

# *«Параллельность прямых и плоскостей в пространстве.»*

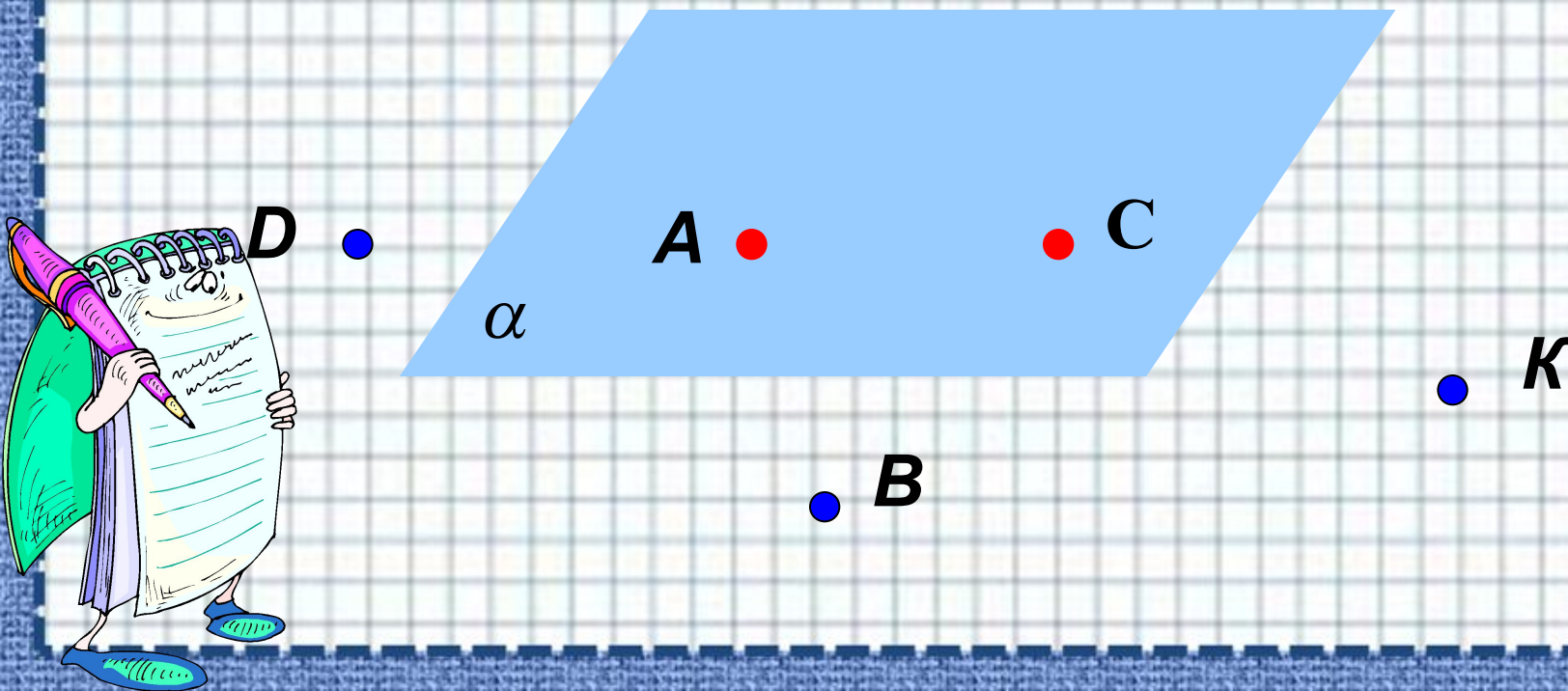


[Prezented.](#)  
[Ru](#)

**Родионова Светлана  
Ивановна  
учитель математики  
ГБОУ СОШ № 235**

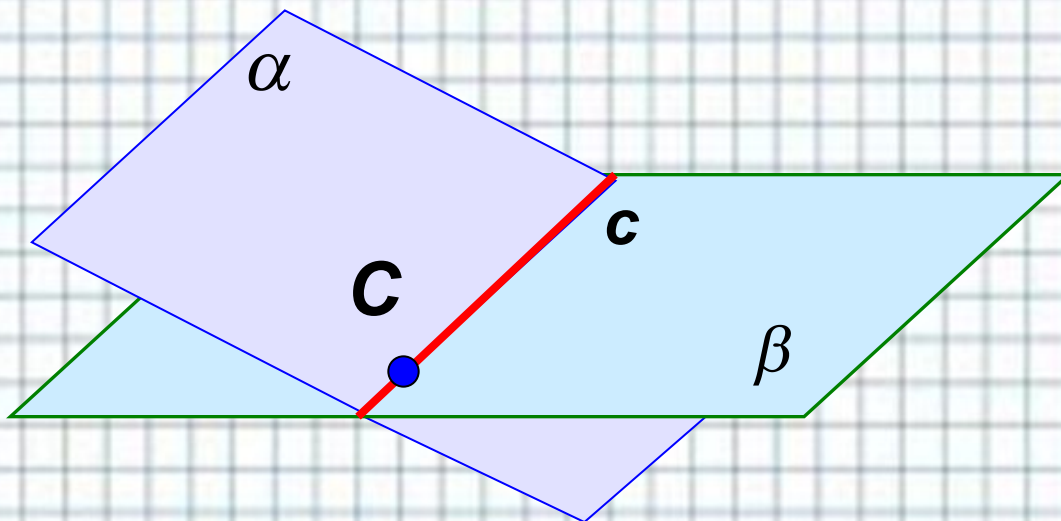
# Аксиомы группы С.

*Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.*



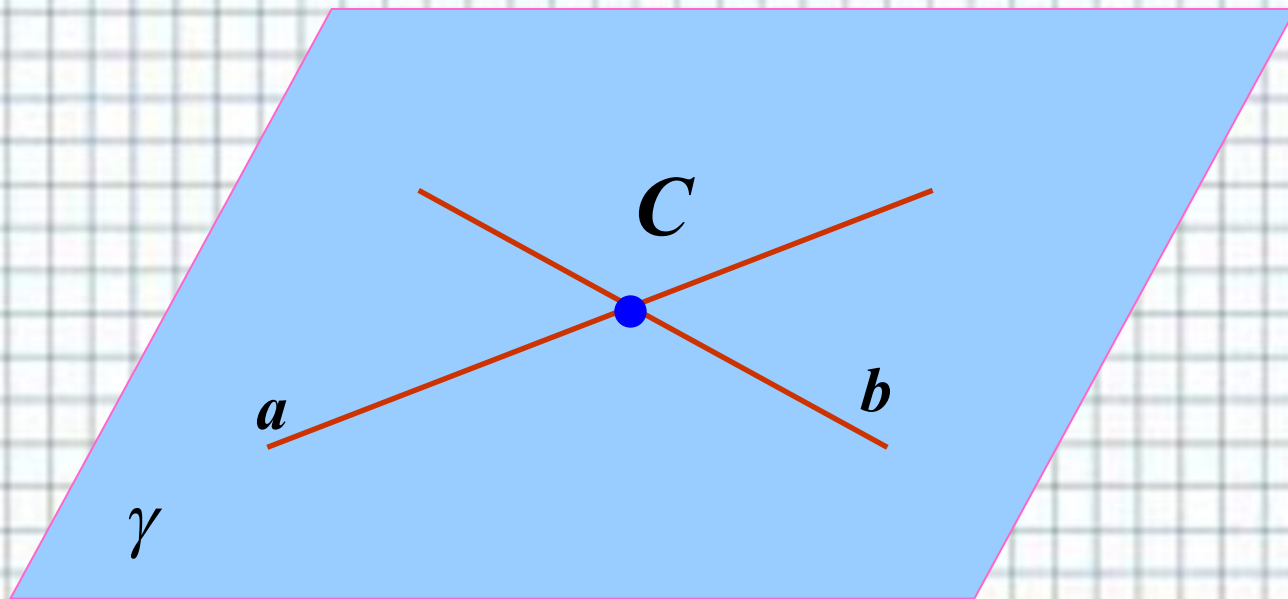
# Аксиомы группы С.

*Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.*

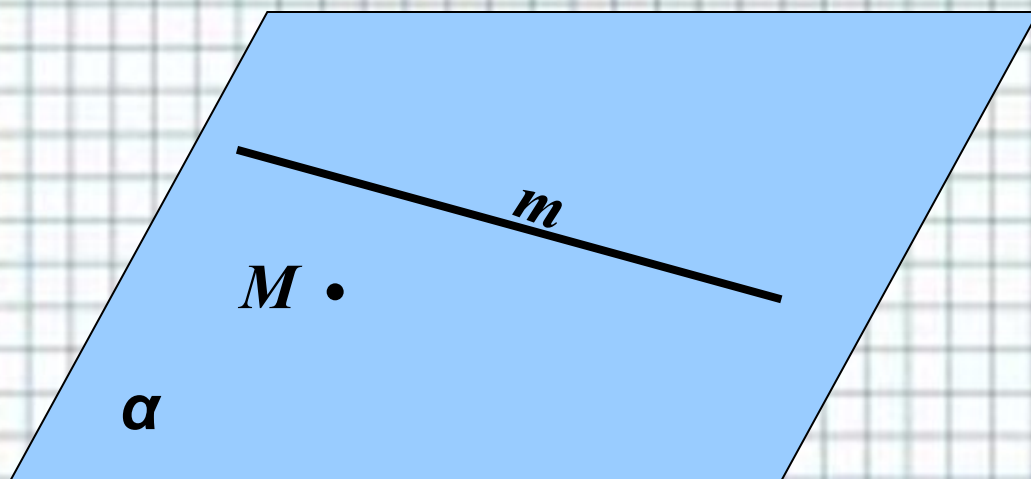


# Аксиомы группы С.

*Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.*



# Следствия из аксиом

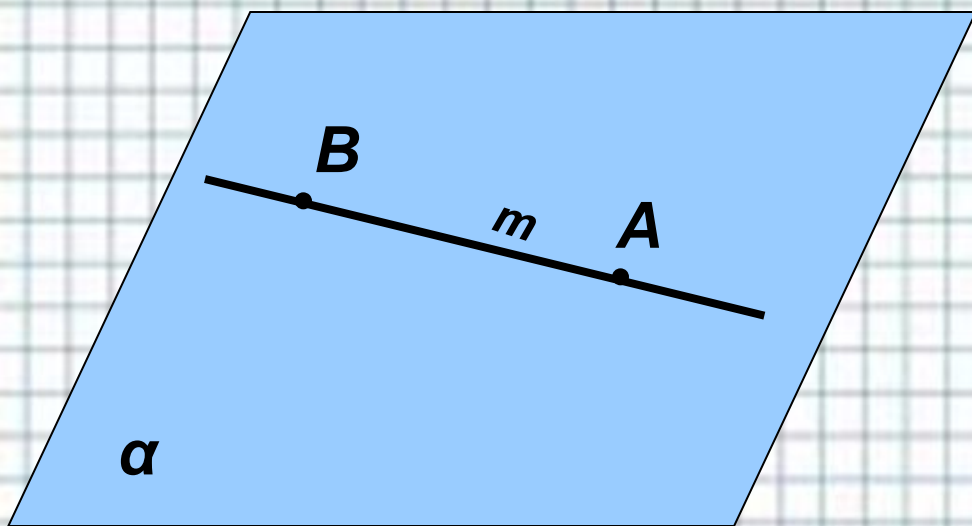


*Через любую прямую и не принадлежащую ей точку можно провести плоскость, и притом только одну.*



**T<sub>1</sub>**

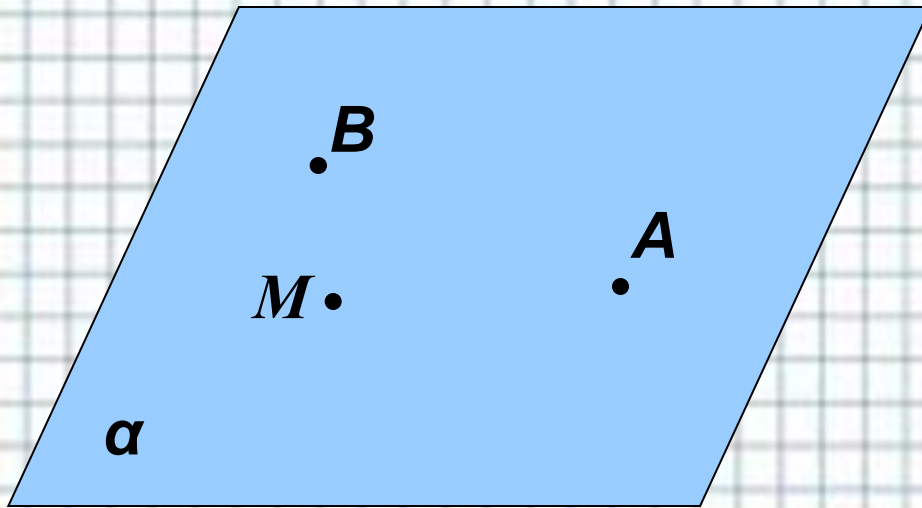
# Следствия из аксиом



*Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит плоскости*



# Следствия из аксиом

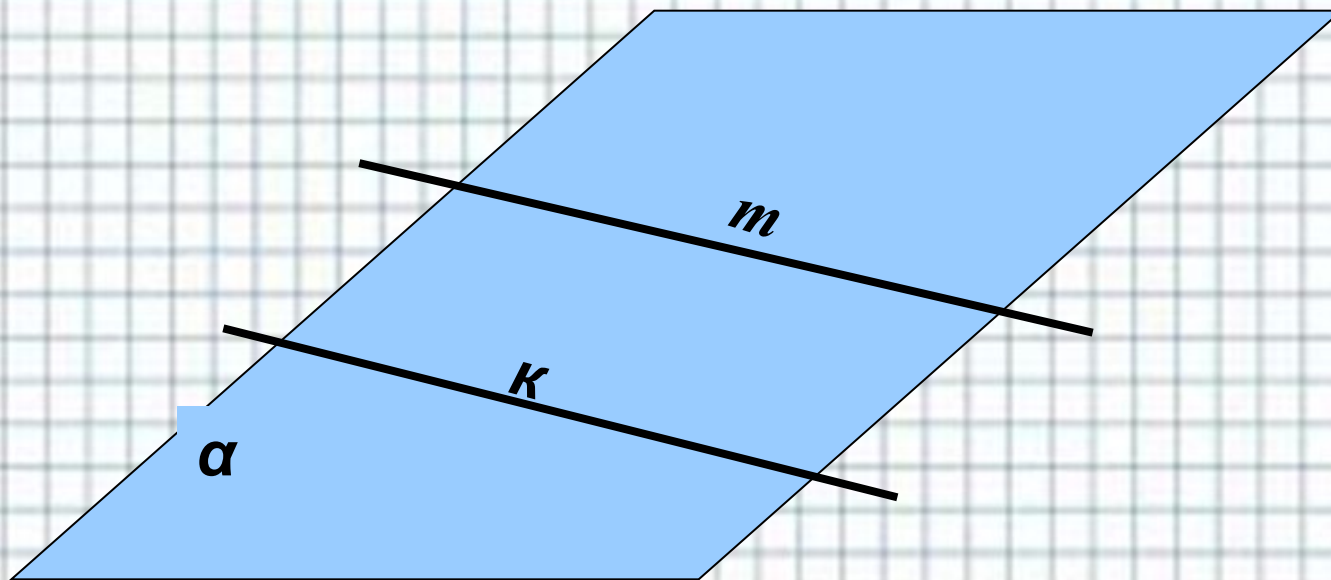


*Через 3 точки, не лежащие на одной прямой,  
можно провести плоскость, и притом  
только одну.*



# Следствие из $T_1$


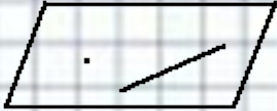


*Через две ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ прямые проходит плоскость, и притом только одна.*





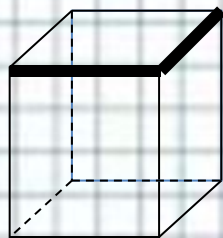
# Вывод

*Как в пространстве можно однозначно задать плоскость?*

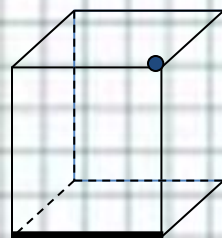
<i>Способы задания плоскостей</i>	<i>Рисунок</i>
<b>1. По трем точкам</b>	 A parallelogram representing a plane with three dots placed inside it, representing three non-collinear points.
<b>2. По прямой и не принадлежащей ей точке.</b>	 A parallelogram representing a plane with a line segment drawn inside it and a single dot placed outside the line, representing a point not on the line.
<b>3. По двум пересекающимся прямым.</b>	 A parallelogram representing a plane with two lines drawn inside it that intersect at a point.
<b>4. По двум параллельным прямым.</b>	 A parallelogram representing a plane with two parallel lines drawn inside it.

