

Электричество и магнетизм

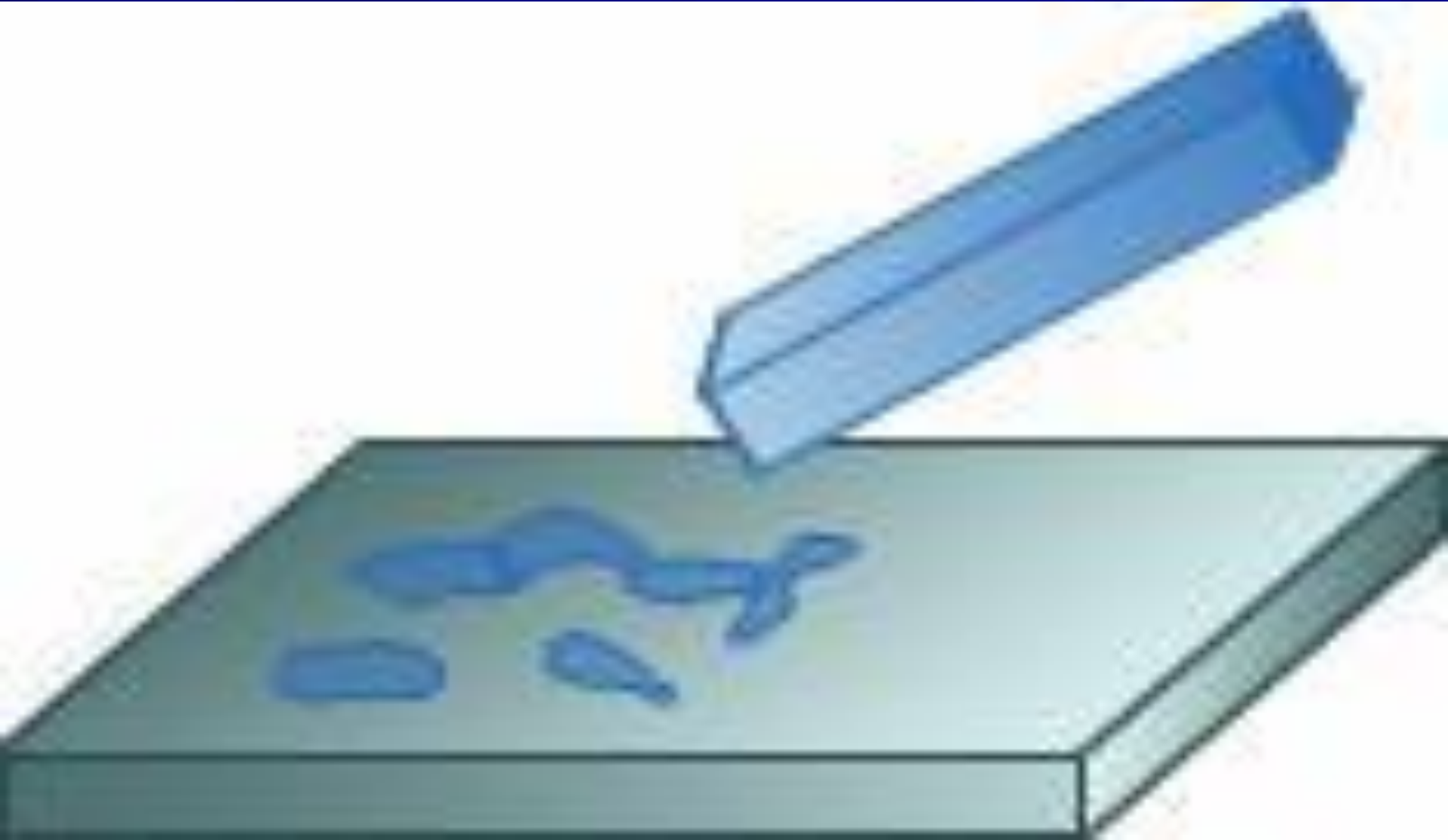
**Закон Кулона. Напряженность.
Электрический диполь. Потенциал.**

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

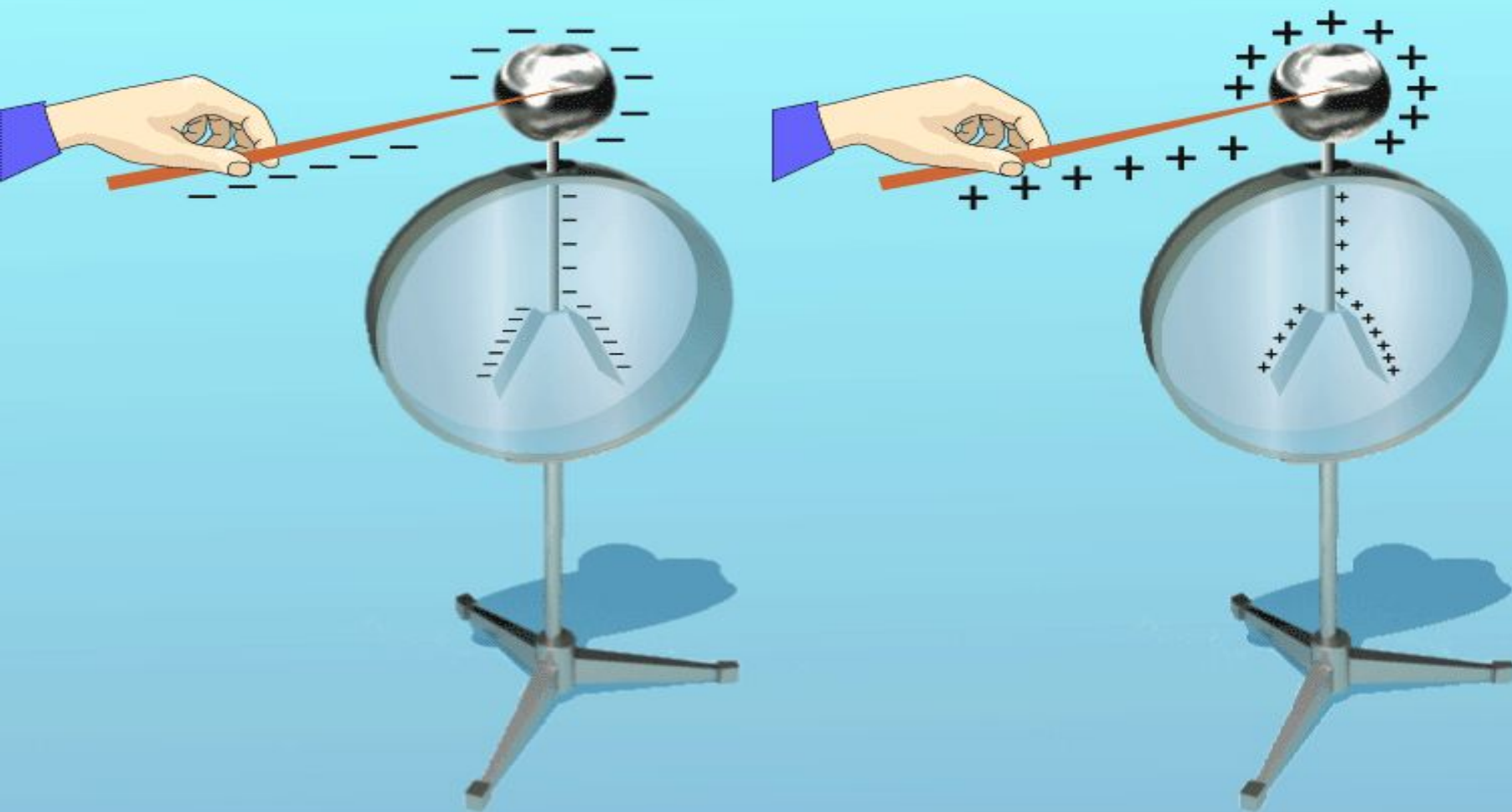
План лекции

- Электрический заряд и его свойства
- Закон сохранения заряда. Закон Кулона.
- Напряжённость электростатического поля.
- Линии напряжённости электростатического поля. Поток вектора напряжённости.
- Принципы суперпозиции. Поле диполя.
- Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме.
- Циркуляция вектора напряжённости электростатического поля.

Электризация



Электроскоп



Закон сохранения заряда

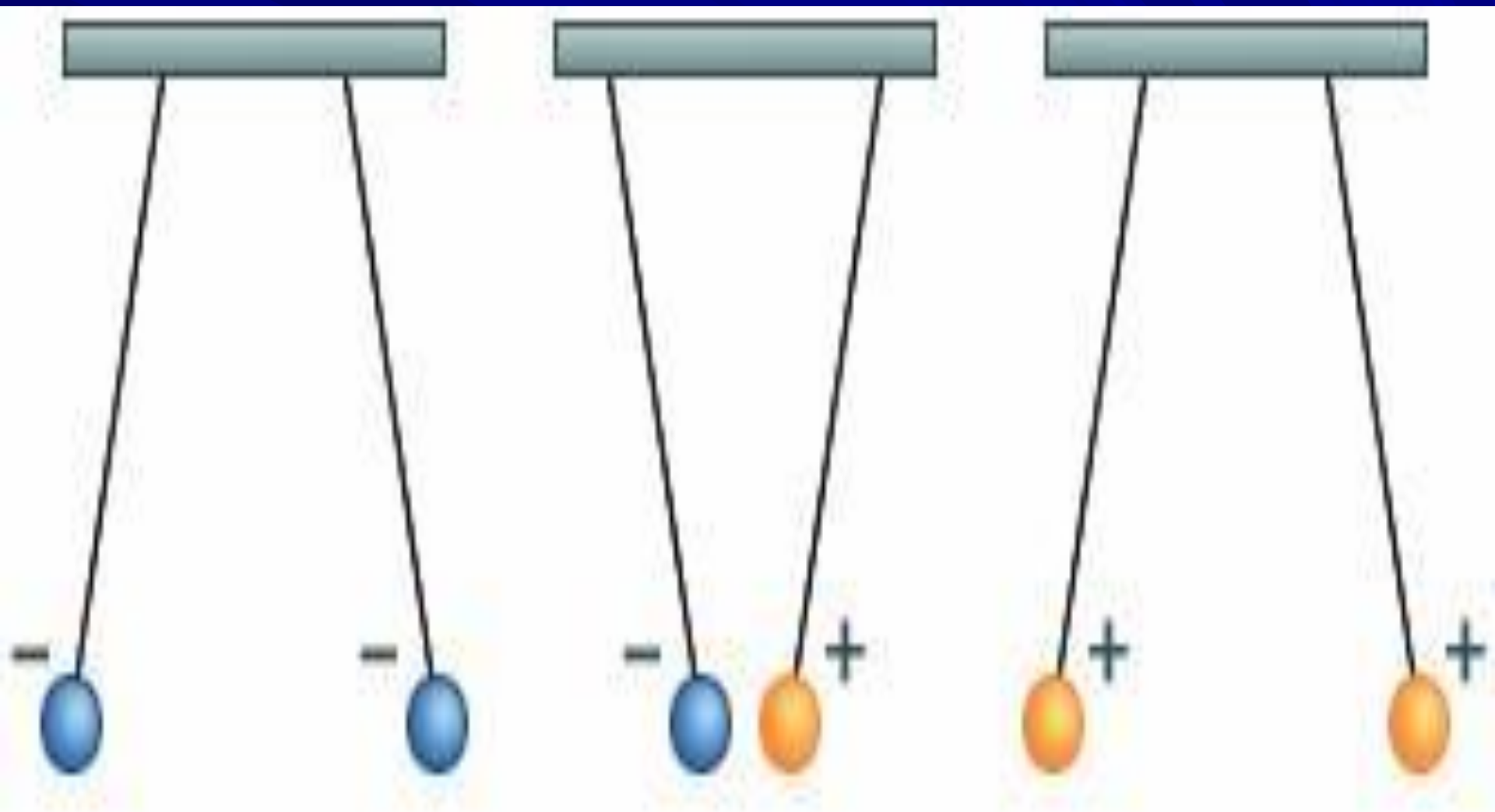
- Алгебраическая сумма электрических зарядов любой замкнутой системы остаётся неизменной, какие бы процессы ни происходили внутри данной системы.
- Замкнутая система — система, не обменивающаяся зарядами с внешними телами

Закон сохранения электрического заряда

В электрически изолированной системе, т. е. в системе, которая не обменивается зарядами с внешними телами, алгебраическая сумма электрических зарядов является величиной постоянной:

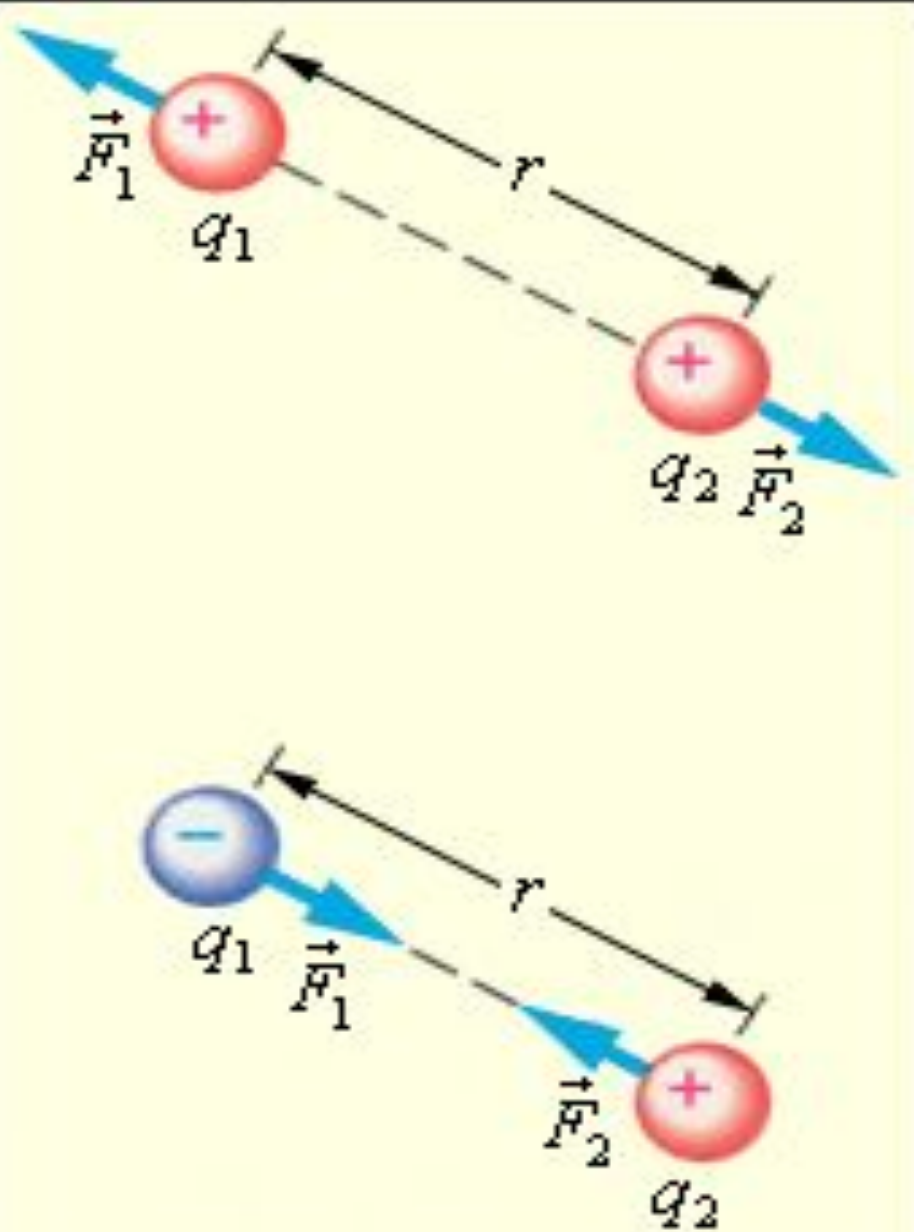
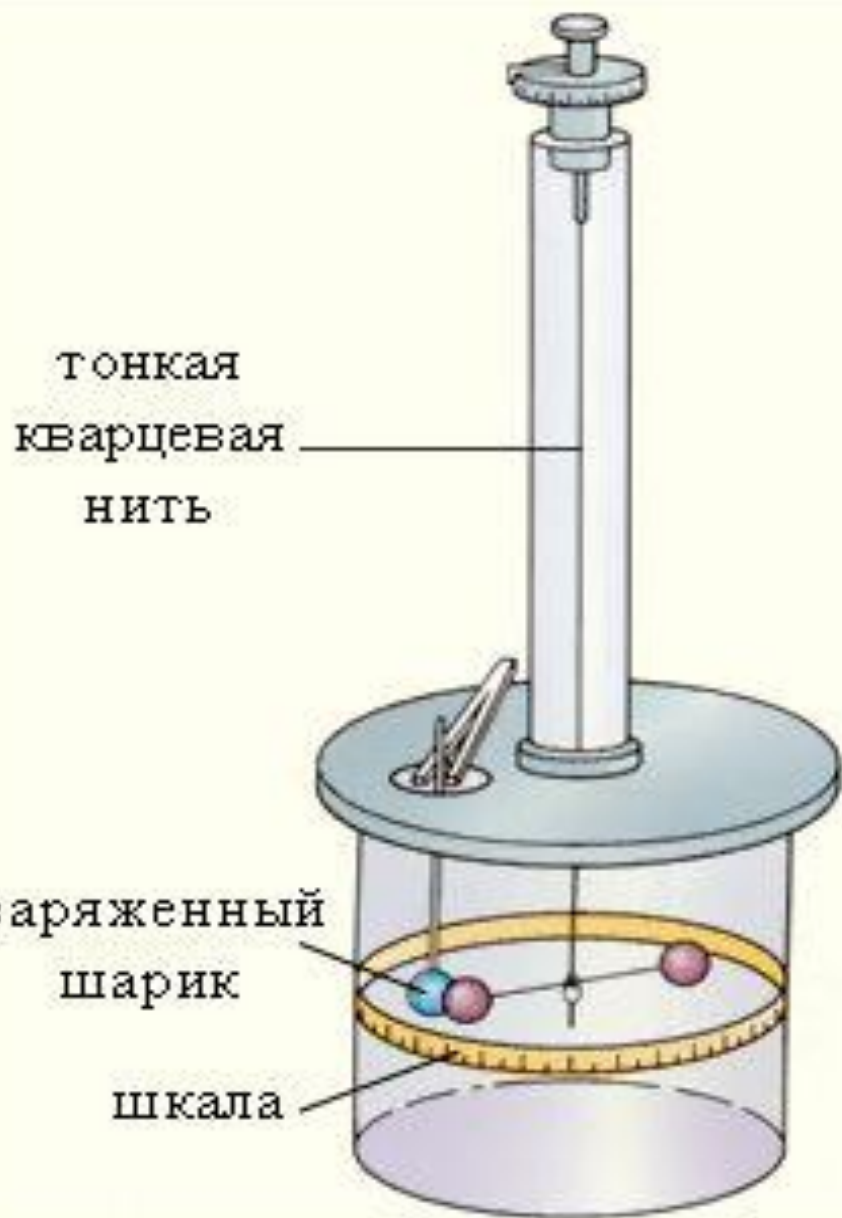
$$\sum_{i=1}^n q_i = \text{const}$$

