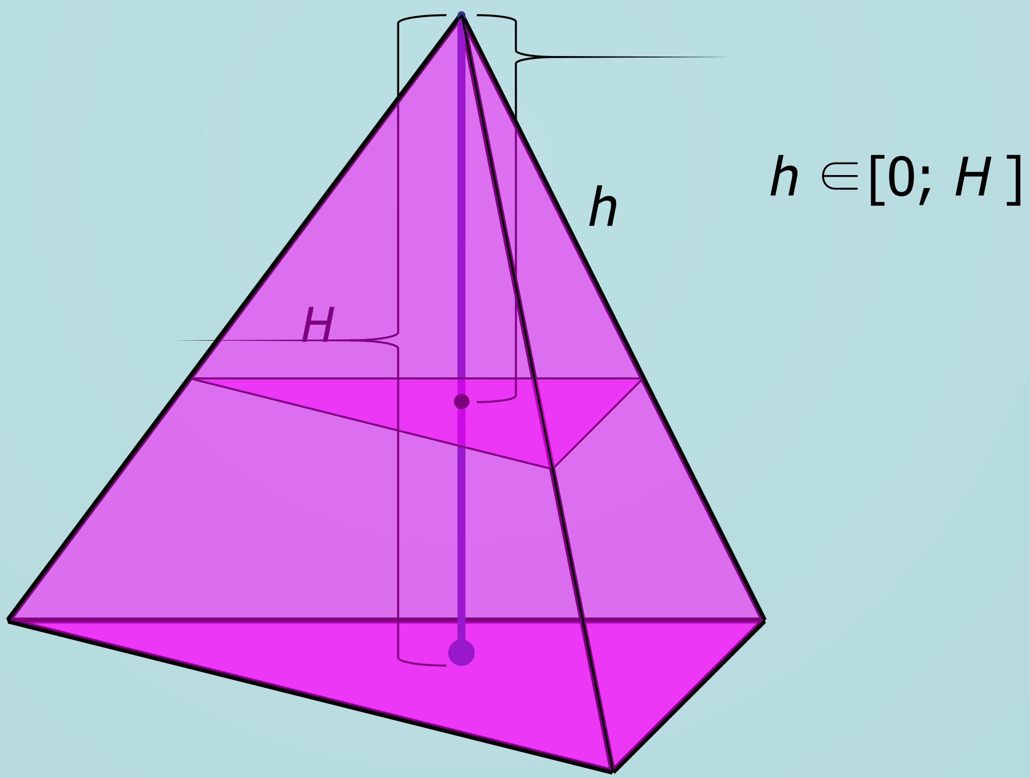
$$\Downarrow$$

$$S_{\text{ńĺ ÷.}} = \frac{S_{\text{î ńí .}} \cdot h^2}{H^2}$$



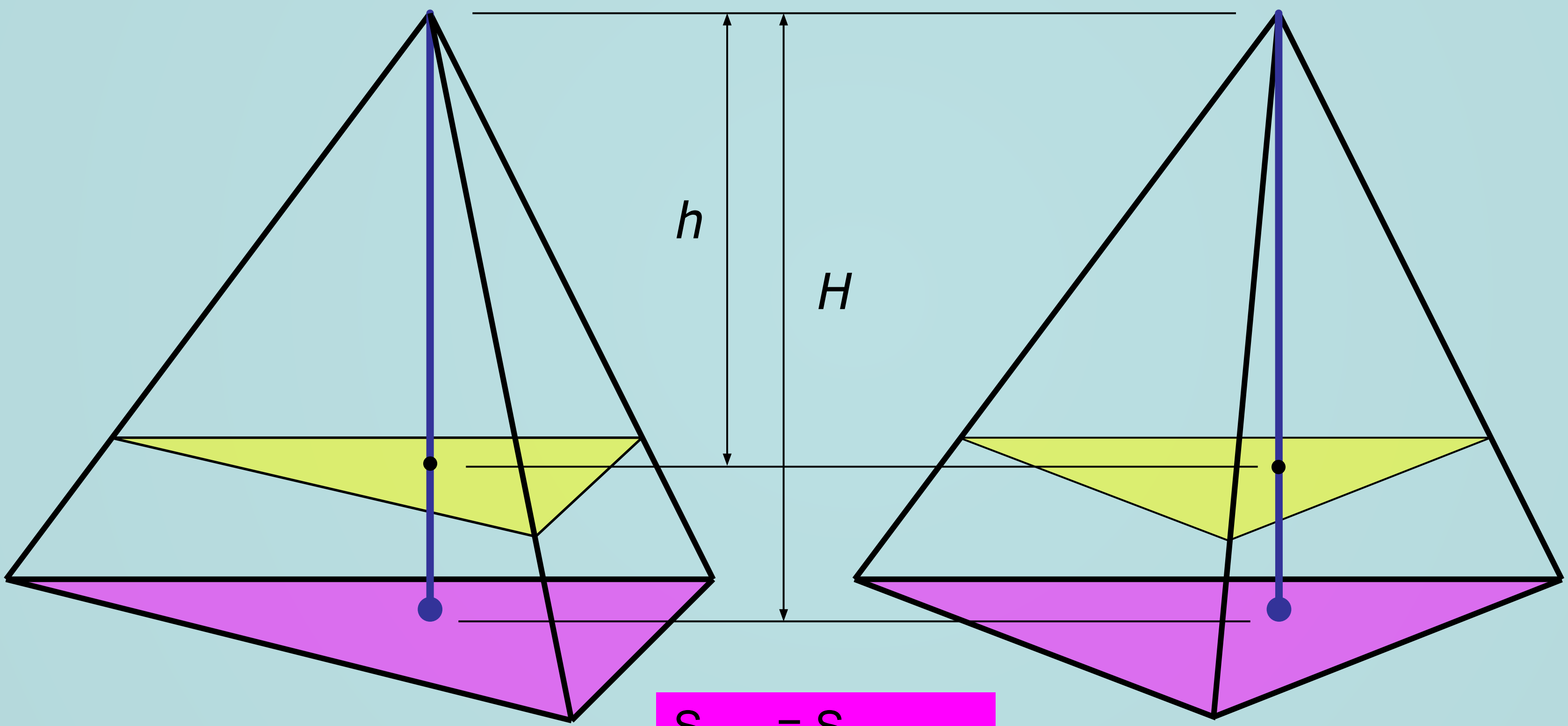
Т.к. *h* – изменяющаяся величина, то площадь сечения можно рассматривать как функцию от переменной *h*, *где h* – расстояние от вершины пирамиды до плоскости основания.

Используя понятие бесконечной интегральной суммы, объем данной пирамиды можно получить как бесконечную сумму площадей таких сечений, построенных вдоль высоты.



На основании предыдущих рассуждений можно сделать вывод о том, что пирамиды с равными площадями оснований и равными высотами, имеют равные объемы.