# Ответьте на вопросы

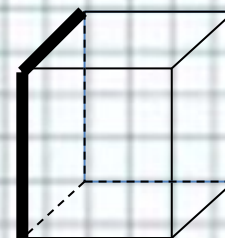
1. Сколько существует способов задания плоскости?
2. Сколько плоскостей можно провести через выделенные элементы?



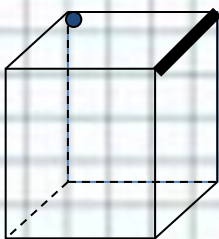
а)



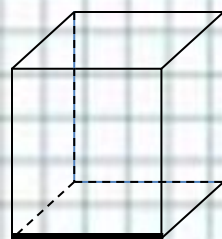
б)



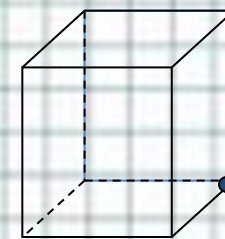
в)



г)



д)



е)

## *Определите: верно, ли утверждение?*

1. Любые три точки лежат в одной плоскости.	<b>Д</b>
2. Любые четыре точки лежат в одной плоскости.	<b>а</b> <b>Нет</b>
3. Любые четыре точки не лежат в одной плоскости.	<b>Нет</b>
4. Если прямая пересекает 2 стороны треугольника, то она лежит в плоскости треугольника.	<b>Да</b>
5. 5 точек не лежат в одной плоскости. Могут ли какие-нибудь 4 из них лежать на одной прямой?	<b>Нет</b>
6. Через середины сторон квадрата проведена плоскость. Совпадает ли она с плоскостью квадрата?	<b>Да</b>

Дано: ABCD-параллелограмм

$A, B, C \in \alpha$

Доказать:  $D \in \alpha$

Доказательство:

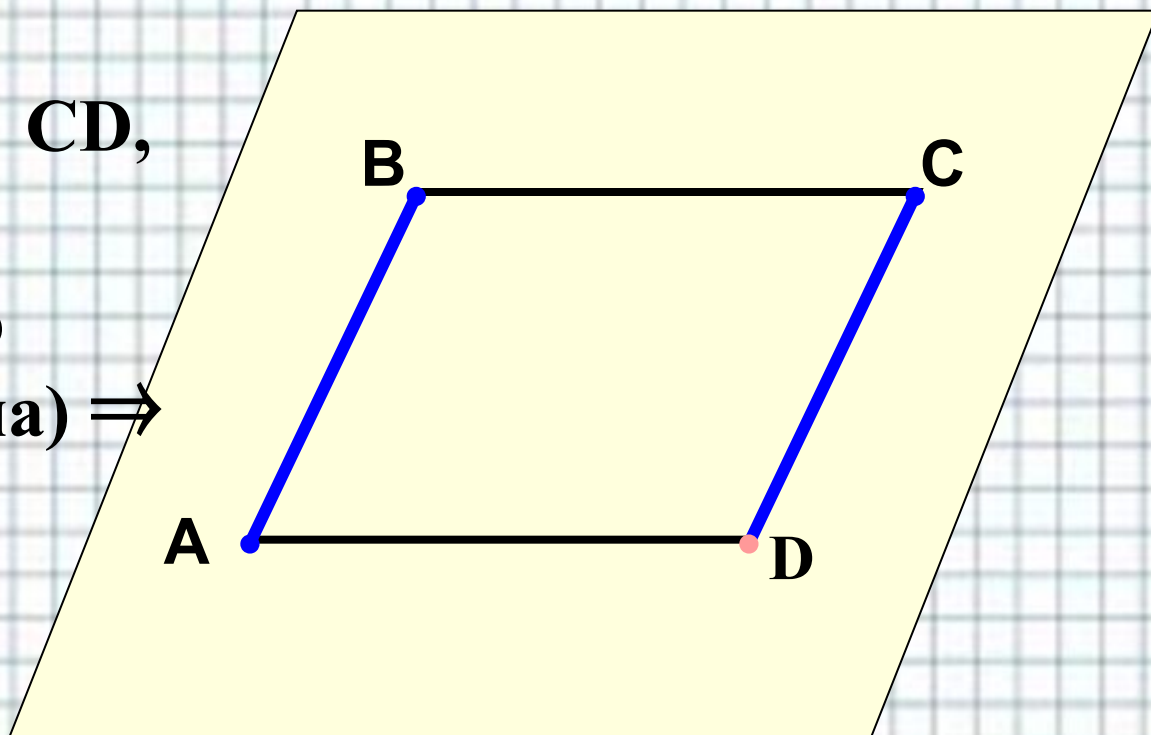
$A, B \in AB, C, D \in CD,$

$AB \parallel CD$

(по определению  
параллелограмма)  $\Rightarrow$

$AB, CD \subset \alpha \Rightarrow$

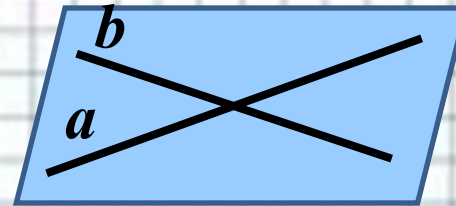
$D \in \alpha$



# *Взаимное расположение прямых в пространстве.*

*Лежат в одной  
плоскости*

*пересекаются*

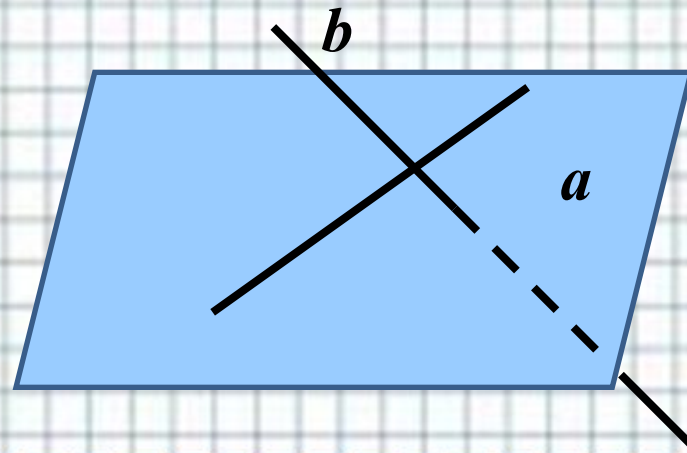


*параллельны*

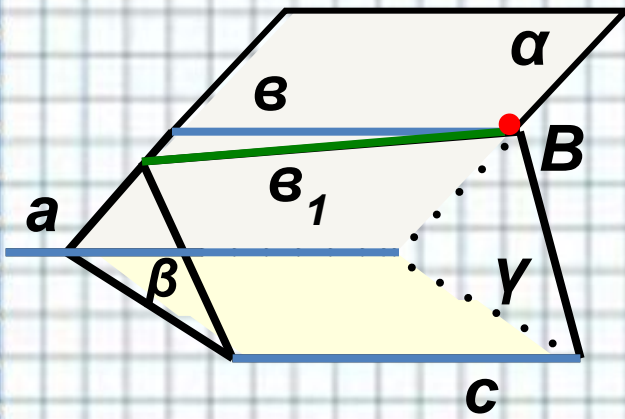


*Не лежат в одной  
плоскости*

*скрещиваются*



# Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны



Доказательство:

1 случай.  $a, v, c \in \alpha$  рассмотрен в планиметрии

2 случай.  $a, v \in \alpha; a, c \in \beta$

1. Возьмем т.В,  $B \in v$

Через т.В и  $c$  проведем плоскость  $\gamma$   $\gamma \cap \alpha = v_1$

2. Если  $v_1 \cap \beta = X, \Rightarrow \underline{X \in a}, v_1 \in \alpha,$

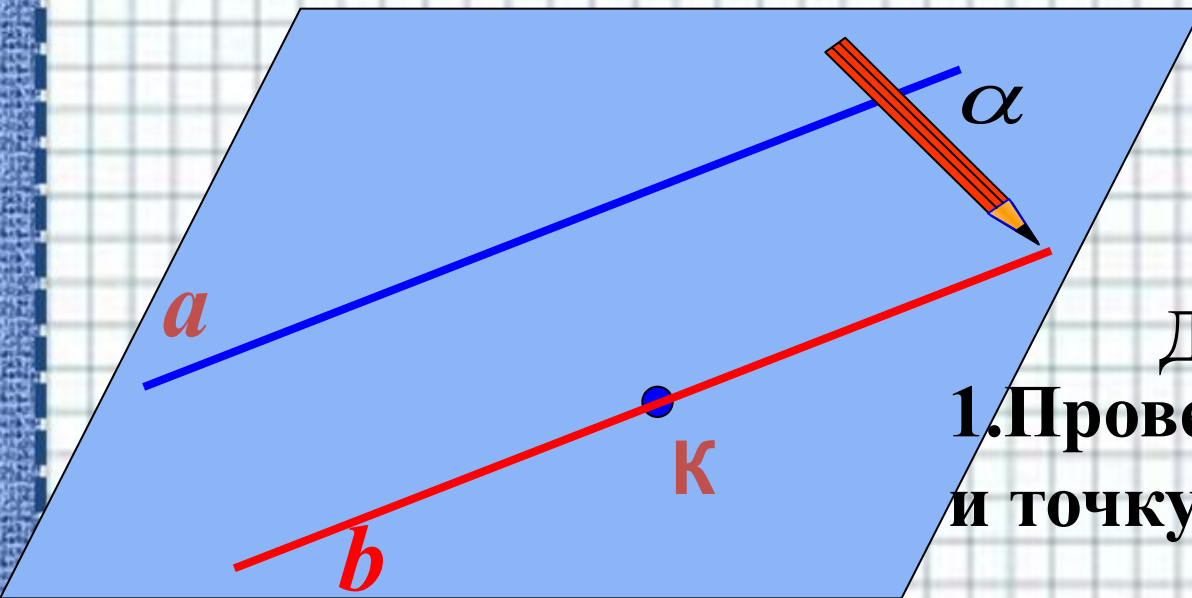
но  $\underline{X \in c}$ , т.к.  $v_1 \in \gamma$ , а т.к.  $a \parallel c \Rightarrow v_1 \cap \beta$

3.  $v_1 \in \alpha, v_1 \cap a \Rightarrow v_1 \parallel a \Rightarrow v_1 = v$  (А параллельных прямых)

4.  $\Rightarrow v \parallel c$

Теорема доказана.

# Теорема о параллельных прямых.



Дано:  $K \notin a$

Доказать:

$\exists ! b: K \in b, b \parallel a$

Доказательство:

1. Проведем через прямую  $a$  и точку  $K$  плоскость  $\alpha$ .

2. Проведем через т.  $K \in \alpha$  прямую  $b, b \parallel a$ . (А планиметрии)  
Единственность (от противного)

1. Пусть  $\exists b_1: K \in b_1, b_1 \parallel a$ . Через прямые  $a$  и  $b_1$  можно провести плоскость  $\alpha_1$ .

2.  $a, K \in \alpha_1; \Rightarrow \alpha_1$  и  $\alpha$  (Т о точке и прямой в пространстве).

3.  $\Rightarrow b = b_1$  (А параллельных прямых). Теорема доказана.

## Задание 1 Вставьте пропущенные слова

- 1) Единственную плоскость можно задать через три точки, при этом они **не лежат** на одной прямой.
- 2) Если **две** точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит плоскости.
- 3) Две различные плоскости могут иметь только одну общую **прямую**
- 4) Прямые являются **параллельными** в пространстве, если они не пересекаются и **лежат** в одной плоскости.
- 5) Если прямая  $a$  лежит в плоскости  $\alpha$ , прямая  $b$  не лежит в плоскости  $\alpha$ , но пересекает ее в точке  $B \notin \alpha$ , то прямые  $a$  и  $b$  **скрещивающиеся**



**Задание 2** Определите: верно, ли утверждение?

1. Если прямая проходит через вершину треугольника, то она лежит в плоскости треугольника.	Нет
2. Если прямые не пересекаются, то они параллельны.	Нет
3. Прямая $m$ параллельна прямой $n$ , прямая $m$ параллельна плоскости $\alpha$ . Прямая $n$ параллельна плоскости $\alpha$ .	Да
4. Все прямые пересекающие стороны треугольника лежат в одной плоскости.	Да
5. Прямая $AB$ и точки $C, D$ не лежат в одной плоскости. Могут ли прямые $AB$ и $CD$ пересекаться?	Нет

**Задание 2** Определите: верно, ли утверждение?

6. Прямые $AB$ и $CD$ пересекаются. Могут ли прямые $AC$ и $BD$ быть скрещивающимися?	Нет
7. Прямые $a$ и $b$ не лежат в одной плоскости. Можно ли провести прямую $c$ , параллельную прямым $a$ и $b$ ?	Нет
8. Прямая $a$ , параллельная прямой $b$ , пересекает плоскость $\alpha$ . Прямая $c$ параллельна прямой $b$ . Может ли прямая $c$ лежать в плоскости $\alpha$ ?	Нет
9. Прямая $a$ параллельна плоскости $\alpha$ . Существует ли на плоскости $\alpha$ прямые, непараллельные $a$ ?	Да

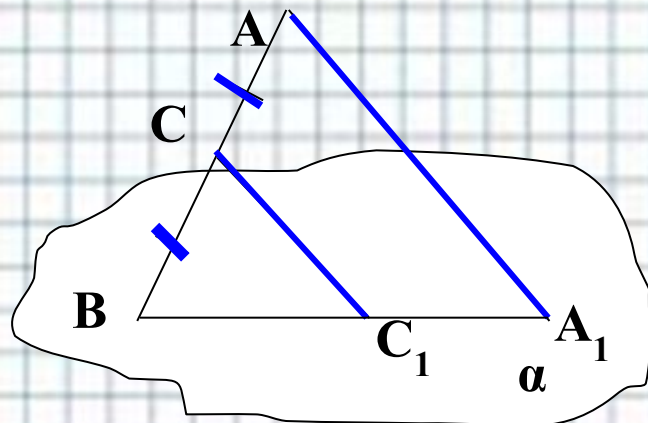
### Задание 3

Дано:  $BC=AC$ ,

$CC_1 \parallel AA_1$ ,

$AA_1=22$  см

Найти:  $CC_1$



Решение:

$AA_1 \parallel CC_1$ ,  $AC = BC$

$\Rightarrow C_1$  – середина  $A_1B$

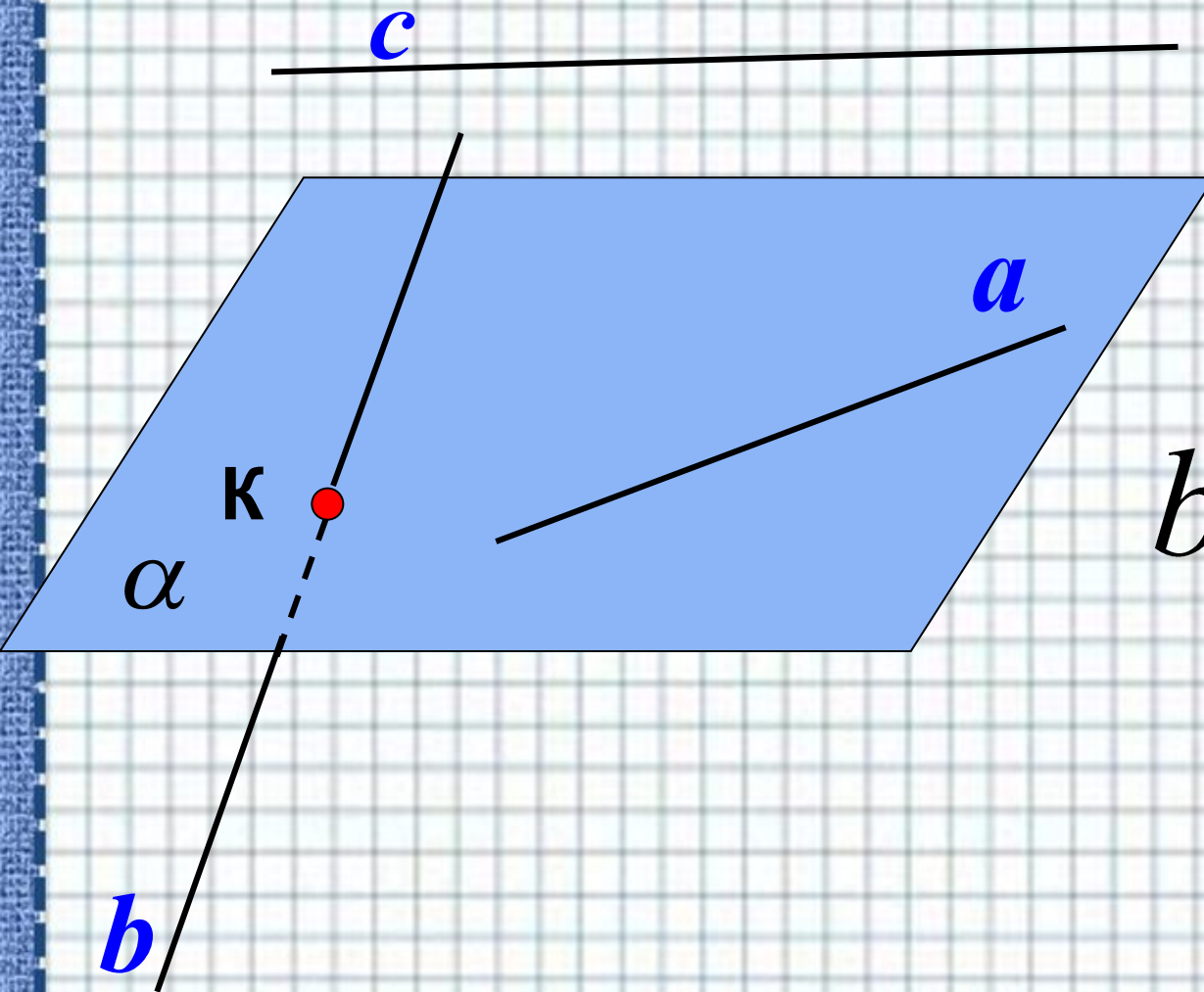
(по т.Фалеса)  $\Rightarrow$

$C C_1$  – средняя линия  $\triangle AA_1B \Rightarrow$

$C C_1 = 0,5AA_1 = 11$  см

Ответ: 11см.

# Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

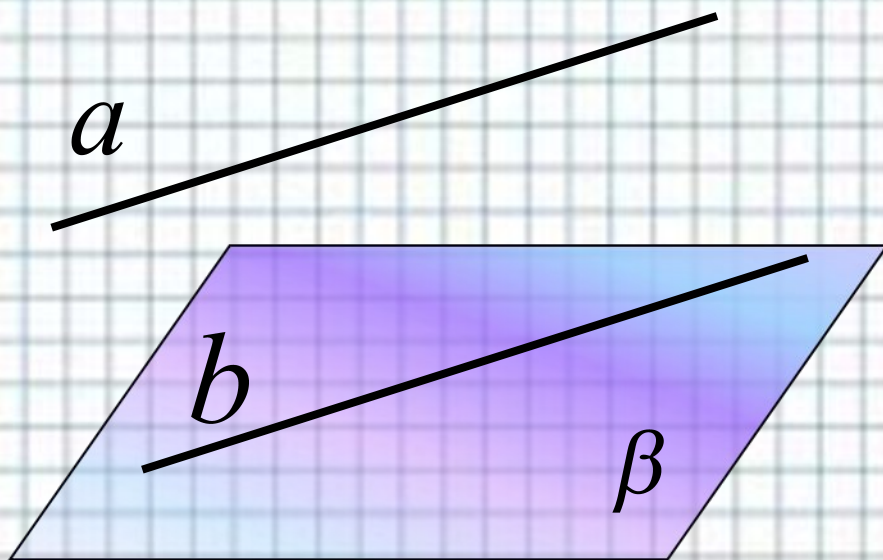


$$a \subset \alpha$$

$$b \cap \alpha = K$$

$$c \parallel \alpha$$

Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то *она параллельна и самой плоскости.*



Дано:

$$a \not\subset \beta$$

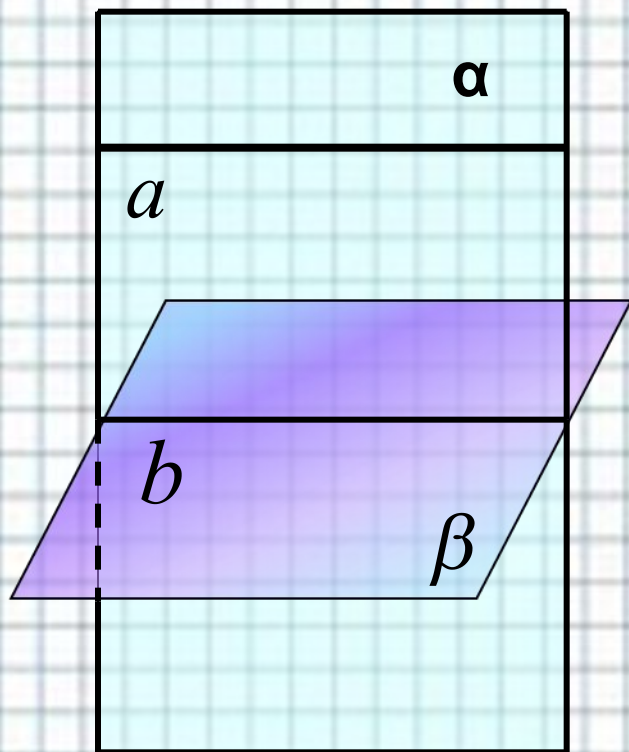
$$a \parallel b$$

$$b \subset \beta$$

Доказать:

$$a \parallel \beta$$

Пусть  $a \not\subset \beta$ ,  $b \subset \beta$ ,  $a \parallel b$



1. Через прямые  $a$  и  $b$  проведем плоскость  $\alpha$

2.  $\alpha \cap \beta = b$

Если  $a \cap \beta = X$ , то  $X \in b$ , это невозможно, т.к.  $a \parallel b$

$\Rightarrow a \not\cap \beta$

$\Rightarrow a \parallel \beta$

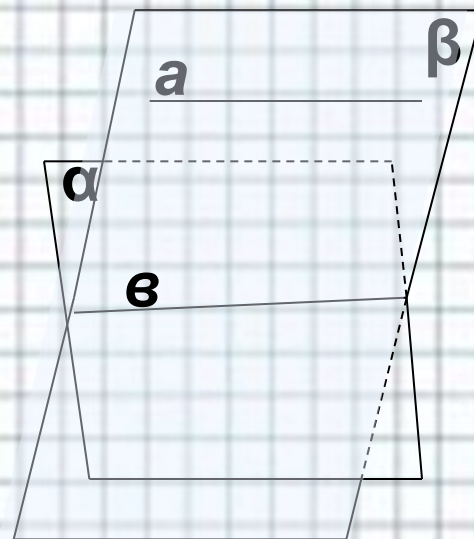
Теорема доказана.