Взаимодействие зарядов



Закон Кулона

Закон Кулона



Закон Кулона

- Сила взаимодействия между неподвижными точечными зарядами, находящимися в вакууме, пропорциональна зарядам q_1 и q_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними:

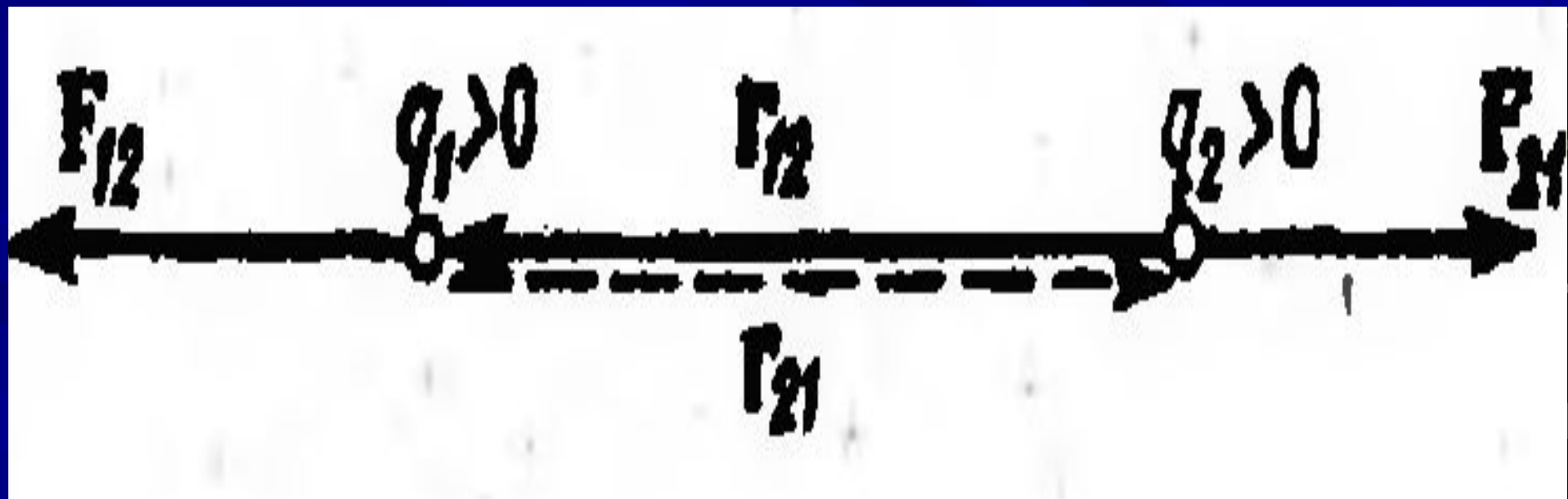
$$F = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{\varepsilon \cdot r^2}$$

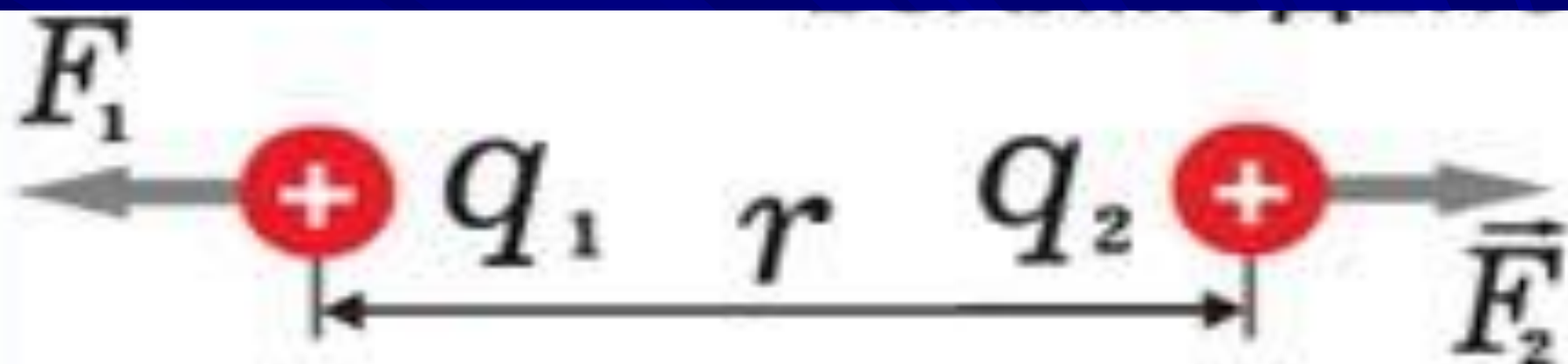
$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$$

$$\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$$

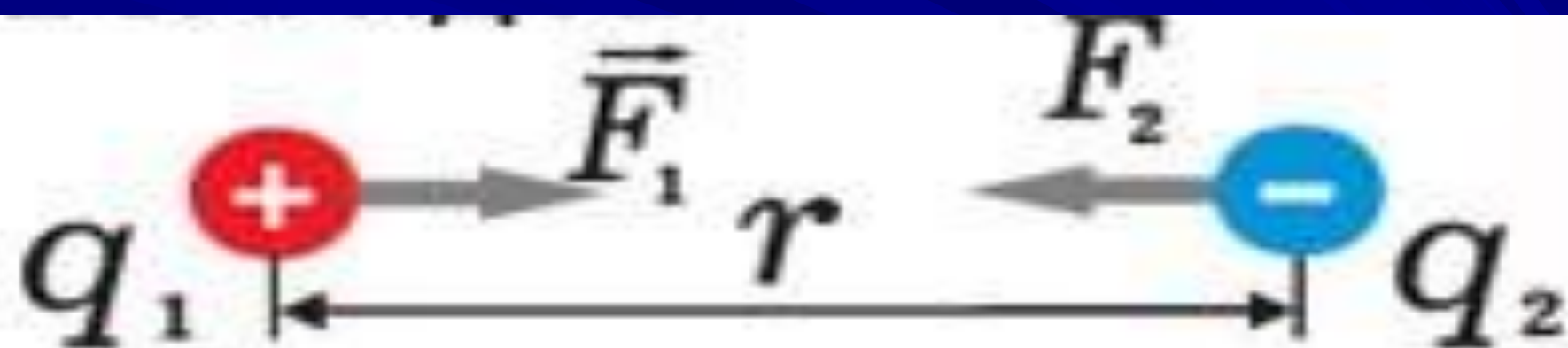
$$F_{12} = k \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2} \cdot \frac{r_{12}}{r}$$

$$F_{21} = k \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2} \cdot \frac{r_{21}}{r}$$

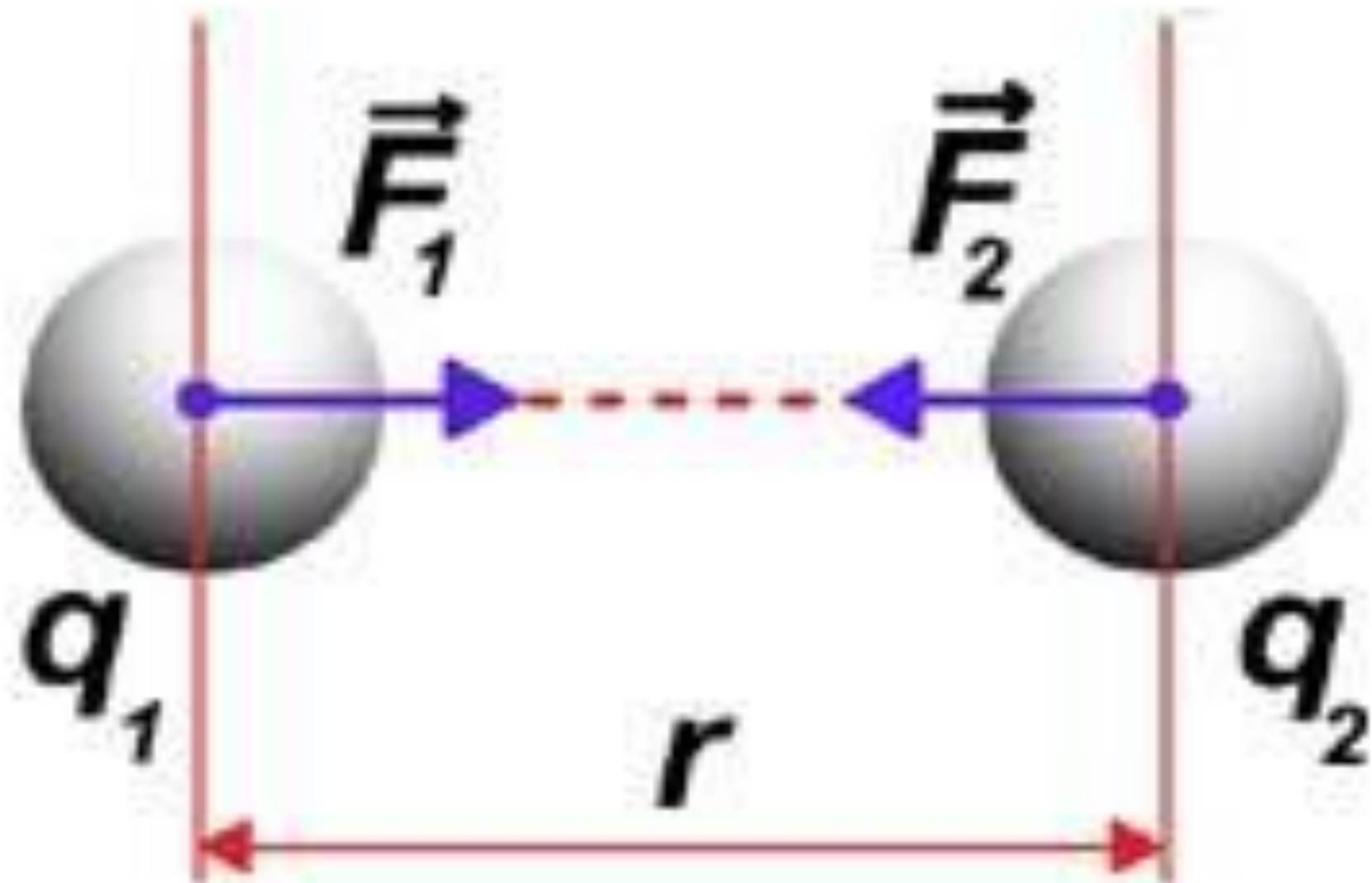




$$1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ Нм}^2 / \text{Кл}^2$$



$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 / \text{Нм}^2$$



Кулоновская сила

- Сила \vec{F} направлена по прямой, соединяющей взаимодействующие заряды, т.е. является **центральной**.
- В случае разноимённых зарядов $F < 0$ соответствует притяжению.
- В случае одноимённых зарядов $F > 0$ соответствует отталкиванию.
- Эта сила называется **кулоновской силой**.

Распределение электрических зарядов

Линейная плотность электрических зарядов

$$\tau = \frac{dq}{dl}$$

Поверхностная плотность электрических зарядов

$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$

Объемная плотность электрических зарядов

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

Напряженность электрического поля

Электростатическое поле

- **Напряжённость электростатического поля** – физическая величина, определяемая силой, действующей на единичный положительный заряд, помещённый в данную точку поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

- Напряжённость электростатического поля – **силовая векторная характеристика** электростатического поля.

Напряженность поля точечного заряда

$$\vec{F} = K \frac{qq_{np}}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{np}} = K \frac{qq_{np}}{r^2 q_{np}} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

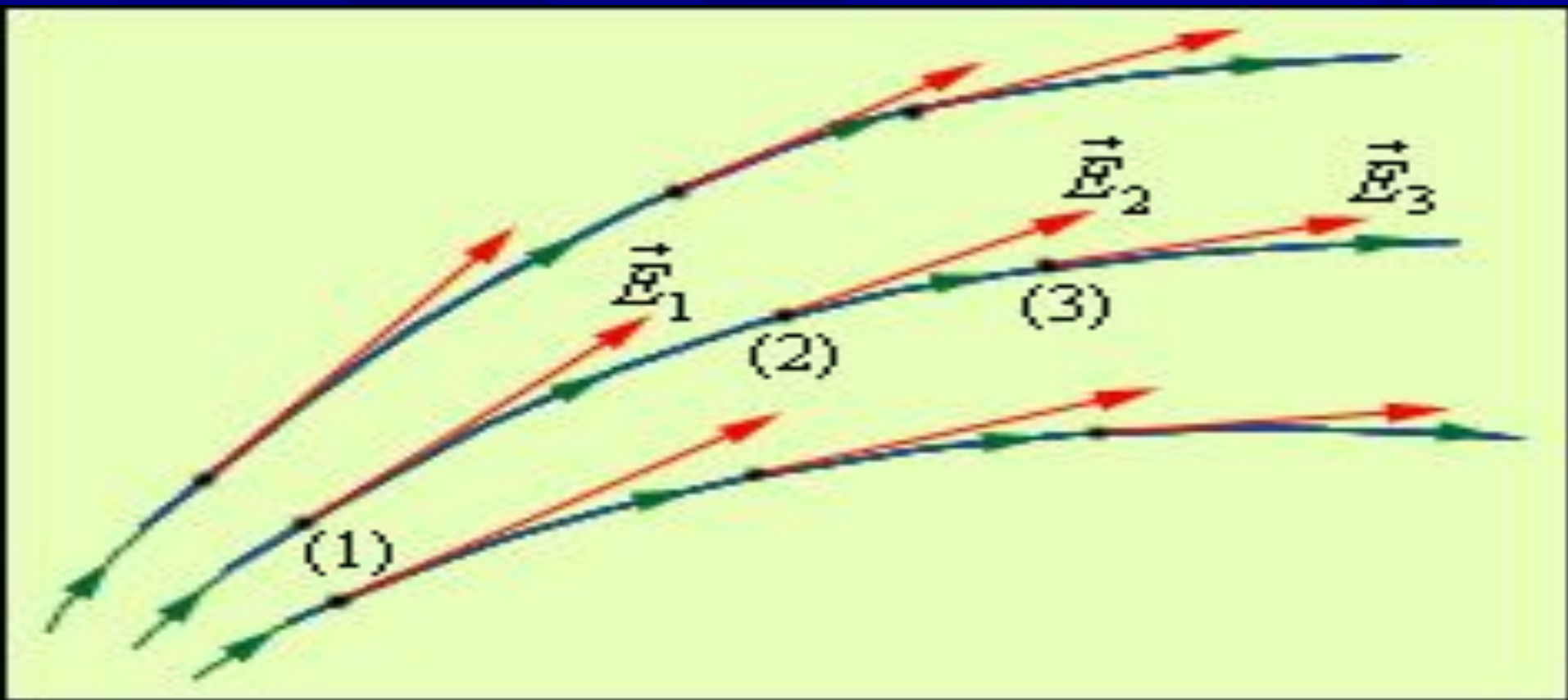
$$\vec{E} = K \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad E = K \frac{|q|}{r^2}$$