$$V_1 = V_2$$



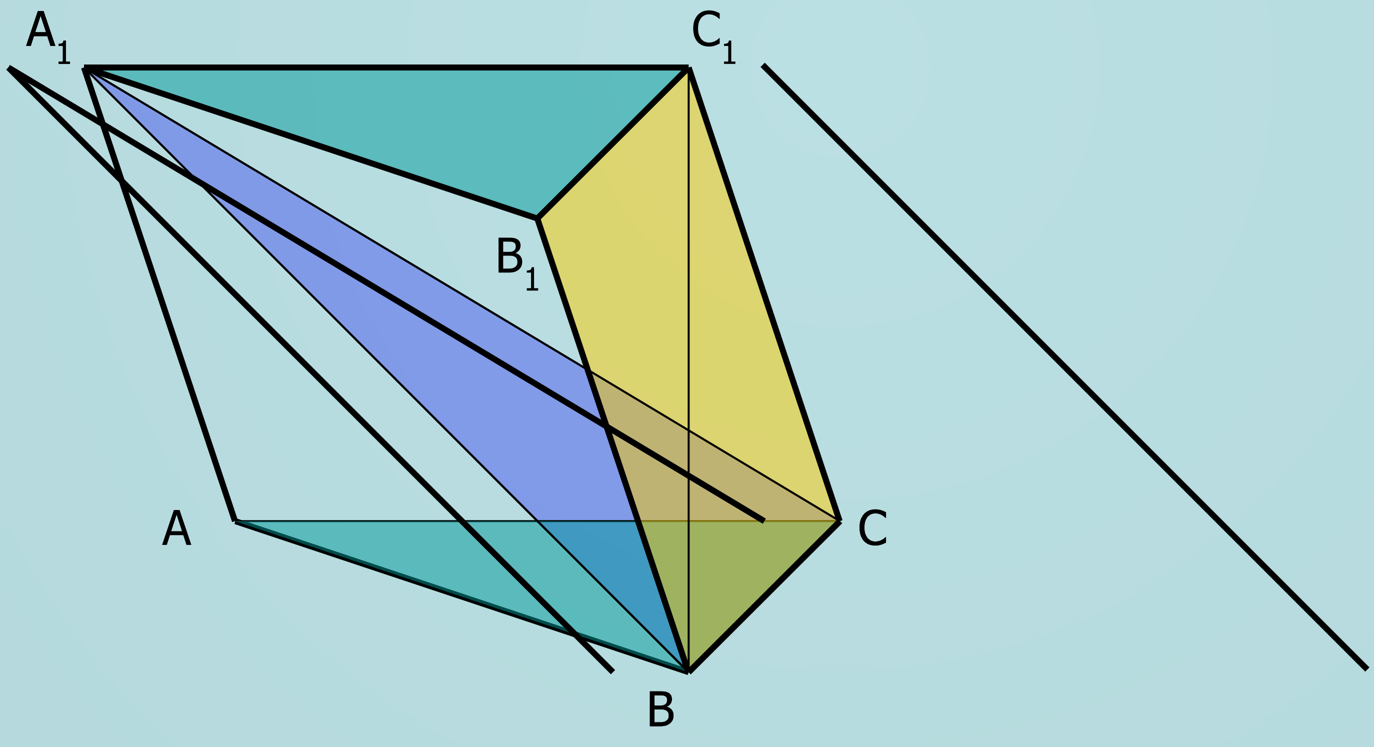
$S_{осн.1} = S_{осн.2}$

$S_{сеч.1} = S_{сеч.2}$