## Задание 2

Дано:  $a \parallel \alpha$

$a \subset \beta$ ;  $\beta \cap \alpha = v$

Доказать:  $a \parallel v$



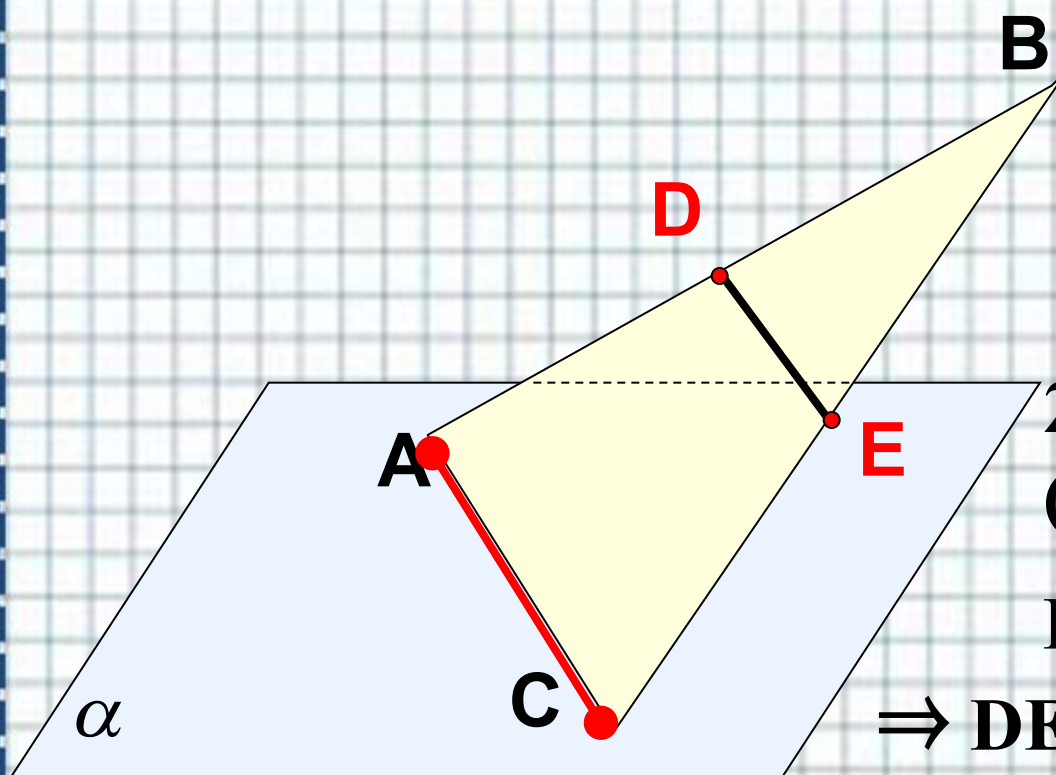
**Доказательство:**

$a, v \subset \beta$

Пусть  $v \cap a$ , тогда  $a \cap \alpha$ ,  
что противоречит условию.

Значит  $v \parallel a$

Плоскость проходит через сторону  $AC$   $\triangle ABC$ . Точки  $D$  и  $E$  - середины отрезков  $AB$  и  $BC$  соответственно. Докажите, что  $DE \parallel \alpha$



**Доказательство:**

1. Точки  $D$  и  $E$  -  
середины отрезков  
 $AB$  и  $BC$

соответственно  $\Rightarrow$

2.  $DE$  – средняя линия  
(по определению)  $\Rightarrow$

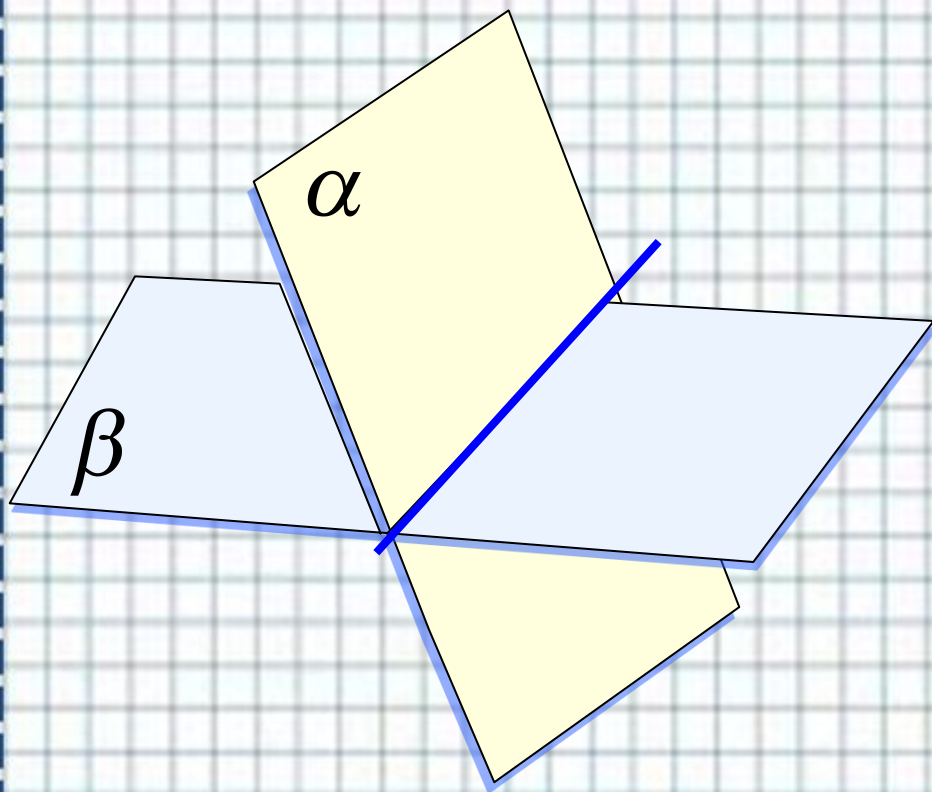
$DE \parallel AC$  (по свойству)

$\Rightarrow DE \parallel \alpha$  ( по признаку  
параллельности прямой и  
плоскости)

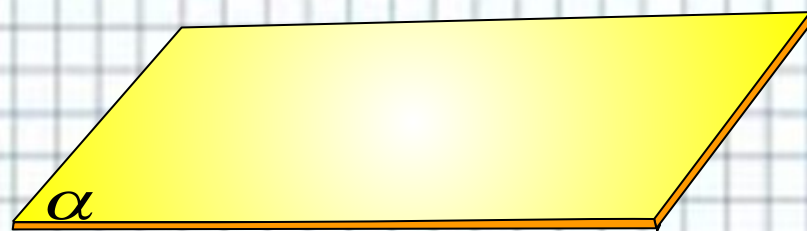


# Расположение плоскостей в пространстве.

$\alpha$  и  $\beta$  совпадают



$\alpha \cap \beta$



$\alpha \parallel \beta$

## Признак параллельности двух плоскостей.

*Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.*

*Дано:  $a \cap b = M, a \in \alpha, b \in \alpha.$*

*$a_1 \cap b_1, a_1 \in \beta, b_1 \in \beta. a \parallel a_1, b \parallel b_1.$*

*Доказать:  $\alpha \parallel \beta$*

*Доказательство:*

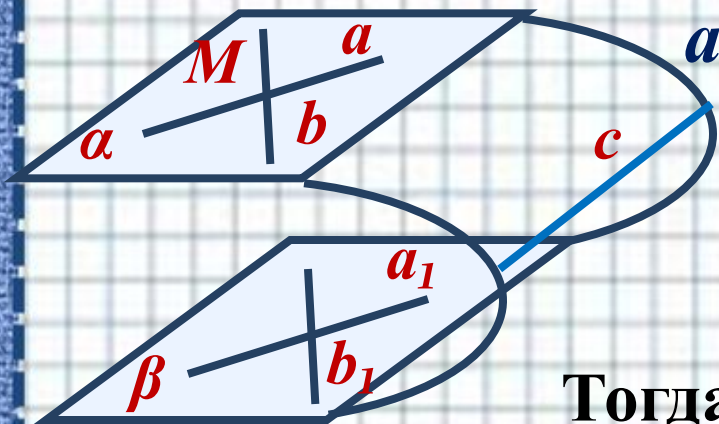
1. Пусть  $\alpha \cap \beta = c.$

Тогда  $a \parallel \beta, a \subset \alpha, \alpha \cap \beta = c,$  значит  $a \parallel c.$

2.  $b \parallel \beta, b \subset \alpha, \alpha \cap \beta = c,$  значит  $b \parallel c.$

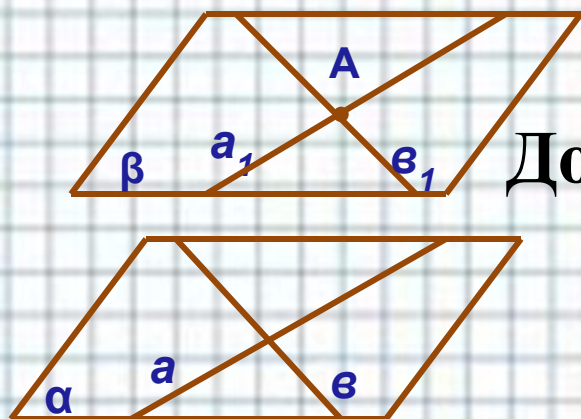
3. Имеем, что через точку  $M$  проходят две прямые  $a$  и  $b,$  параллельные прямой  $c,$  чего быть не может.

Значит  $\alpha \parallel \beta.$



# Теорема

*Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, причём единственную.*



**Дано:** плоскость  $\alpha$ ,

точка  $A$  вне плоскости  $\alpha$ .

**Доказать:** существует плоскость  $\beta \parallel \alpha$ , проходящая через точку  $A$

**Доказательство.**

1. В плоскости  $\alpha$  проведём прямые  $a \cap b$ .

Через точку  $A$  проведём  $a_1 \parallel a$  и  $b_1 \parallel b$ .

По признаку параллельности плоскостей прямые  $a_1$  и  $b_1$  задают плоскость  $\beta \parallel \alpha$ .