Вектор напряженности во всех точках поля направлен

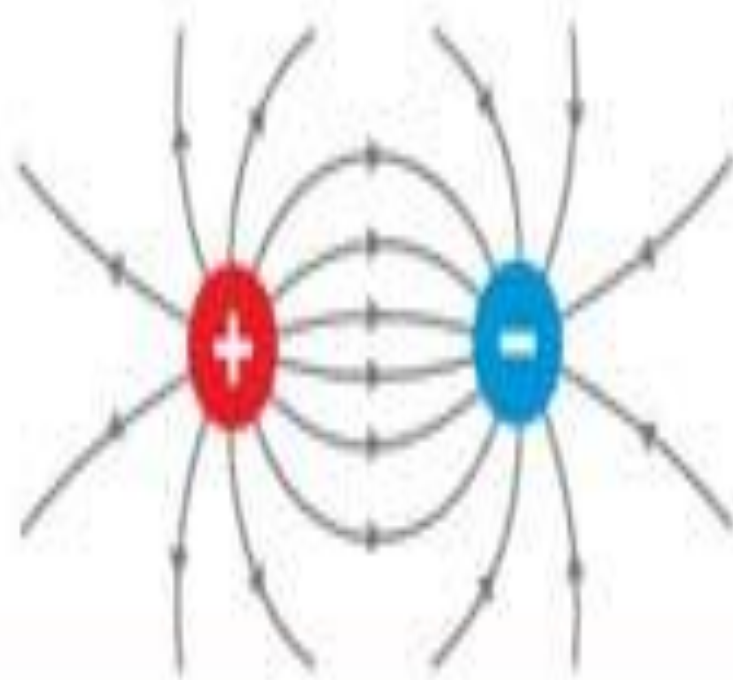
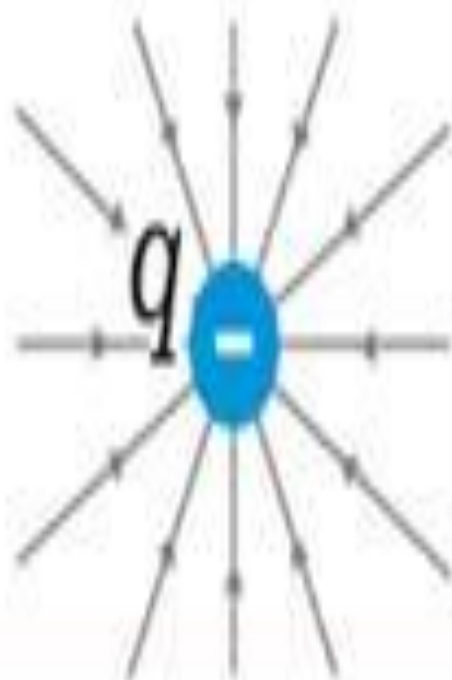
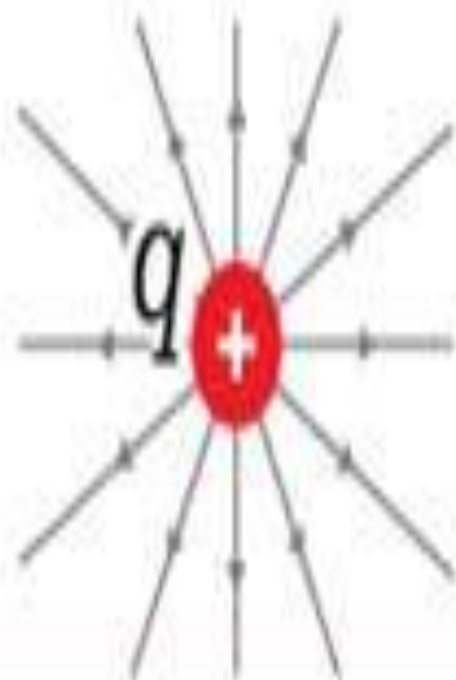
- радиально от заряда, если он положителен,
- и радиально к заряду, если отрицателен

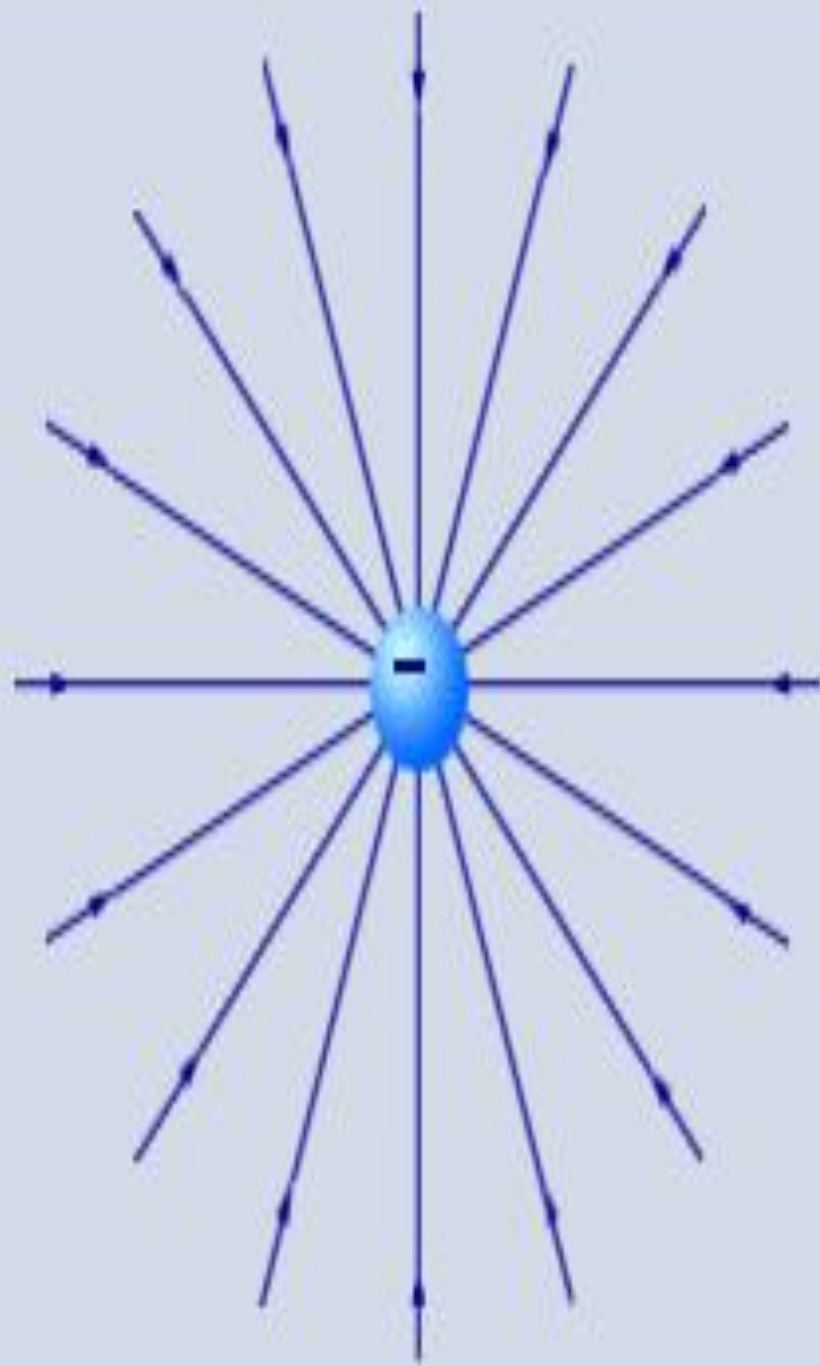
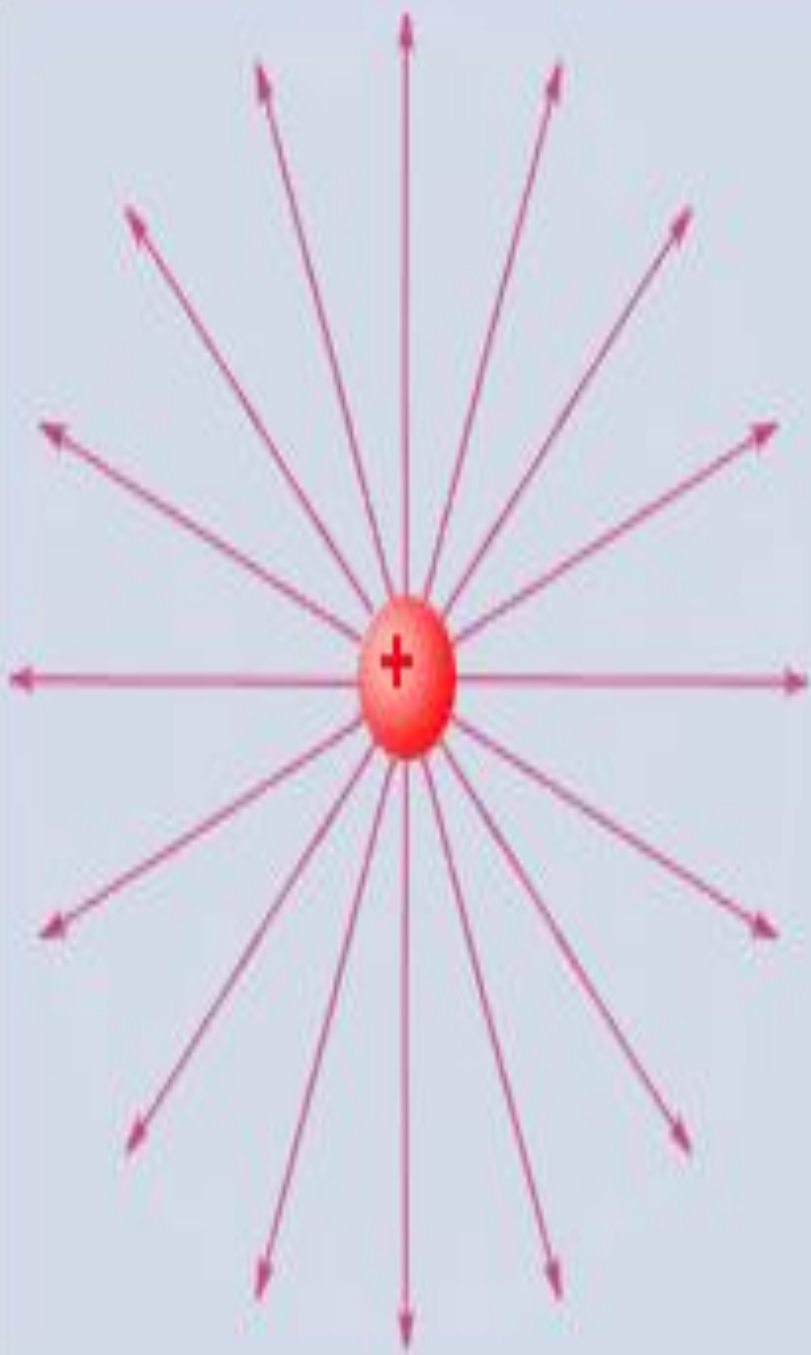


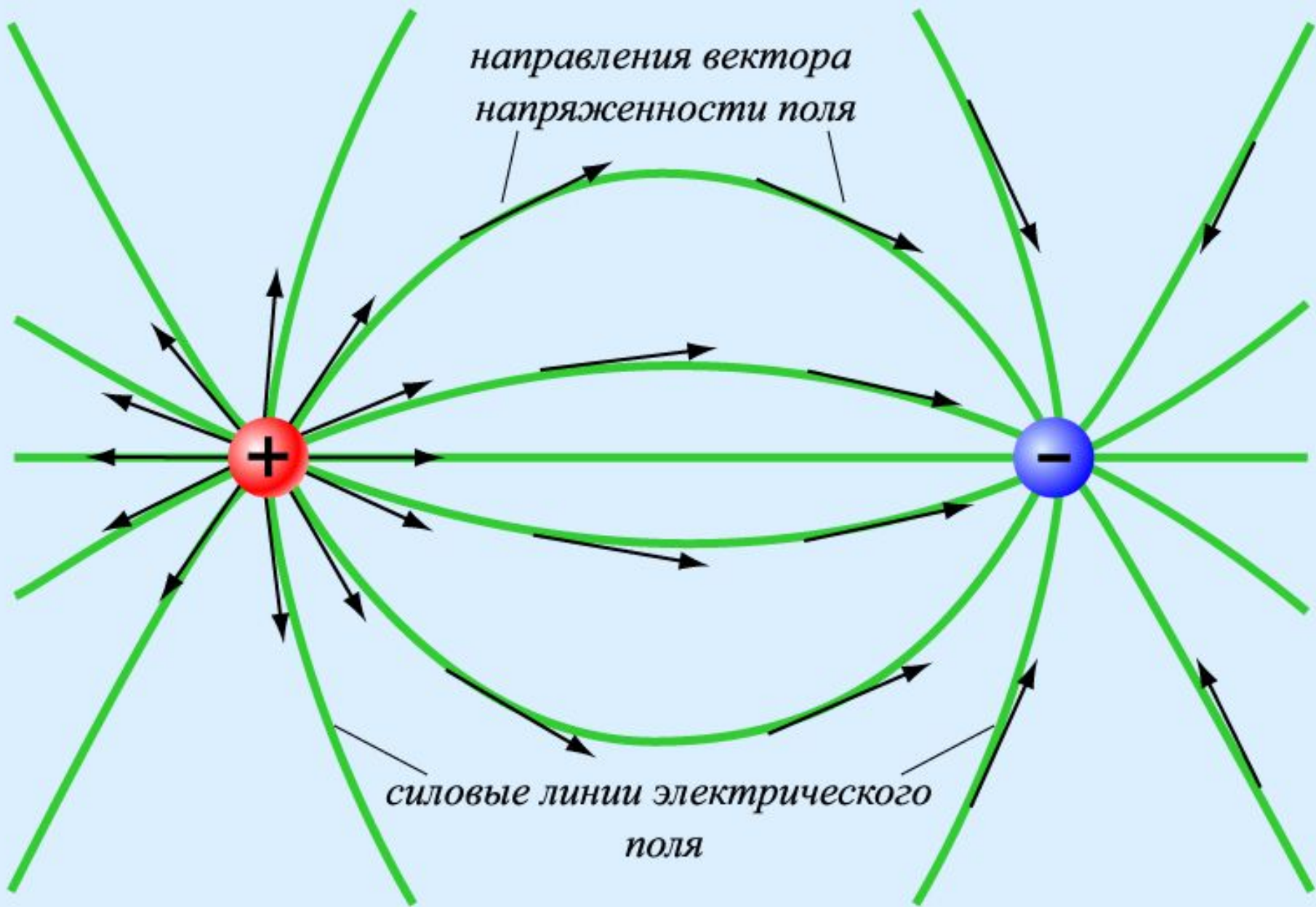
Линия напряженности - линия, в каждой точке которой вектор напряженности направлен по касательной к этой линии



ЛИНИИ НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ







*направления вектора
напряженности поля*

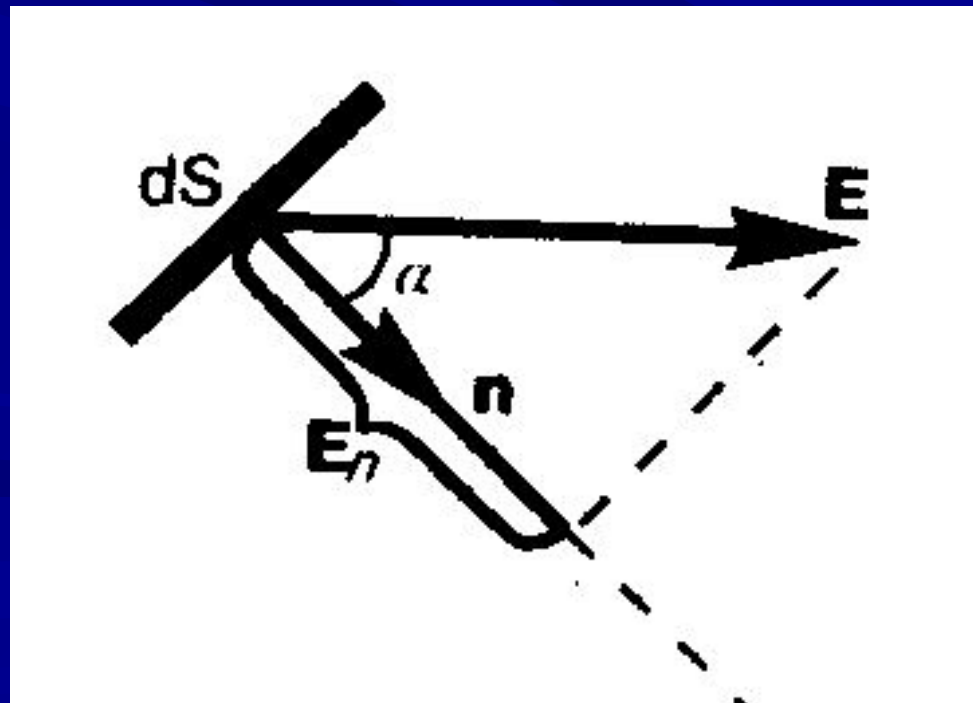
*силовые линии электрического
поля*

Поток вектора напряженности электрического поля.