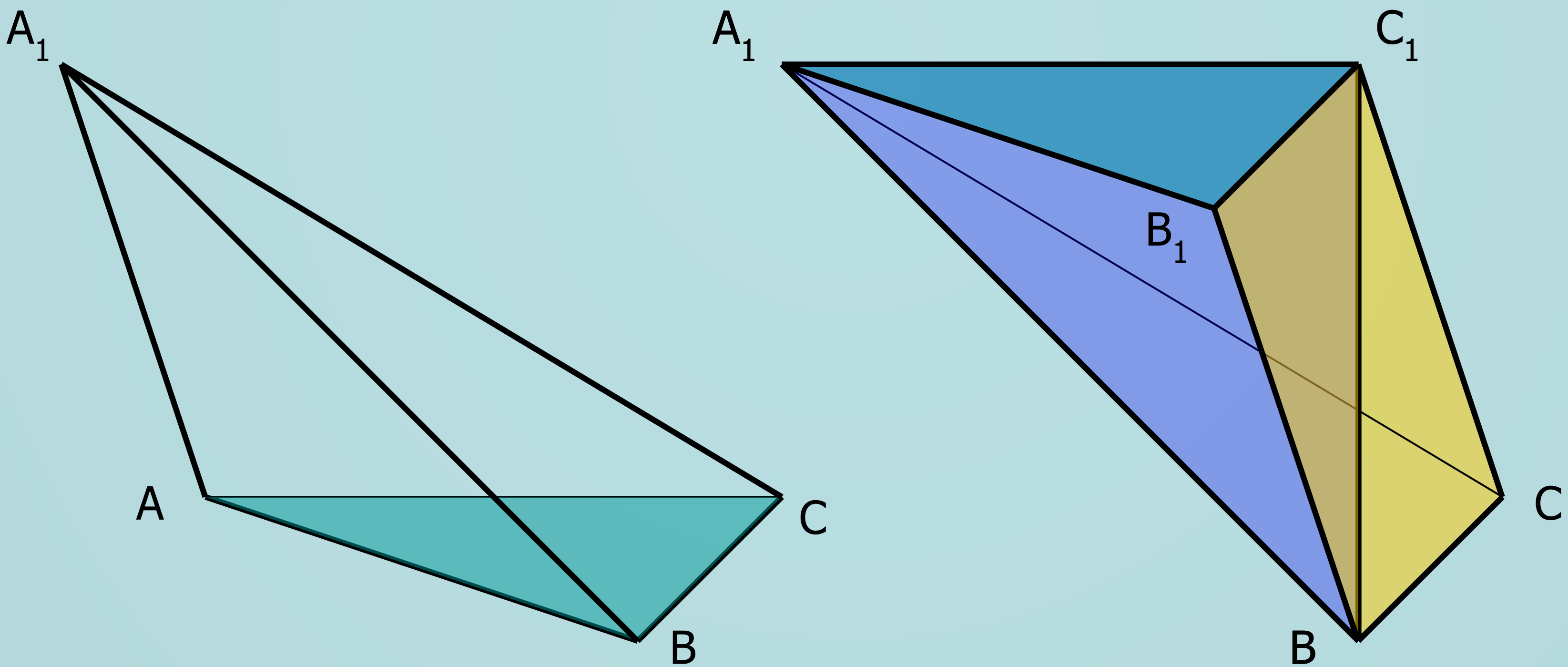
Рассмотрим произвольную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$.