Существование плоскости  $\beta$  доказано.

**Докажем единственность плоскости  $\beta$  методом от противного.**

Допустим, что существует плоскость  $\beta_1$ , которая проходит через т. А и  $\beta_1 \parallel \alpha$ .

Отметим в плоскости  $\beta_1$  т.  $C \notin \beta$ .

Отметим произвольную т.  $B \in \alpha$ .  
Через точки А, В и С проведем  $\gamma$ .

$$\gamma \cap \alpha = v, \quad \gamma \cap \beta = a, \quad \gamma \cap \beta_1 = c.$$

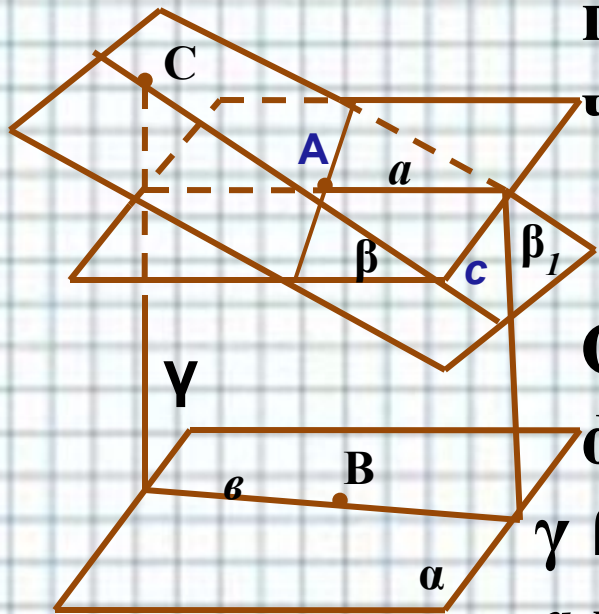
$a$  и  $c$  не пересекают плоскость  $\alpha$ ,

значит они не пересекают прямую  $v$ ,  $\Rightarrow a \parallel v$  и  $c \parallel v$

Получили, что через т. А проходят две прямые, параллельные прямой  $v$ , чего быть не может.

$\Rightarrow$  наше предположение ложное.

Единственность  $\beta$  доказана.



## Свойство параллельных плоскостей.

*Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.*

Дано:

$$\alpha \parallel \beta, \alpha \cap \gamma = a$$

$$\beta \cap \gamma = b$$

Доказать:  $a \parallel b$

Доказательство:

1.  $a \subset \gamma, b \subset \gamma$

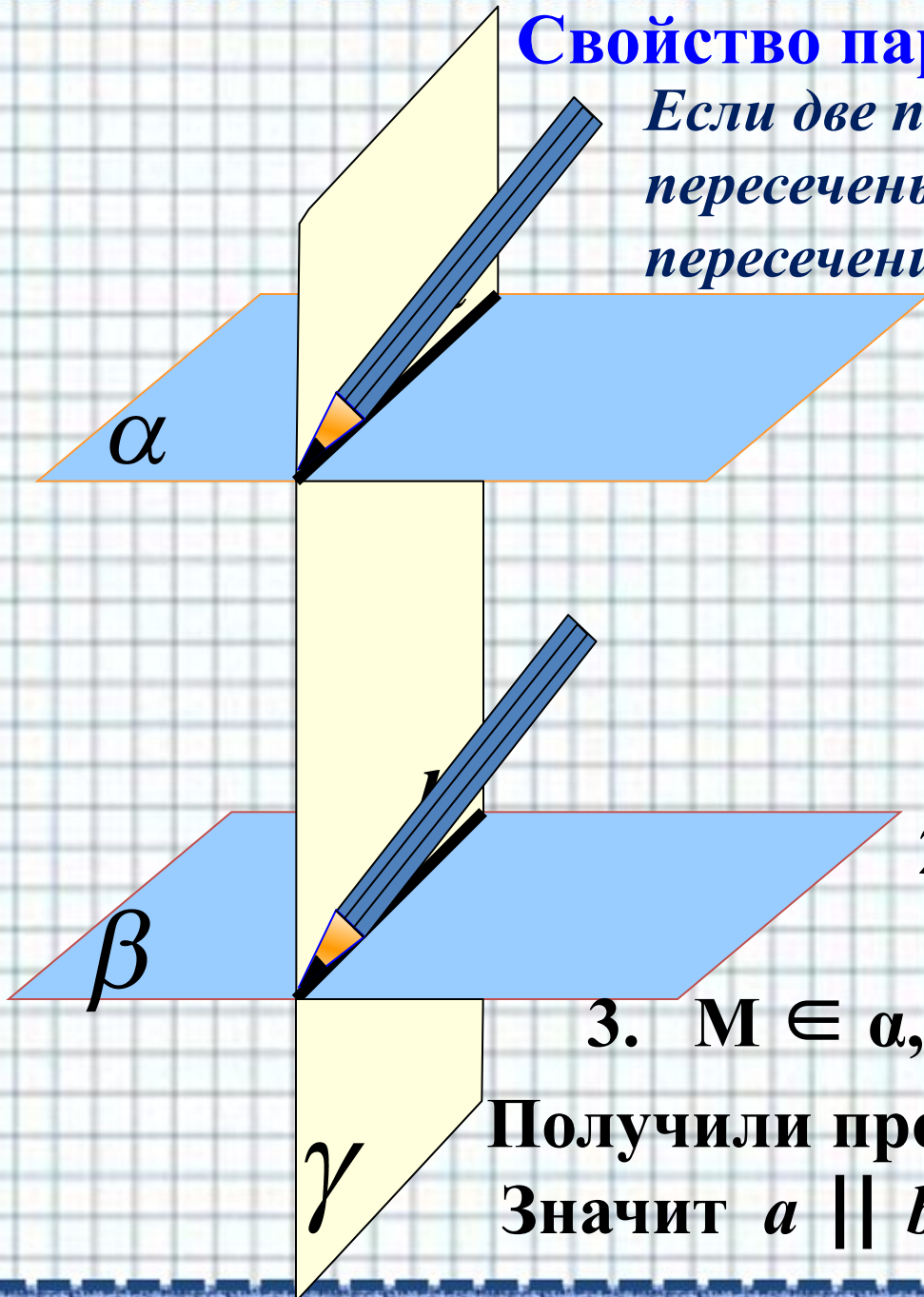
2. Пусть  $a \parallel b$ ,

тогда  $a \cap b = M$

3.  $M \in \alpha, M \in \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = c (A_2)$

Получили противоречие с условием.

Значит  $a \parallel b$  ч. т. д.



**Свойство параллельных плоскостей.**  
**Отрезки параллельных прямых,**  
**заключенные между параллельными**  
**плоскостями, равны.**