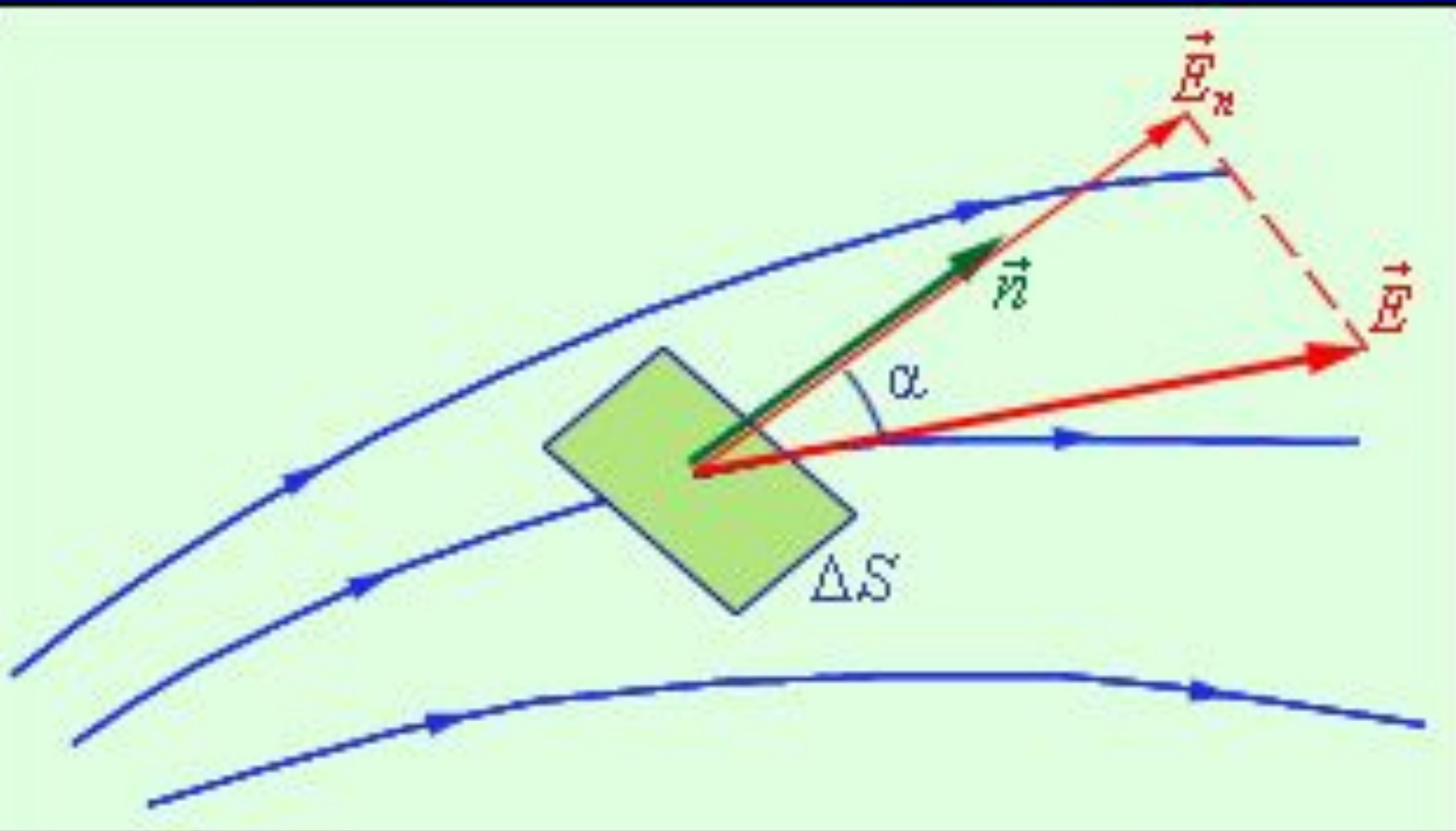
Поток вектора \vec{E} электрического
поля
 Φ_E через поверхность S измеряется
числом силовых линий
пронизывающих данную поверхность.

Поток вектора напряжённости электростатического поля

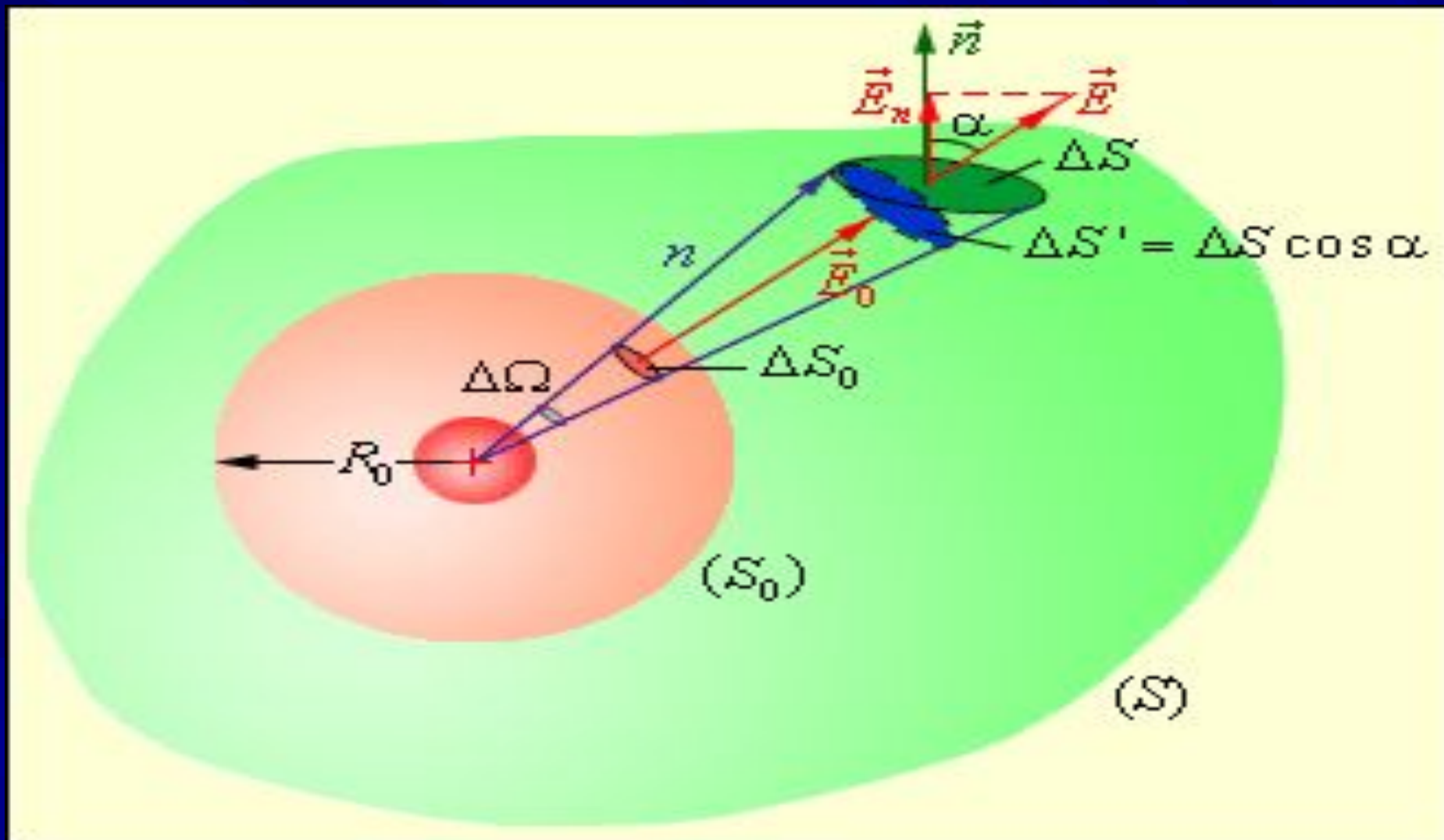
$$\Phi_E = \oint_S E_n \cdot dS = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

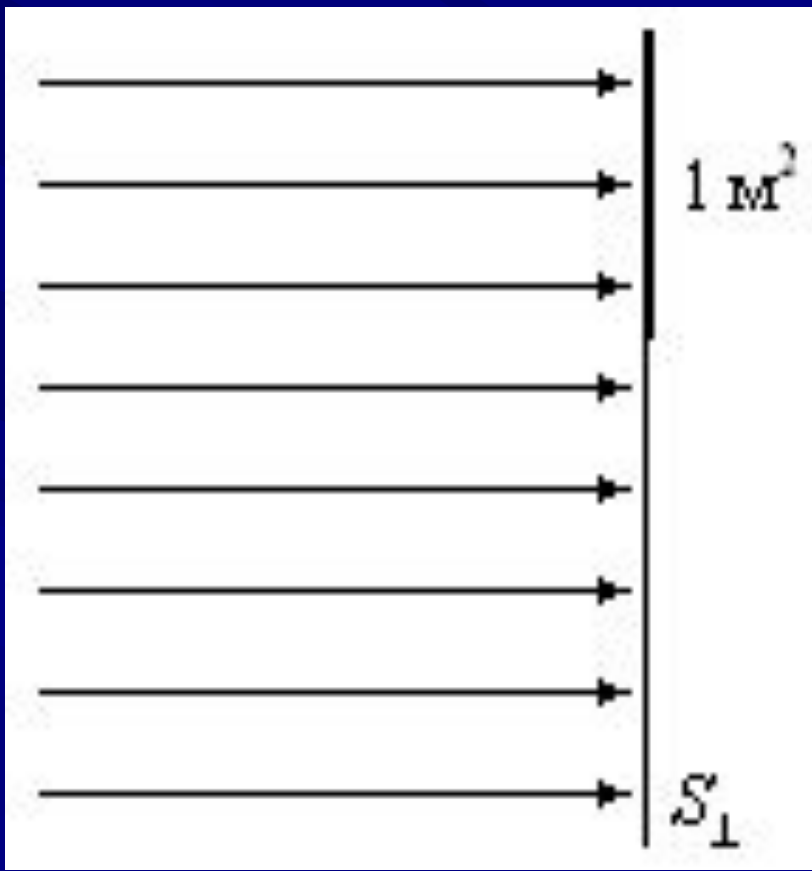


Элементарный поток



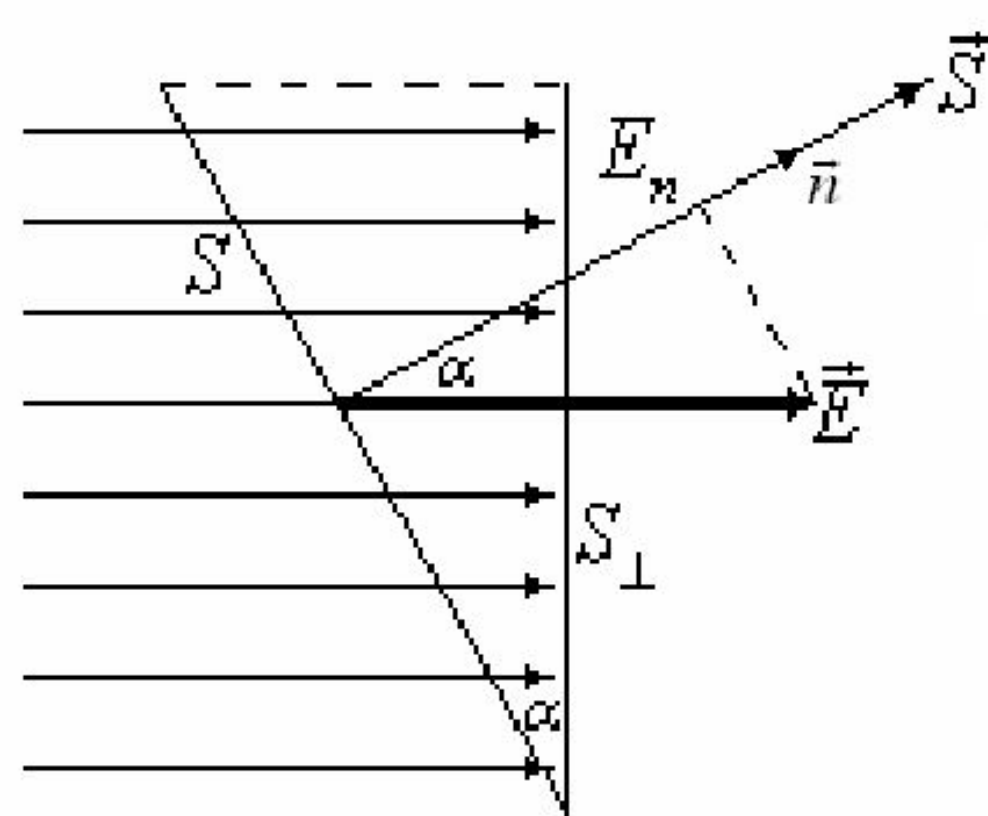
Поток вектора напряженности через произвольную поверхность, окружающую заряд





В случае однородного поля, *перпендикулярного к плоской поверхности* число линий, пронизывающих 1 м^2 равно E , а через всю поверхность S_{\perp} поток вектора напряженности будет равен

$$\Phi_E = ES_{\perp}$$



$$S_{\perp} = S \cos \alpha,$$

$$\Phi_E = ES \cos \alpha.$$

$E \cos \alpha = E_n$ есть проекция вектора E на направление нормали к поверхности S . В этом случае

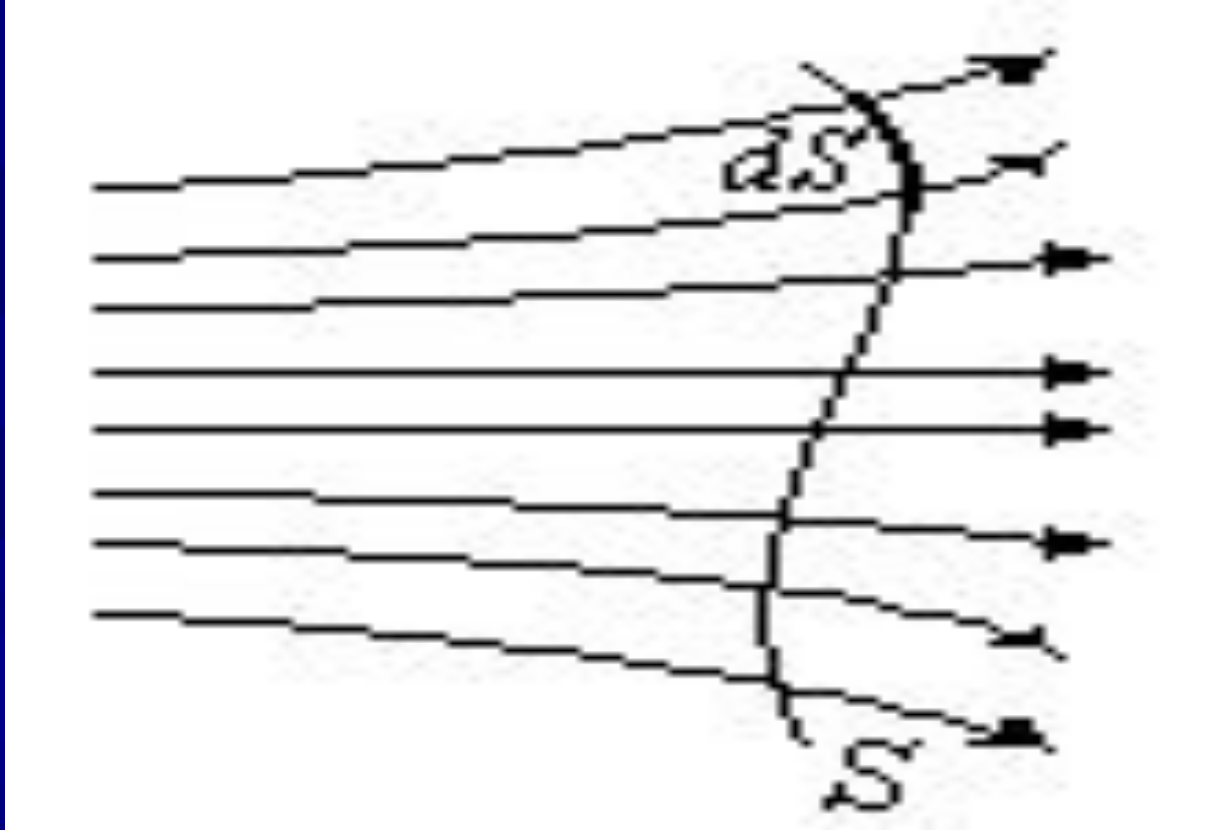
$$\Phi_E = E_n \cdot S$$

Введем понятие вектора площади \vec{S} ,
сонаправленного с единичным вектором \vec{n}
нормали к поверхности S , а по модулю
равного площади этой поверхности $\vec{S} = S\vec{n}$.
Тогда поток через поверхность будет равен