1) Разобьем её на две части секущей плоскостью (A_1BC).

2) Получились две пространственные фигуры: треугольная пирамида A_1ABC и четырехугольная пирамида $A_1BCC_1B_1$ (обе пирамиды с вершиной A_1).



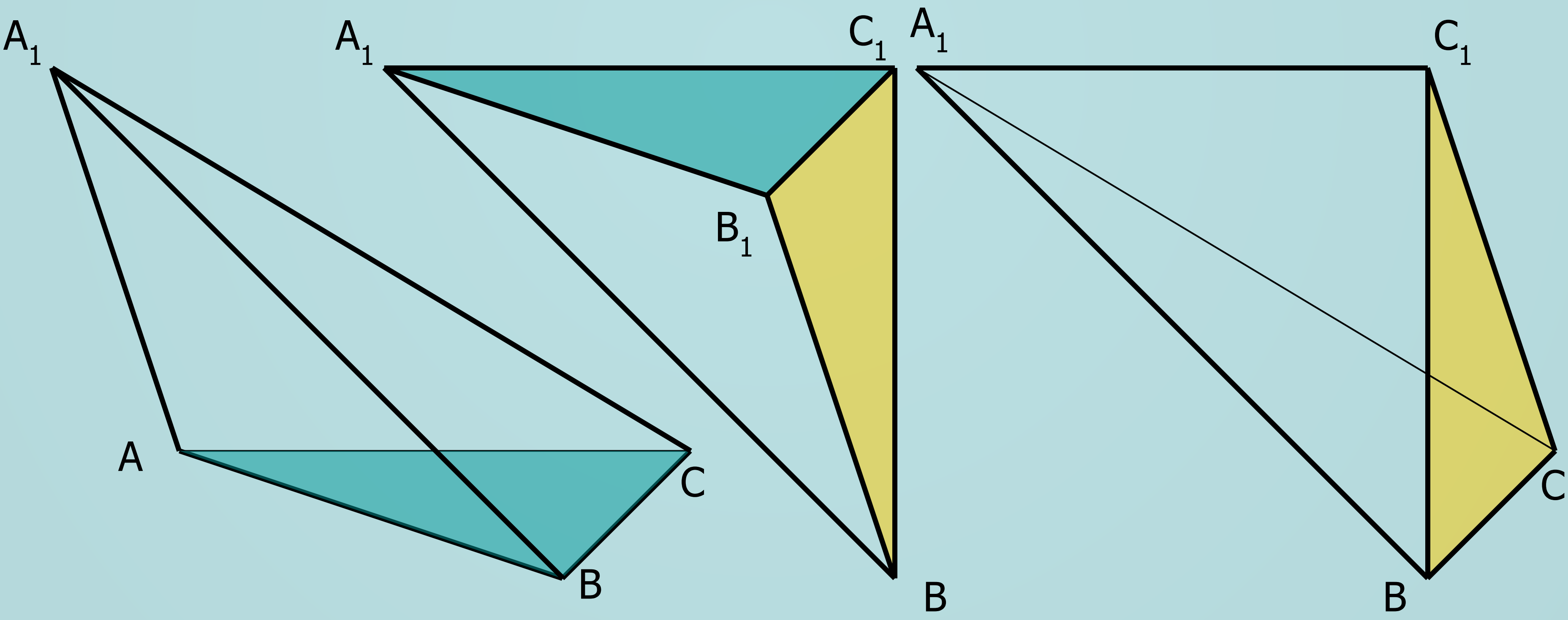
Теперь разобьём четырёхугольную пирамиду $A_1BCC_1B_1$ секущей плоскостью (A_1C_1B) на две треугольные пирамиды: $A_1BB_1C_1$ и A_1BCC_1 (обе пирамиды с вершиной A_1).