**Дано:**

$$\alpha \parallel \beta, AB \parallel CD$$

$$AB \cap \alpha = A, AB \cap \beta = B,$$

$$CD \cap \alpha = C, CD \cap \beta = D$$

**Доказать:  $AB = CD$**

**Доказательство:**

1. Через  $AB \parallel CD$  проведем  $\gamma$

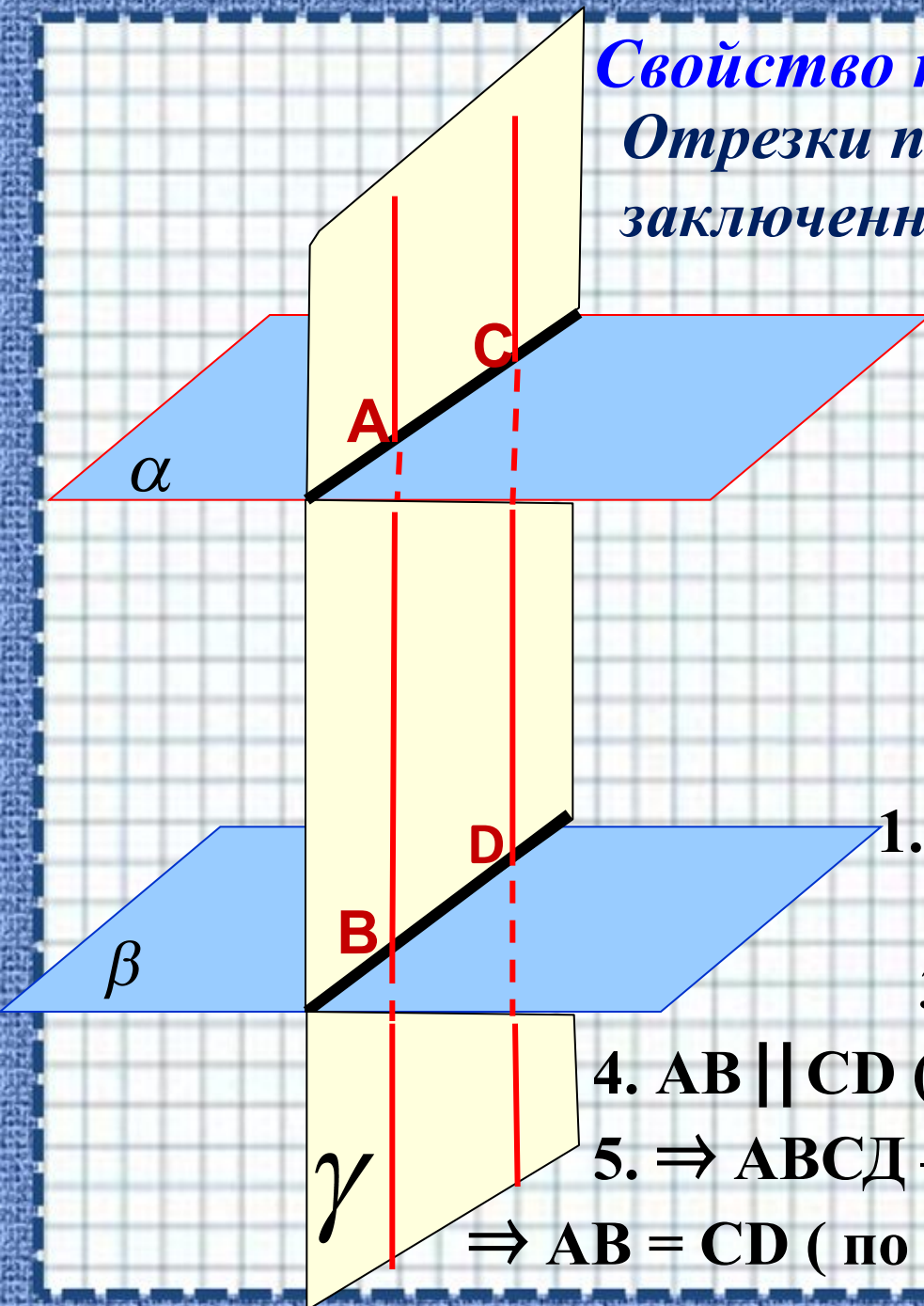
$$2. \alpha \parallel \beta, \alpha \cap \gamma = a, \beta \cap \gamma = b$$

$$3. \Rightarrow AC \parallel BD,$$

4.  $AB \parallel CD$  (как отрезки паралл. прямых)

5.  $\Rightarrow ABCD$  – параллелограмм (по опр.)

$\Rightarrow AB = CD$  ( по свойству параллелограмма)

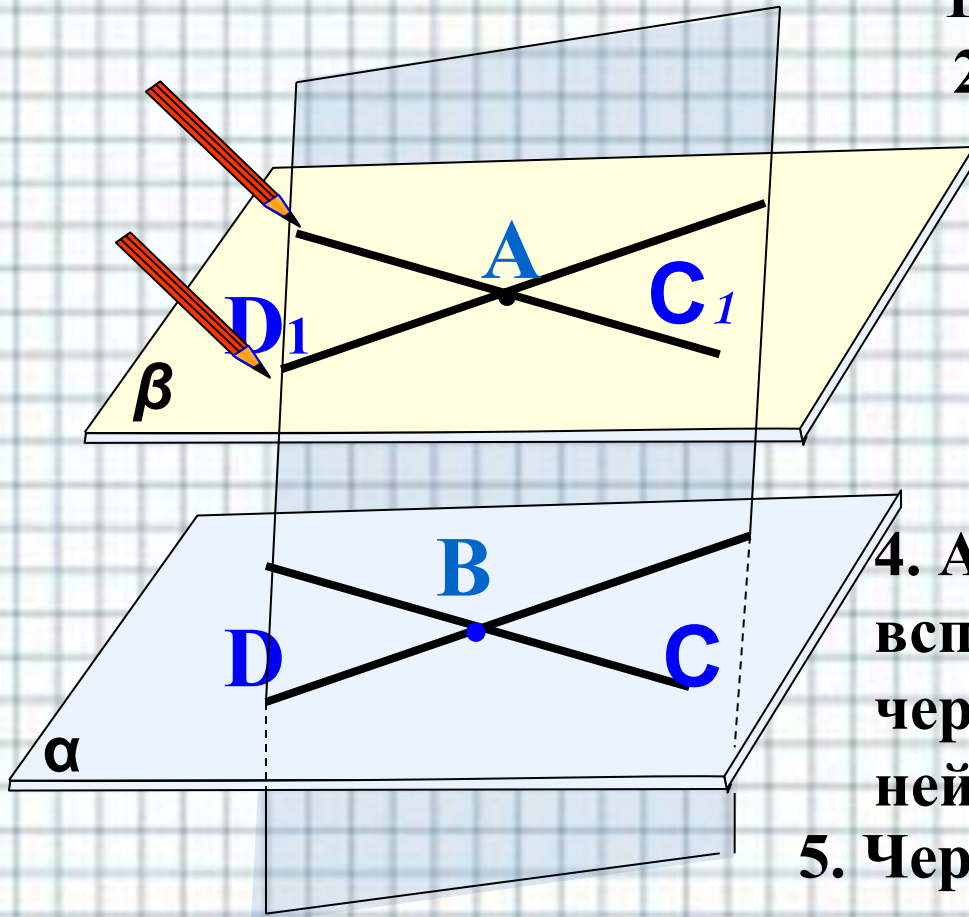


## *Определите: верно, ли утверждение?*

1. если плоскости не пересекаются, то они параллельны. **ДА**
2. плоскости параллельны, если прямая лежащая в одной плоскости, параллельна другой плоскости? **НЕ Т**
3. если две прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны? **НЕ Т**
4. если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости. **ДА**
5. прямые, по которым две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, параллельны. **ДА**
6. Если прямая пересекает одну из двух плоскостей, то она пересекает и другую. **НЕ Т**
7. Две плоскости, параллельные третьей, параллельны. **ДА**
8. Отрезки прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны. **НЕ Т**

**Через данную точку  $A$  провести плоскость, параллельную данной плоскости  $\alpha$ , не проходящей через точку.**

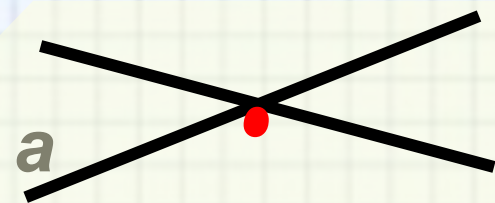
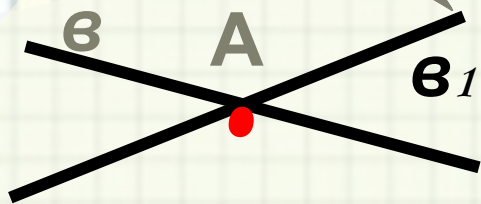
**Решение.**



1. В плоскости  $\alpha$  возьмем т.  $B$ .
2. Проведем прямые  $BC$  и  $BD$ .
3. Построим вспомогательную плоскость через точку  $A$  и прямую  $BD$ , в ней проведем прямую  $AD_1 \parallel BD$ .
4. Аналогично построим вспомогательную плоскость через точку  $A$  и прямую  $BC$ , в ней проведем прямую  $AC_1 \parallel BC$ .
5. Через прямые  $AD_1$  и  $AC_1$  проведем плоскость  $\beta$



**Задача 2.** Доказать, что через каждую из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость так, чтобы эти плоскости были параллельны.



**Доказательство:**

Пусть  $a$  скрещивается с  $v$ .

На прямой  $v$  возьмем т.  $A$ ,  
через прямую  $a$  и т.  $A$  проведем  
плоскость,

в этой плоскости через т.  $A$   
проведем прямую  $v_1$ ,  $v_1 \parallel v$ .

Через  $v_1 \cap v$  проведем плоскость  $\alpha$ .

Аналогично строим плоскость  $\beta$ .

По признаку параллельности  
плоскостей  $\alpha \parallel \beta$ .

[Prezented.](#)

[Ru](#)