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

Произвольная поверхность

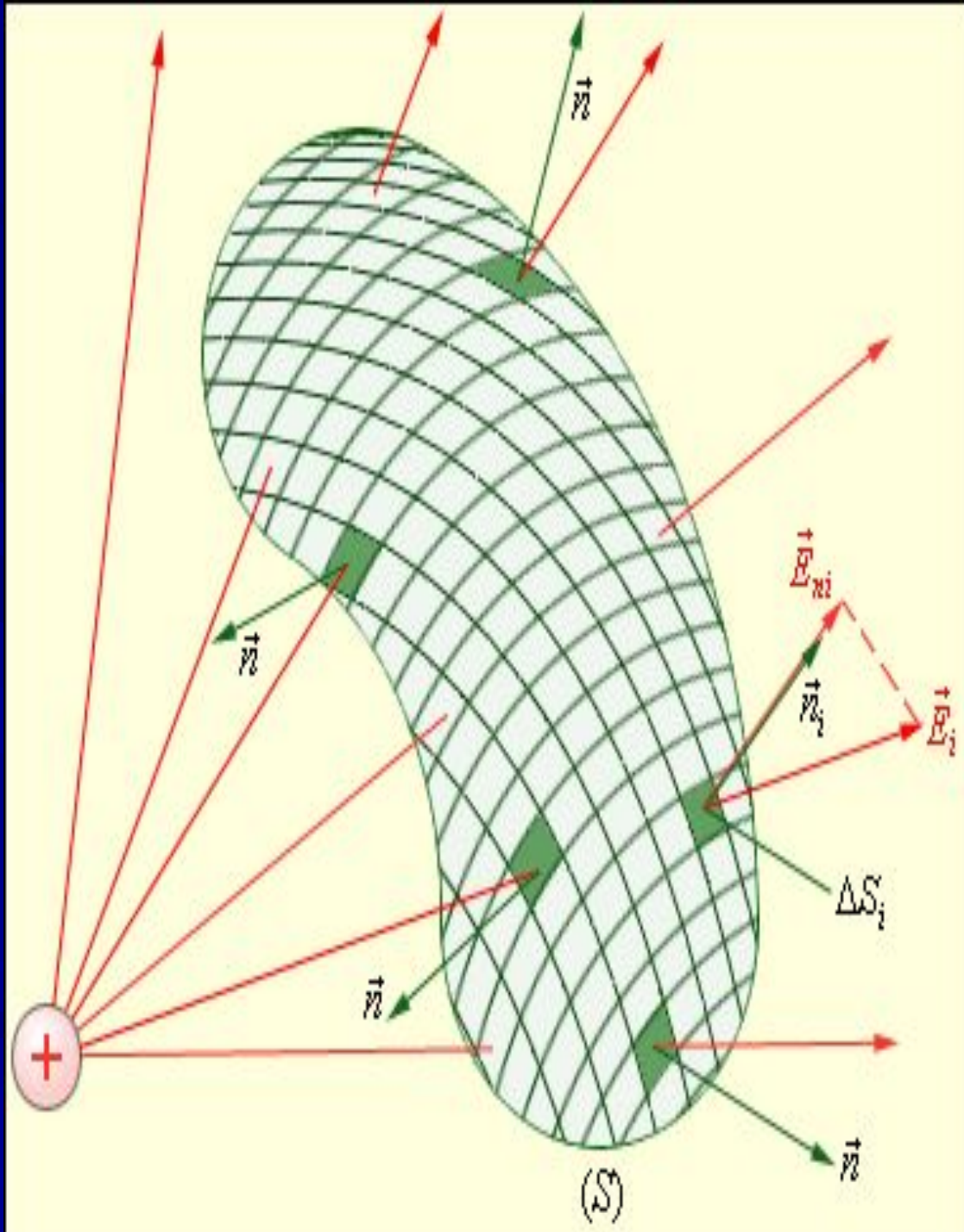
неоднородного поля

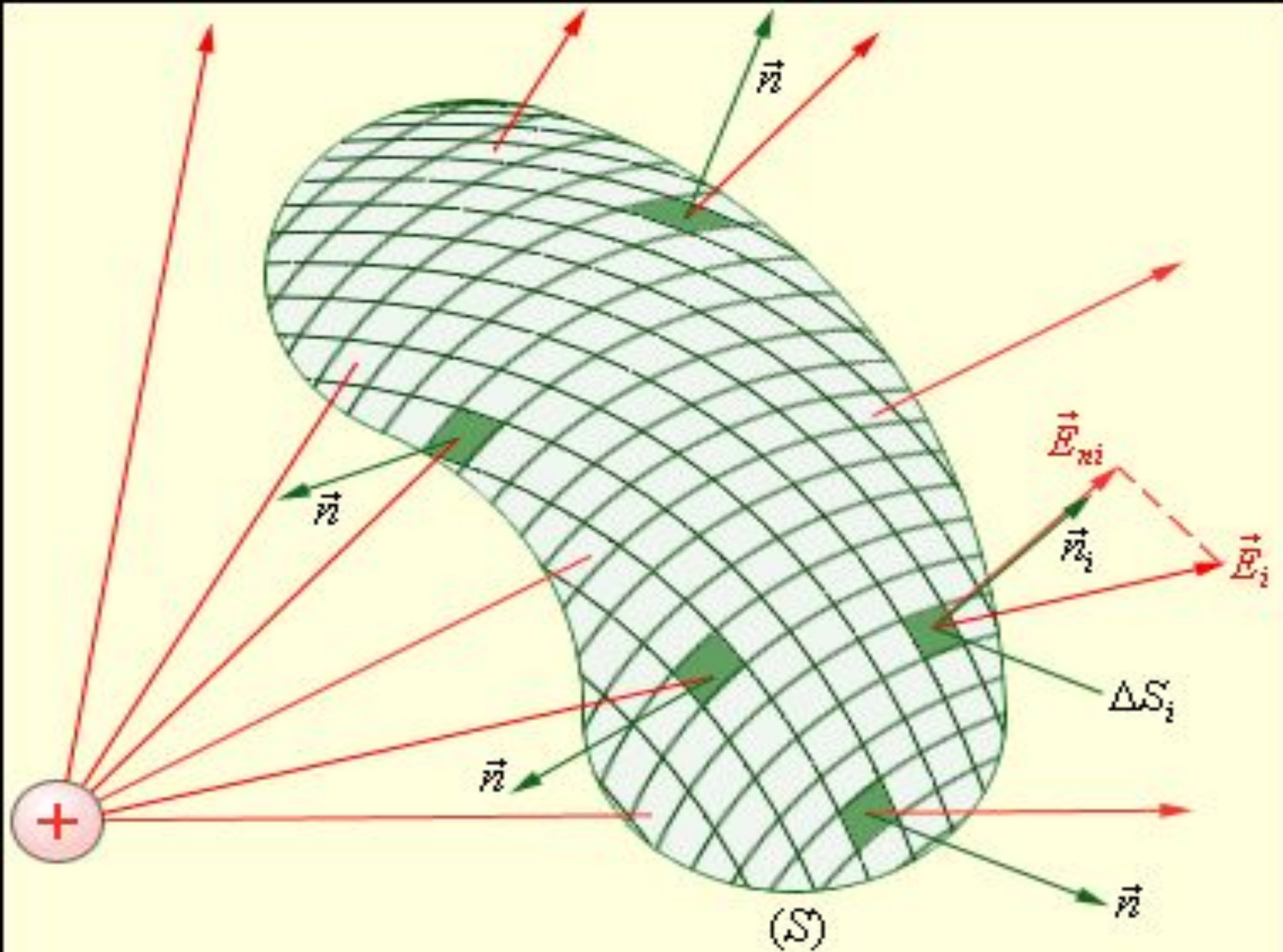


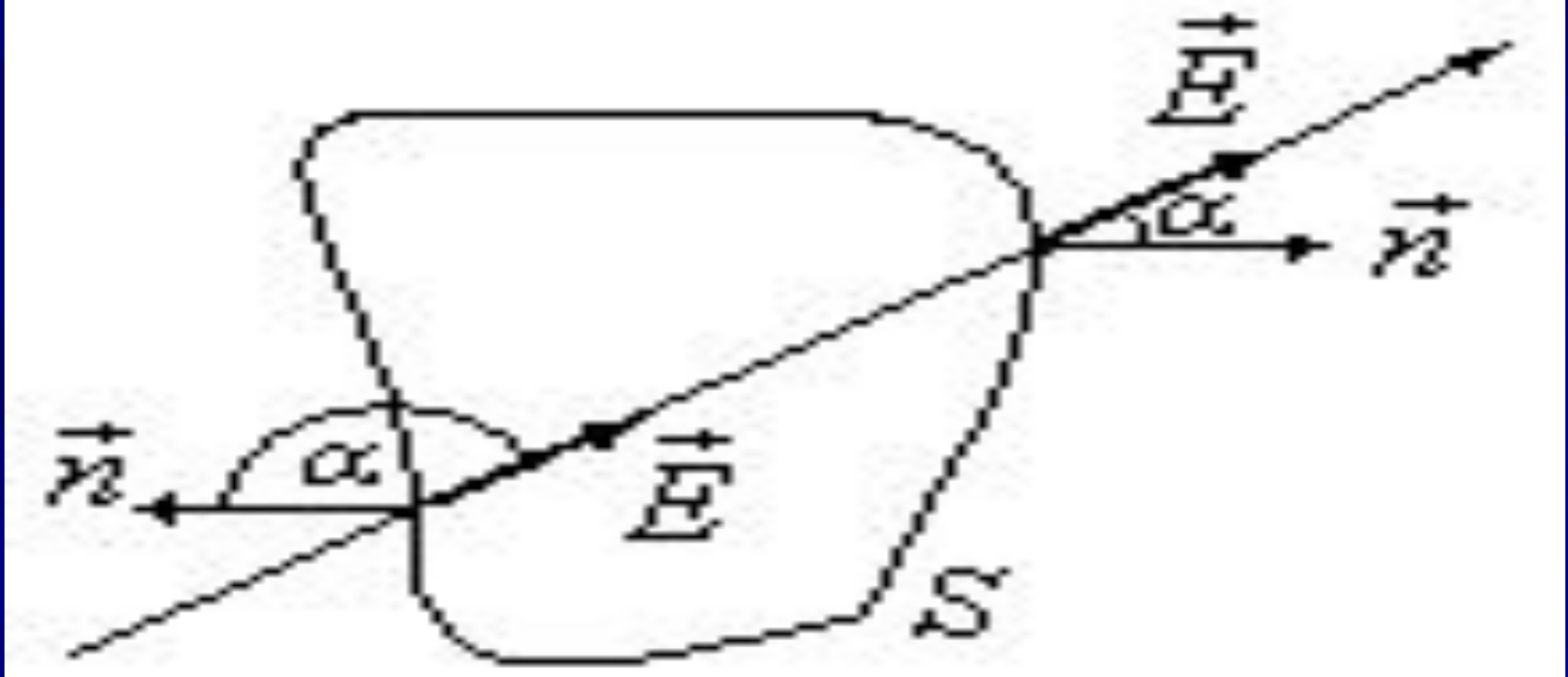
$$\Phi_E = \int_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{(S)} E_n \cdot dS$$

$$[\Phi_E] = 1 \frac{B}{\mathcal{M}} \cdot \mathcal{M}^2 = 1B \cdot \mathcal{M}$$

- Вычисление потока через произвольную замкнутую поверхность





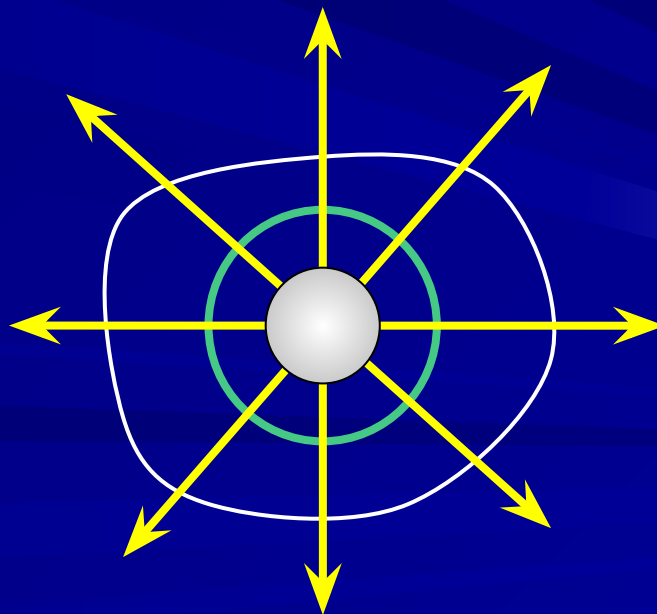


У замкнутых поверхностей **внешняя** нормаль - **положительная**

Входящие во внутрь силовые линии создают **отрицательный** поток, а **выходящие** из поверхности **положительный** поток.