У треугольных пирамид A_1ABC и $BA_1B_1C_1$ основания равны (как противоположные основания призмы) и их высотами является высота призмы. Значит, их объемы также равны.

У треугольных пирамид $A_1BB_1C_1$ и A_1BCC_1 основания равны (объясните самостоятельно) и у них общая высота, проведенная из вершины A_1. Значит, их объемы также равны.

$$V_{A_1ABC} = V_{BA_1B_1C_1} \qquad V_{A_1BB_1C_1} = V_{A_1BCC_1}$$

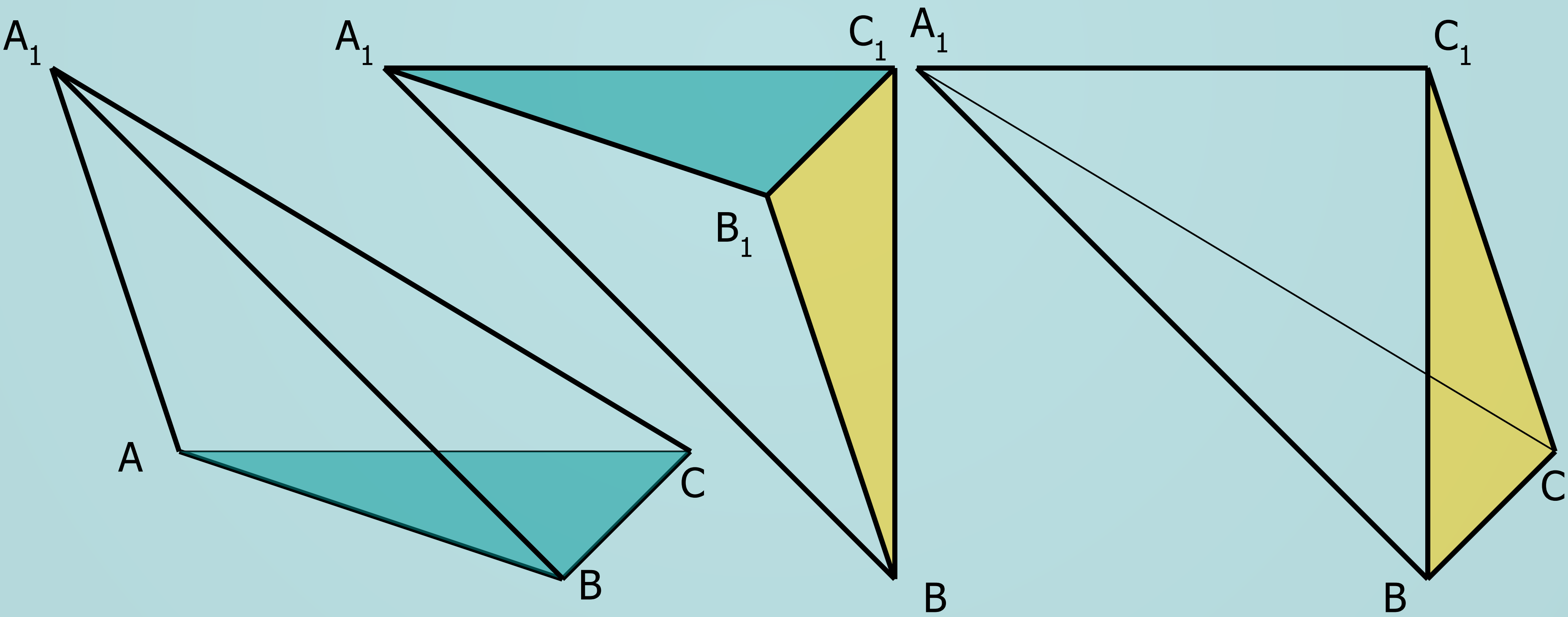


Тогда, по свойству транзитивности, объемы всех трех пирамид равны:

$$V_{A_1ABC} = V_{BA_1B_1C_1} = V_{A_1BCC_1}$$