Поток вектора напряженности сквозь сферическую поверхность радиуса R

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R^2} \cdot 4\pi \cdot R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

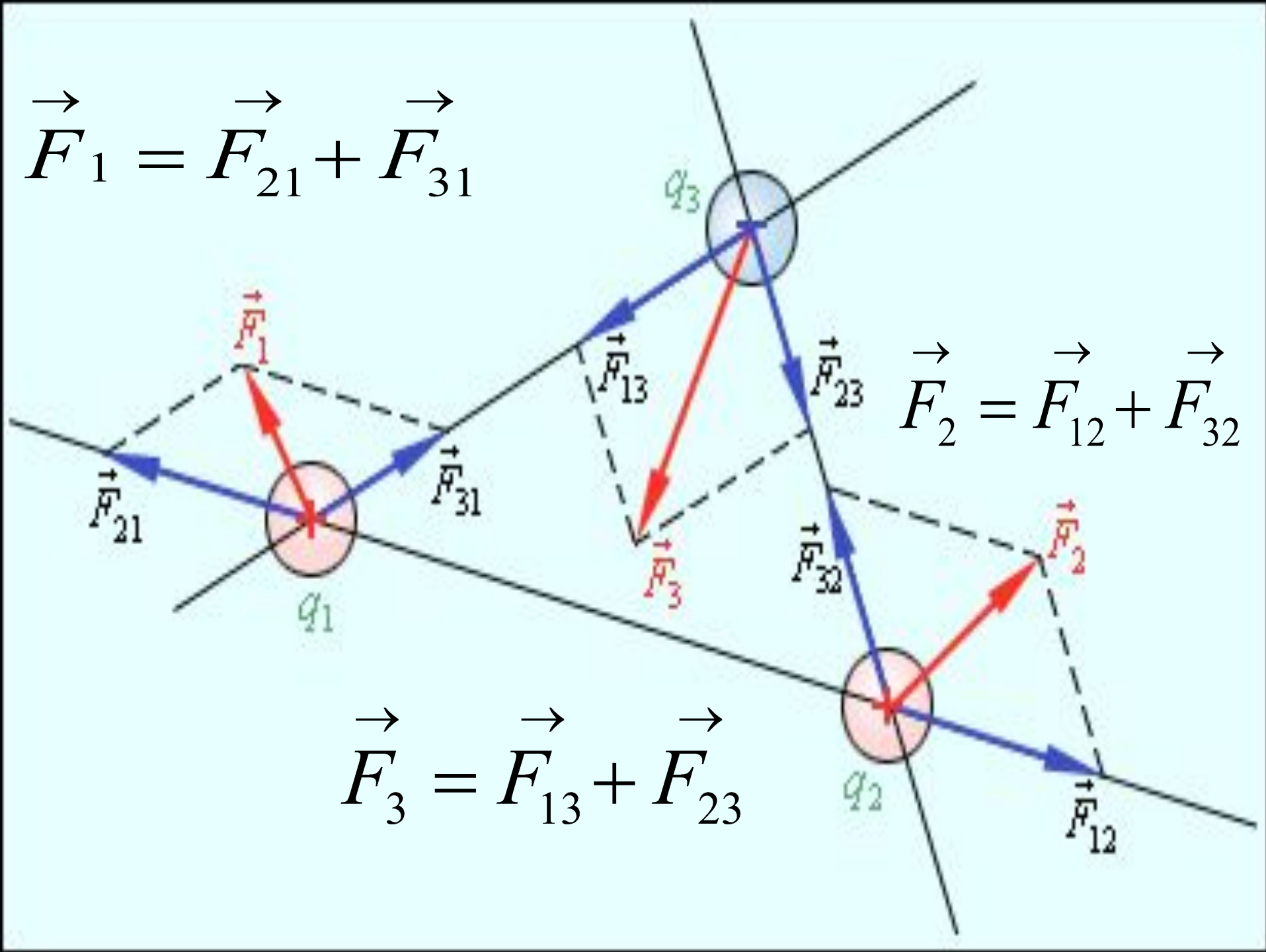


Принцип суперпозиции электростатических сил

- Результирующая сила, действующая на пробный заряд в любой точке поля равна **геометрической сумме сил, приложенных к этому заряду со стороны неподвижных точечных зарядов**

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}$$



$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32}$$

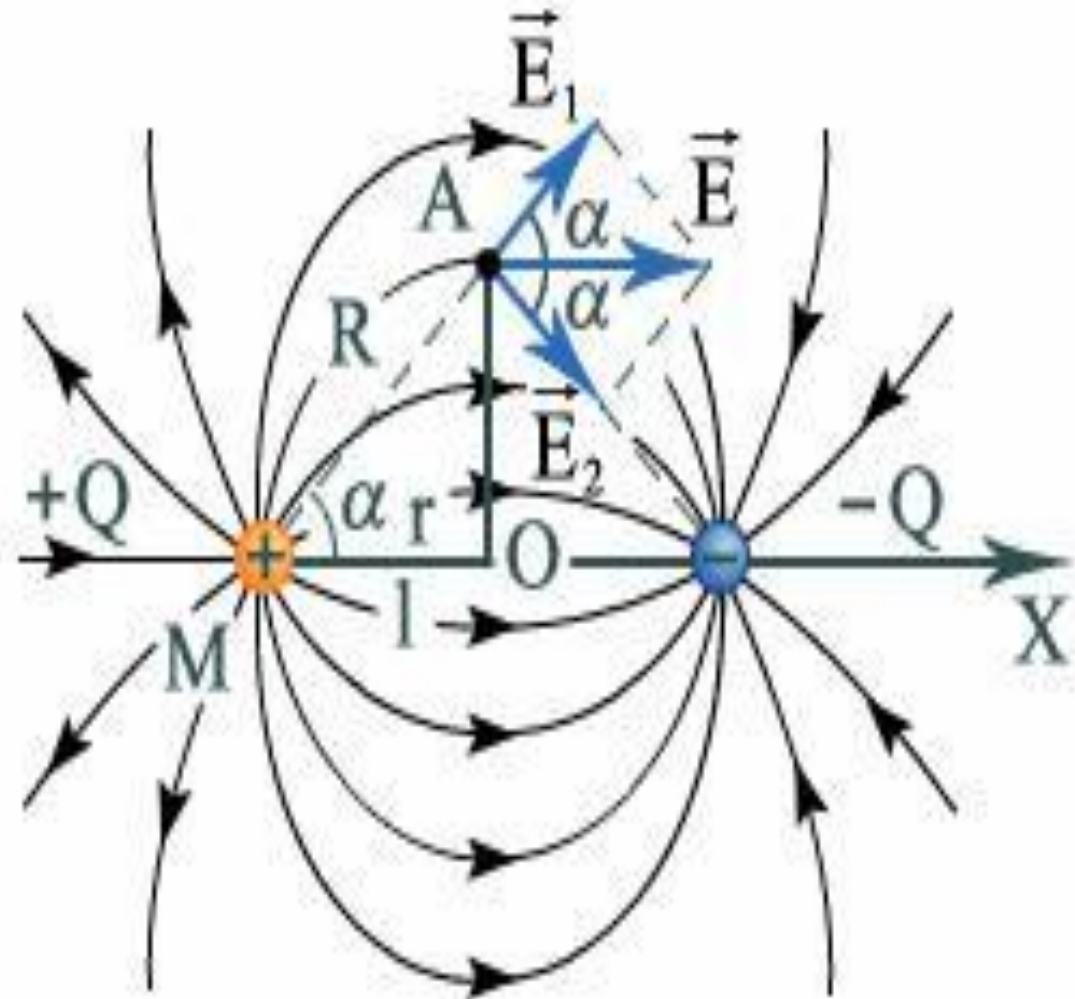
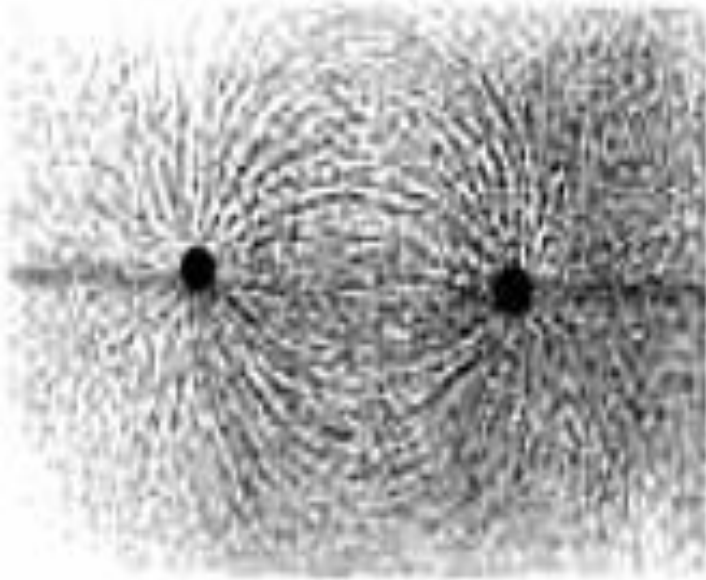
$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$$

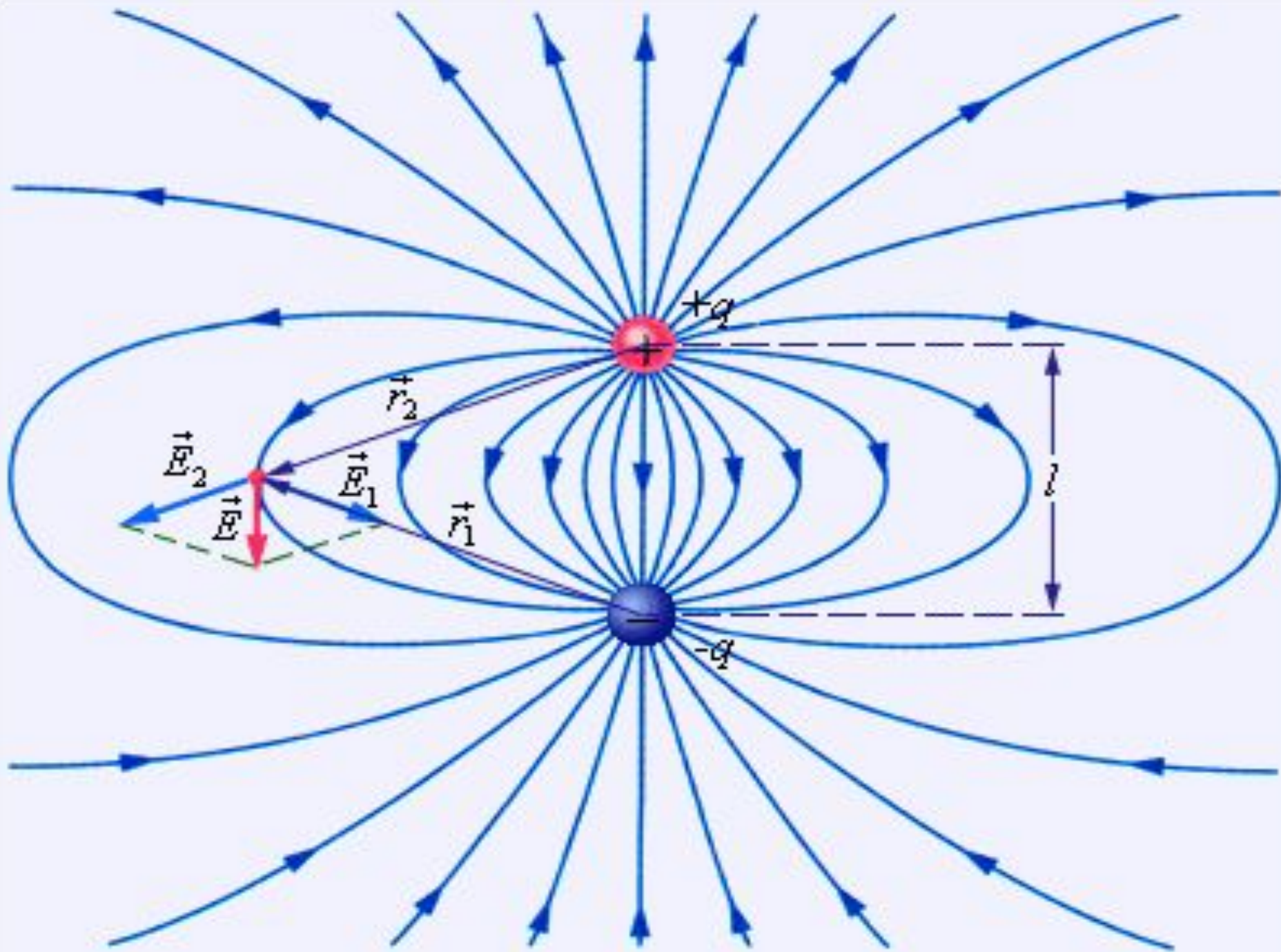
Принцип суперпозиции полей

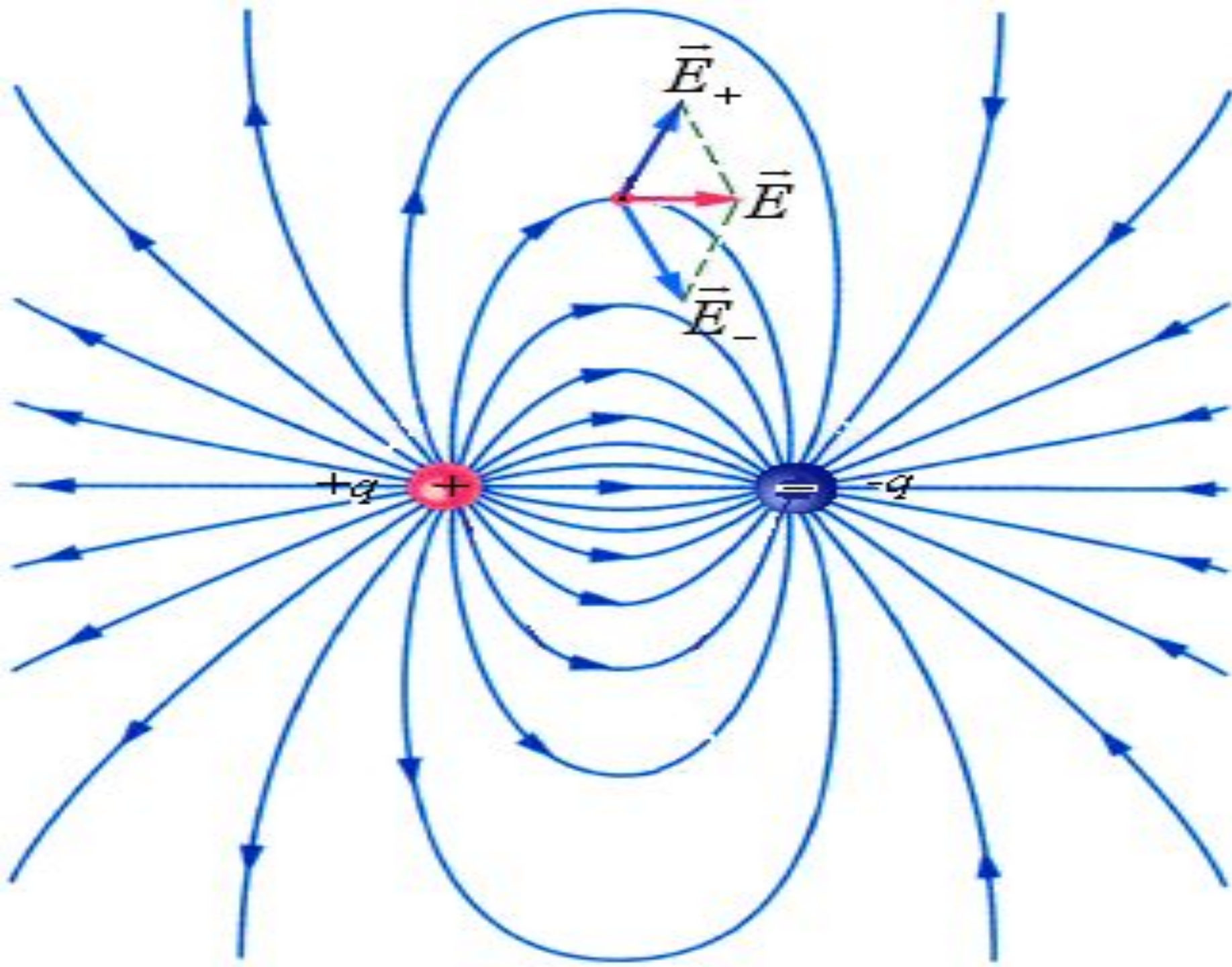
- напряженность результирующего поля, создаваемого системой зарядов, равна *геометрической сумме* напряженностей полей, создаваемых в данной точке каждым из зарядов в отдельности

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

Напряженность электростатического поля







Электрический диполь

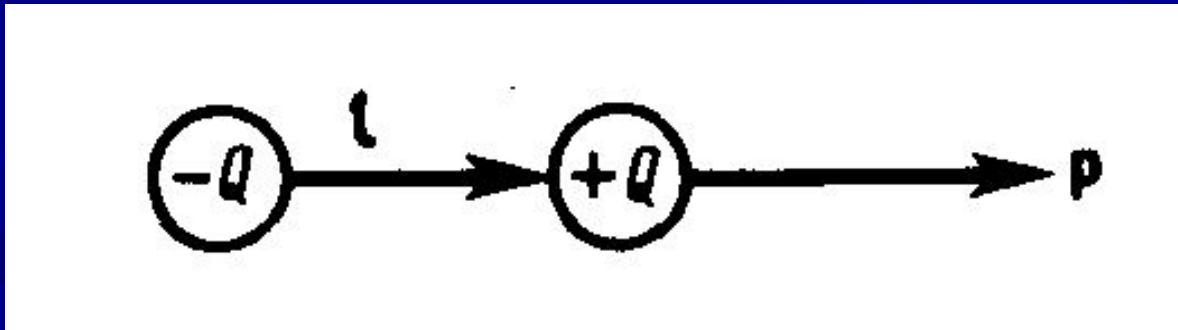
- система двух равных по модулю разноименных точечных зарядов, расстояние l между которыми значительно меньше расстояния до рассматриваемых точек поля.

Электрический диполь

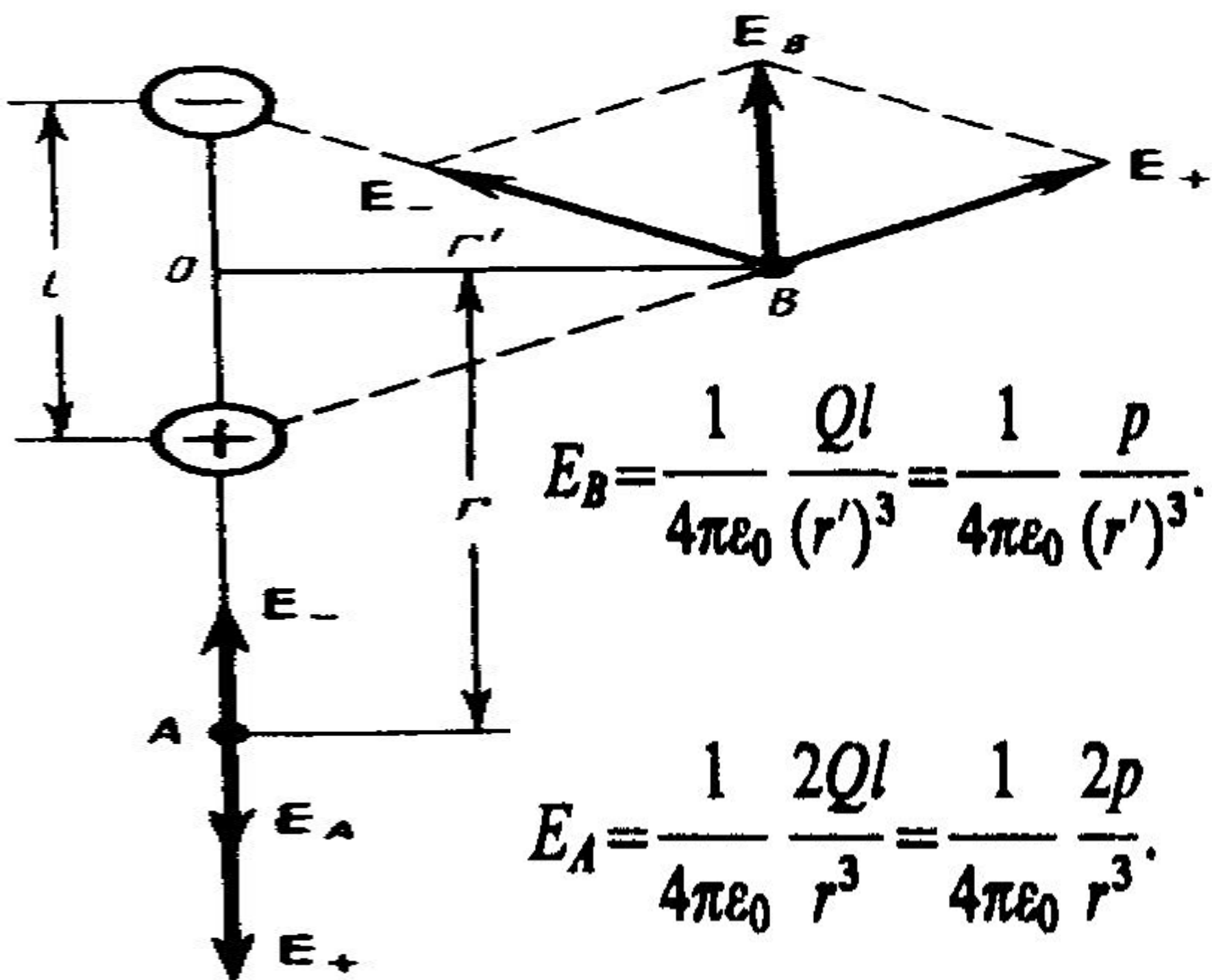
- Вектор, направленный по оси диполя (*прямой, проходящей через оба заряда*) от отрицательного заряда к положительному и равный расстоянию между ними, называется **плечом диполя l** .

Электрический диполь

- Вектор совпадающий по направлению с плечом диполя и равный произведению заряда на плечо l , называется **электрическим моментом диполя** или **дипольным моментом**



$$p = |q| \cdot l$$



$$E_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ql}{(r')^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{(r')^3}$$

$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ql}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}$$

Непрерывное распределение системы зарядов в пространстве

- Напряженность поля этой системы в вакууме, согласно принципу суперпозиции полей

$$\vec{E} = k \int_{(Q)} \frac{dQ \vec{r}}{r^3}$$

- Электростатическое поле точечного заряда – центральное и поэтому **потенциальное**.

- На точечный заряд в этом поле действует сила, **работа** этой силы на любой замкнутой траектории равна нулю

$$\oint_{(L)} qE, dr = 0$$

$$\oint_{(L)} E, dr = 0.$$

Циркуляция вектора напряженности вдоль замкнутого контура

- Циркуляция вектора напряженности электрического поля точечного заряда вдоль произвольного замкнутого контура, проведенного в поле **равна нулю**.

$$\oint_{(L)} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Напряженность электрического поля

**произвольной системы
точечных зарядов**

$$\oint_{(L)} \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = \oint_{(L)} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \, d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n \oint_{(L)} \mathbf{E}_i \, d\mathbf{r}.$$

$$\oint_{(L)} \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = 0.$$

- Это соотношение подтверждает то, что **любое электростатическое поле потенциально**

Циркуляция вектора напряжённости

- Интеграл $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_L E_{\parallel} dl$ называется

циркуляцией вектора напряжённости.

- Теорема о циркуляции вектора \vec{E}

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_L E_{\parallel} \cdot dl = 0$$

- Силовое поле, обладающее таким свойством, называется **потенциальным**.

Работа перемещения заряда в поле

- Работа при перемещении заряда q_0 из точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dA = \frac{q \cdot q_0}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \left(\frac{q \cdot q_0}{r_1} - \frac{q \cdot q_0}{r_2} \right)$$

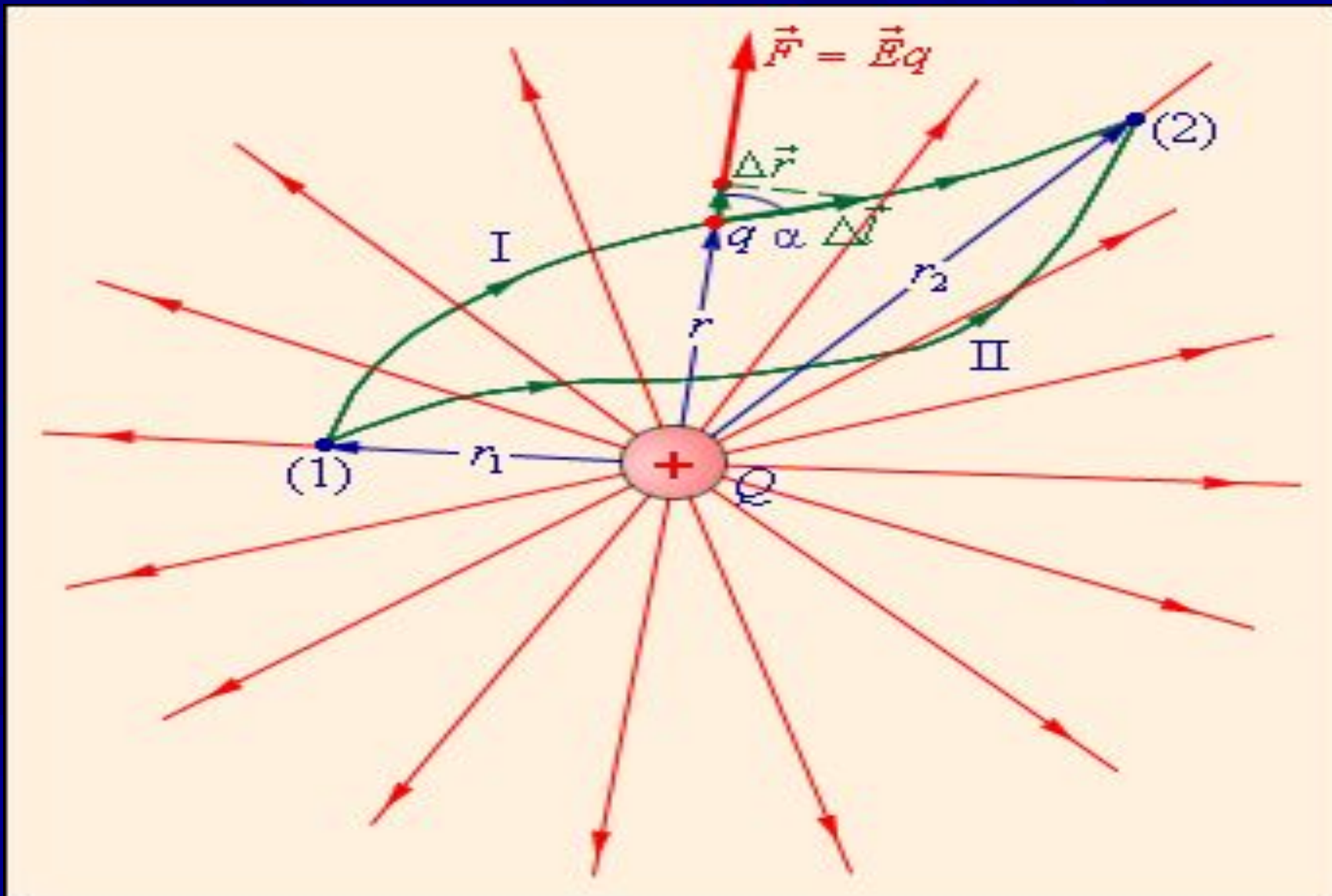
- A_{12} не зависит от траектории перемещения, а определяется только положениями начальной 1 и конечной 2 точек.
- Электростатическое поле точечного заряда является **потенциальным**, а электростатические силы – **консервативными**.

Работа перемещения заряда в поле

- Работа перемещения заряда во внешнем электростатическом поле по любому замкнутому контуру будет равна:

$$\oint_L dA = 0$$

Работа кулоновских сил зависит только от начальной и конечной точки



- **Работа**, совершаемая силами электростатического поля при малом перемещении точечного заряда в этом поле, **равна убыли потенциальной энергии** заряда в рассматриваемом поле

$$\delta A = q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{r} = -dW_n$$

- Для поля системы из n точечных зарядов

$$dW_n = -q \sum_{i=1}^n E_i \cdot dr = -q \sum_{i=1}^n E_i \cdot dr_i$$

$$W_n = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} + C$$

- При непрерывном распределении зарядов в пространстве, потенциальная энергия заряда в поле равна

$$W_n = q \int_{(Q)} \frac{dQ}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r} + C$$

Потенциал электростатического поля

- **Потенциалом** электростатического поля называется физическая величина, равная отношению потенциальной энергии пробного точечного электрического заряда, помещенного в рассматриваемую точку поля, к этому заряду

$$\varphi = \frac{W_n}{q}$$

$$\varphi = K \frac{q}{r}$$

Принцип суперпозиции электростатических полей

- Если поле создаётся несколькими зарядами, то потенциал поля системы зарядов равен алгебраической сумме потенциалов полей всех этих зарядов

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i$$

- При наложении электростатических полей их потенциалы складываются алгебраически

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i$$

Работа перемещения заряда в поле

- Работа сил электростатического поля при перемещении точечного заряда из точки **1** в точку **2**

$$A_{12} = q_0 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$$

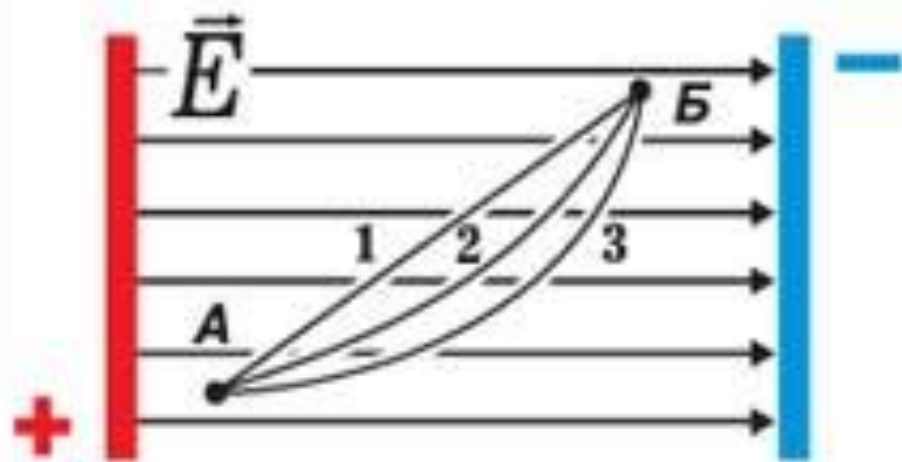
- т.е., равна произведению перемещаемого заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках.

Разность потенциалов

- Разность потенциалов двух точек **1** и **2** в электростатическом поле определяется работой, совершаемой силами поля, при перемещении единичного положительного заряда из точки **1** в точку **2**.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q_0}$$

ПОТЕНЦИАЛЬНОСТЬ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ



$$A_1 = A_2 = A_3$$

Потенциал

$$\varphi = \frac{W_n}{q}$$

Напряжение

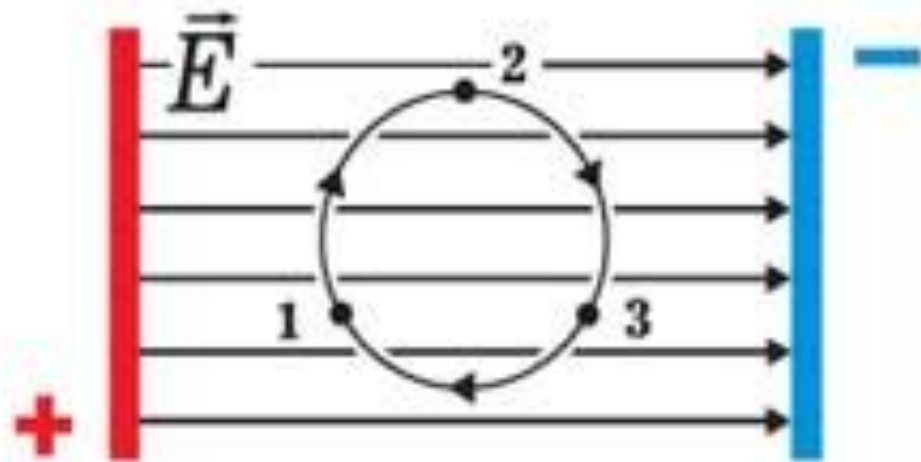
$$U = \varphi_1 - \varphi_2$$

Потенциал поля

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Работа поля по перемещению

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$



$$A_{1231} = 0$$

Разность потенциалов

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A}{q}$$

$$A = qU$$

Потенциал

- Потенциал – физическая величина, определяемая работой по перемещению единичного положительного заряда при удалении его из данной точки в бесконечность

$$\varphi = \frac{A_{\infty}}{q_0}$$

- Напряжённость как градиент потенциала

$$\vec{E} = -grad\varphi$$

Связь между потенциальной силой и потенциальной энергией

$$\vec{F} = -\text{grad} \cdot W_n$$

- Связь между напряженностью электростатического поля и потенциалом

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi = -\left(\mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right).$$

Эквипотенциальные поверхности

- Геометрическое место точек электростатического поля, в которых значения потенциала одинаковы

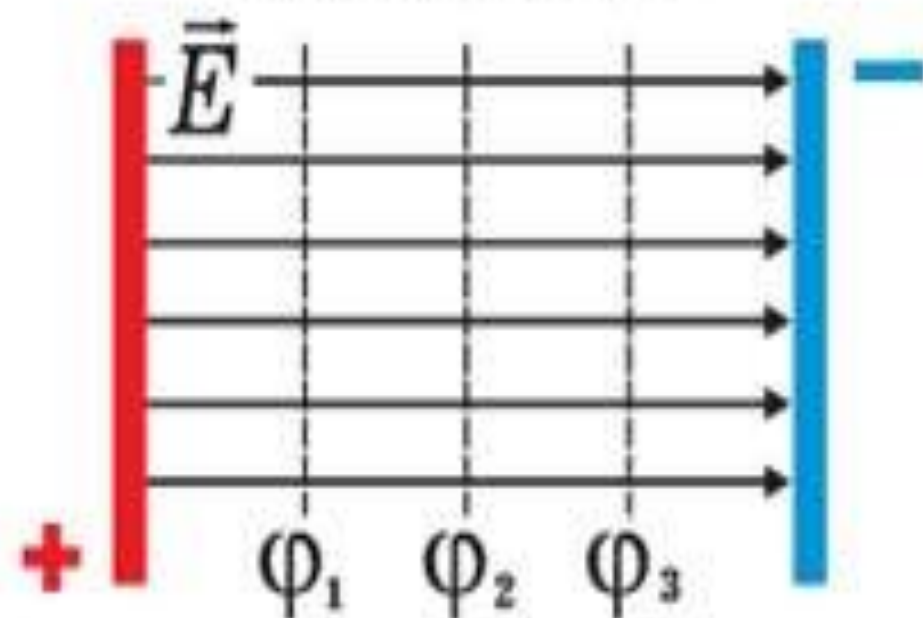
Эквипотенциальная поверхность это поверхность, в каждой точке которой потенциал имеет одно и то же значение.