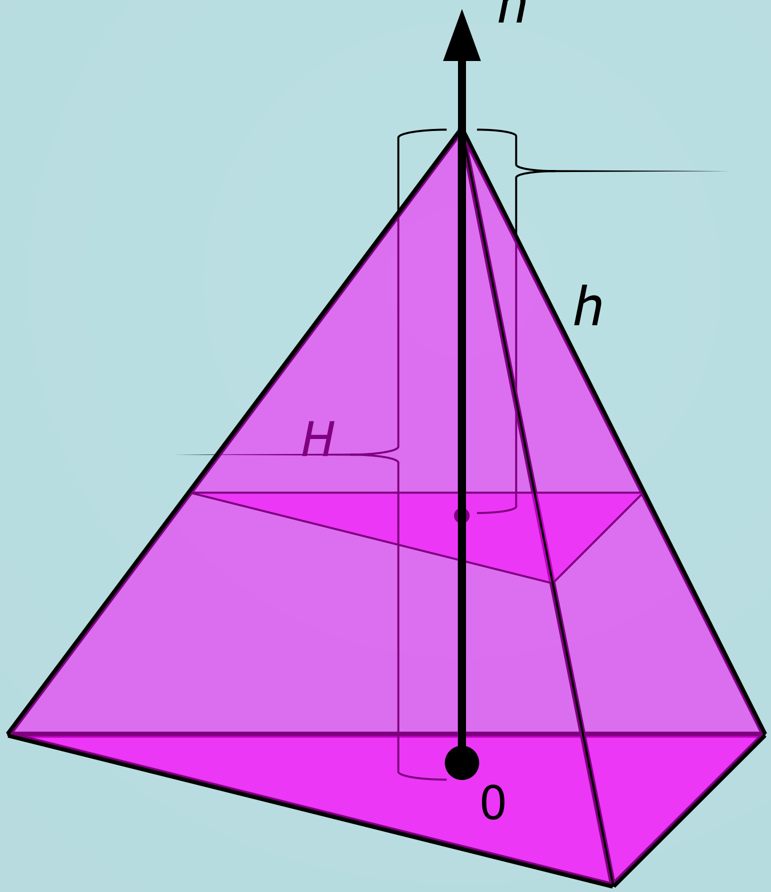
Значит, объем пирамиды в три раза меньше объема призмы с такими же основанием и высотой, т.е.

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{î ńí .}} \cdot H$$



Эту же формулу можно было получить непосредственным интегрированием площади сечения, как функции, зависящей от расстояния h:

$$V=\int_0^H S_{\text{ńĺ÷.}}\,dh=\int_0^H \frac{S_{\text{î ńí.}}\cdot h^2}{H^2}\,dh=\frac{S_{\text{î ńí.}}}{H^2}\int_0^H h^2\,dh=\frac{S_{\text{î ńí.}}}{H^2}\,\frac{h^3}{3}\bigg|_0^H=\boxed{\frac{1}{3}S_{\text{î ńí.}}\cdot H}$$

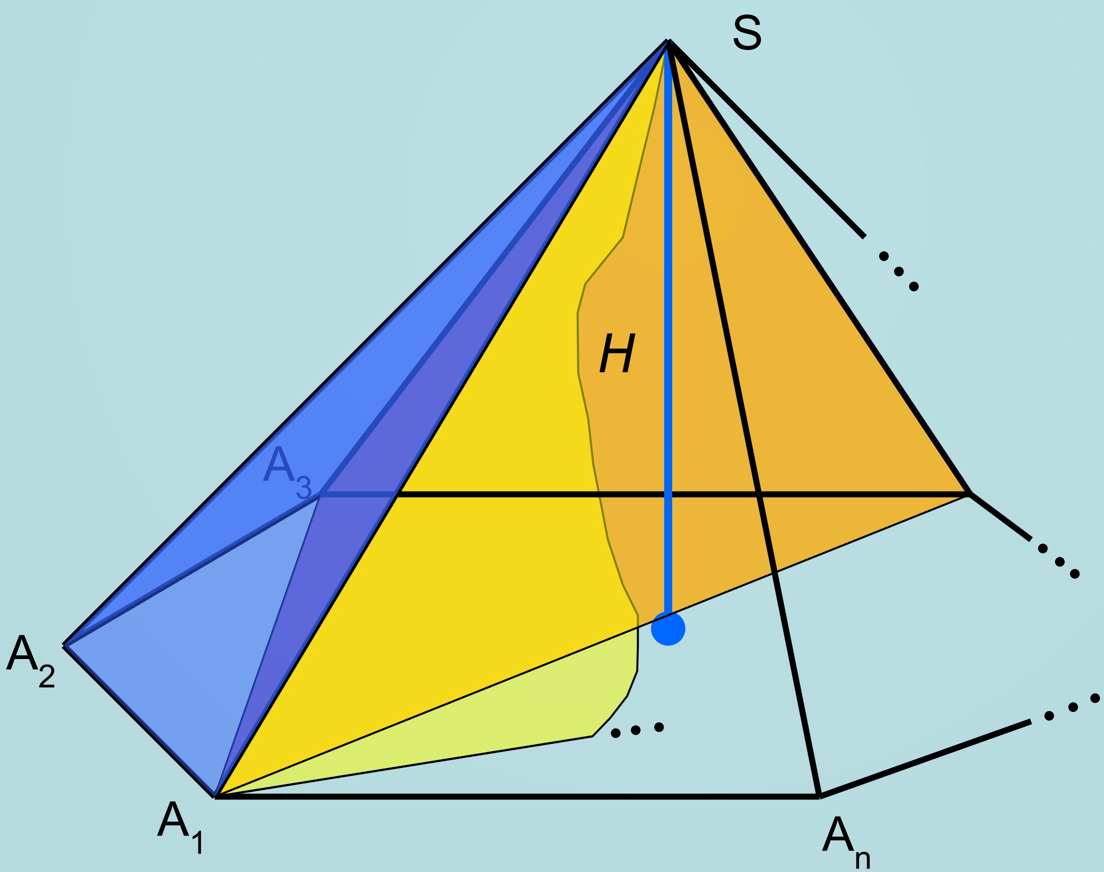


$h \in [0;\ H]$

Рассматривая произвольную n-угольную пирамиду $SA_1A_2 \ldots A_n$ как сумму треугольных пирамид с общей вершиной и высотой, получим формулу для нахождения объема любой пирамиды:

$$V_{ďčđŕěčäű} = V_{SA_1A_2A_3} + V_{SA_1A_3A_4} + \ldots + V_{SA_1A_{n-1}A_n} = \frac{1}{3} S_{\Delta A_1A_2A_3} \cdot H + \frac{1}{3} S_{\Delta A_1A_3A_4} \cdot H + \ldots + \frac{1}{3} S_{\Delta A_1A_{n-1}A_n} \cdot H =$$

$$= \frac{1}{3} H \cdot \left(S_{\Delta A_1A_2A_3} + S_{\Delta A_1A_3A_4} + \ldots + S_{\Delta A_1A_{n-1}A_n} \right) = \frac{1}{3} S_{A_1A_2 \ldots A_n} \cdot H = \boxed{\frac{1}{3} S \cdot H}$$



Итак, для любой n-угольной пирамиды:

$$V_{\text{ďčđŕěčäű}} = \frac{1}{3} S_{\text{îńí}.} \cdot H$$

,где $S_{\text{осн.}}$ – площадь основания пирамиды, H – высота пирамиды.