Для всех точек поверхности выполняется условие

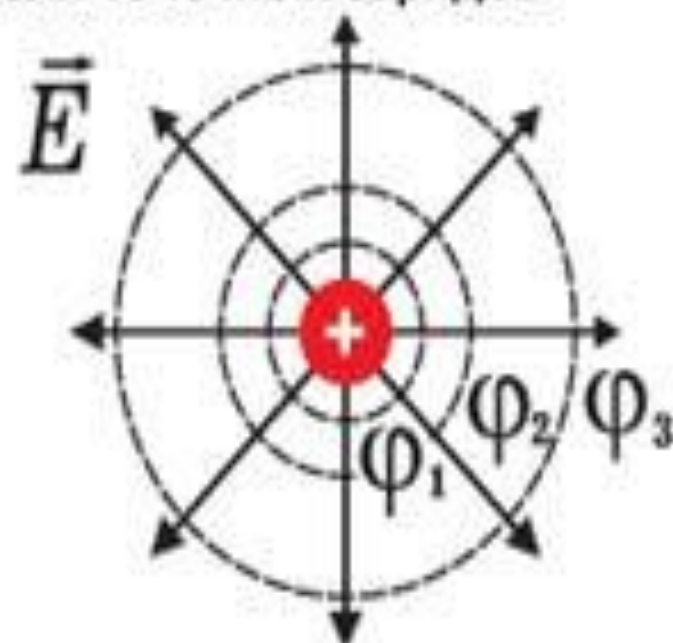
$$\varphi(x, y, z) = \text{const}$$

ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

однородного поля



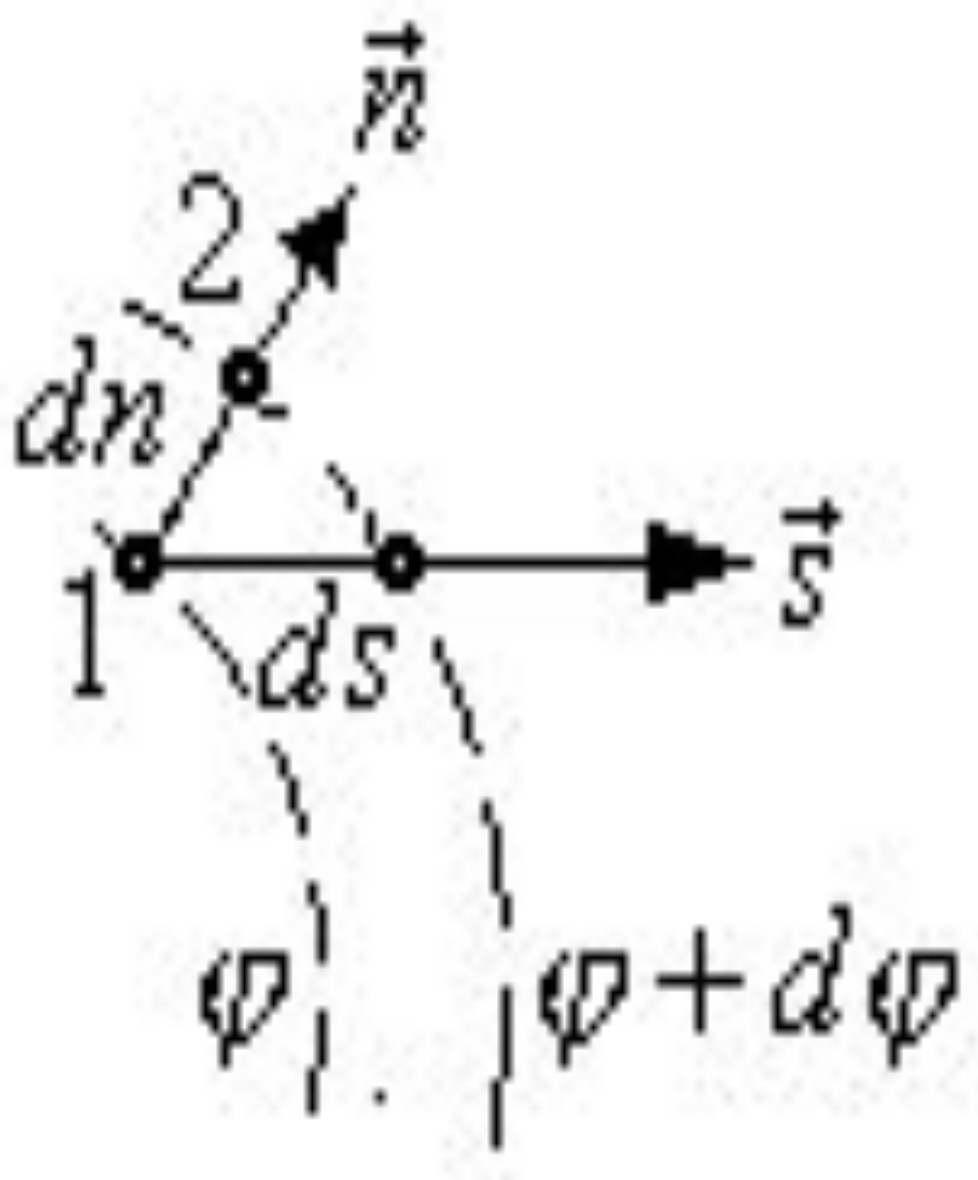
поля точечных зарядов



Связь напряженности с разностью потенциалов

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}$$

$$E = \frac{U}{d}$$



$$\frac{d\varphi}{dn} > \frac{d\varphi}{ds}$$

Т.К.

$$dn < ds$$

$$\text{grad } \varphi = \frac{d\varphi}{dn} \vec{n}$$

Единица измерения градиента — V/m .

Теорема Гаусса для поля в вакууме

Поток вектора напряжённости электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключённых внутри этой поверхности зарядов, делённых на ϵ_0

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E_n \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$$

Теорема Гаусса для поля в вакууме

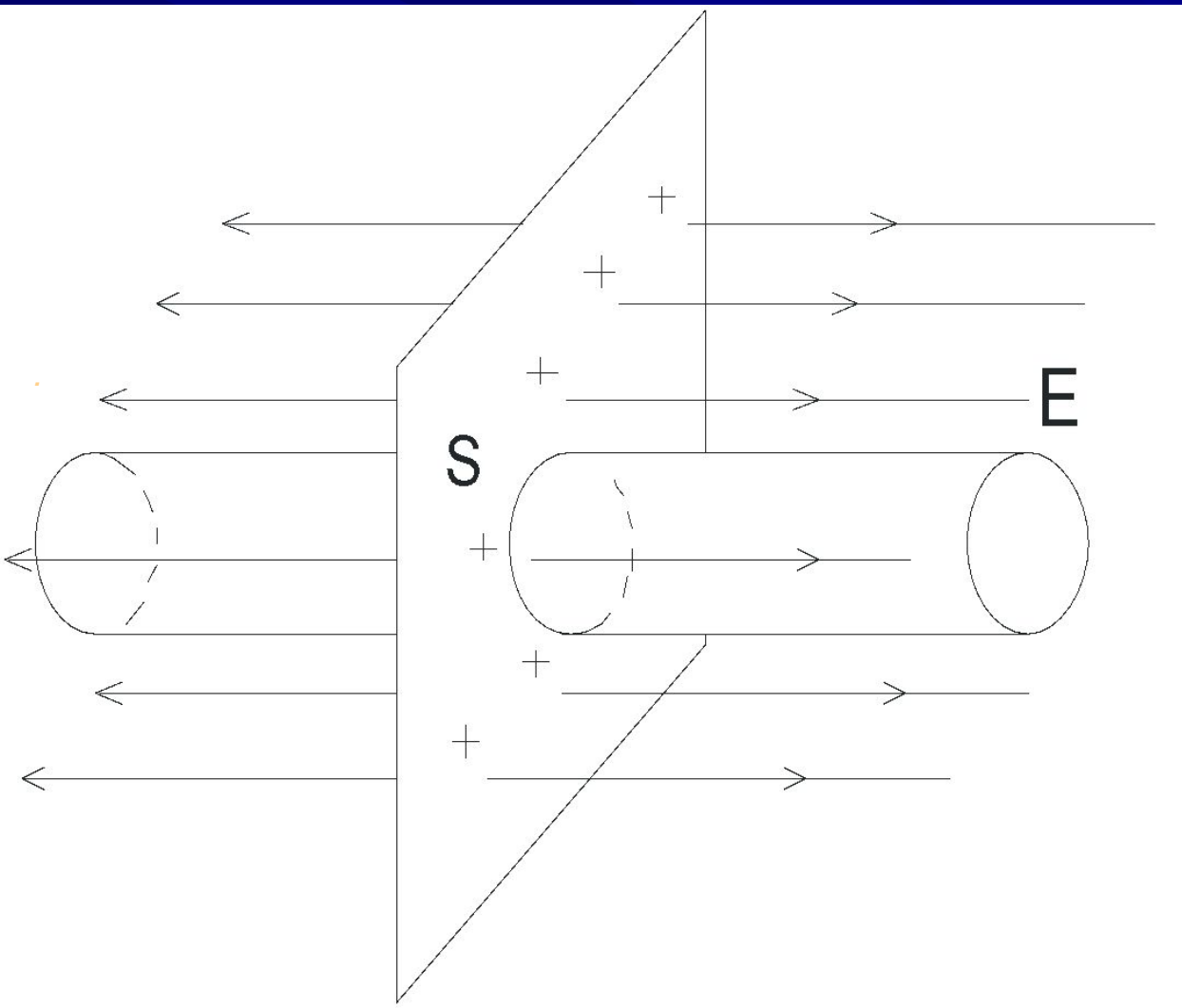
- Если заряд распределён в пространстве с объёмной плотностью

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

- теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме будет иметь вид

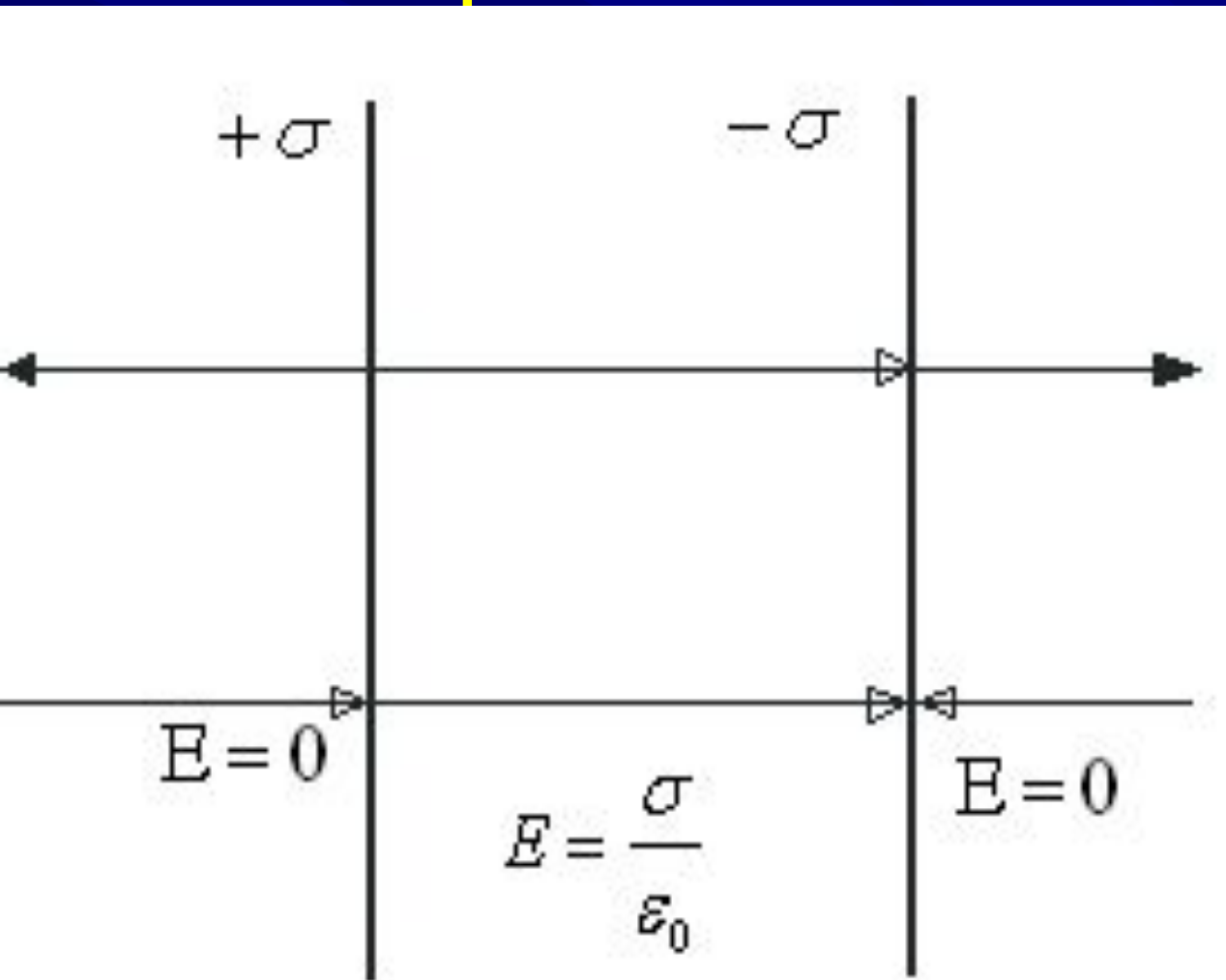
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E_n \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \cdot dV$$

Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости.



$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

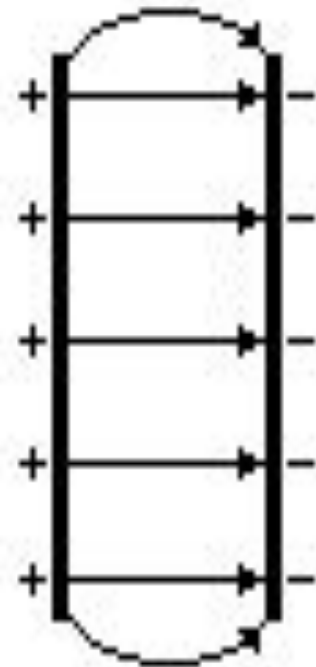
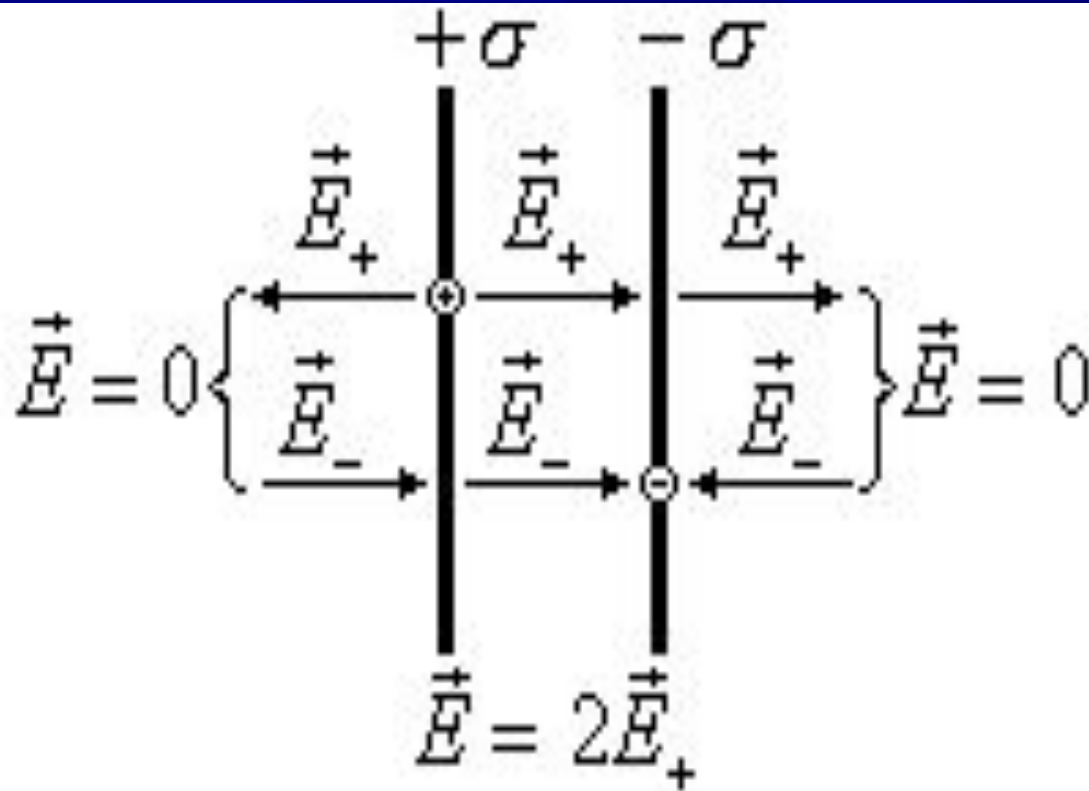
Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей

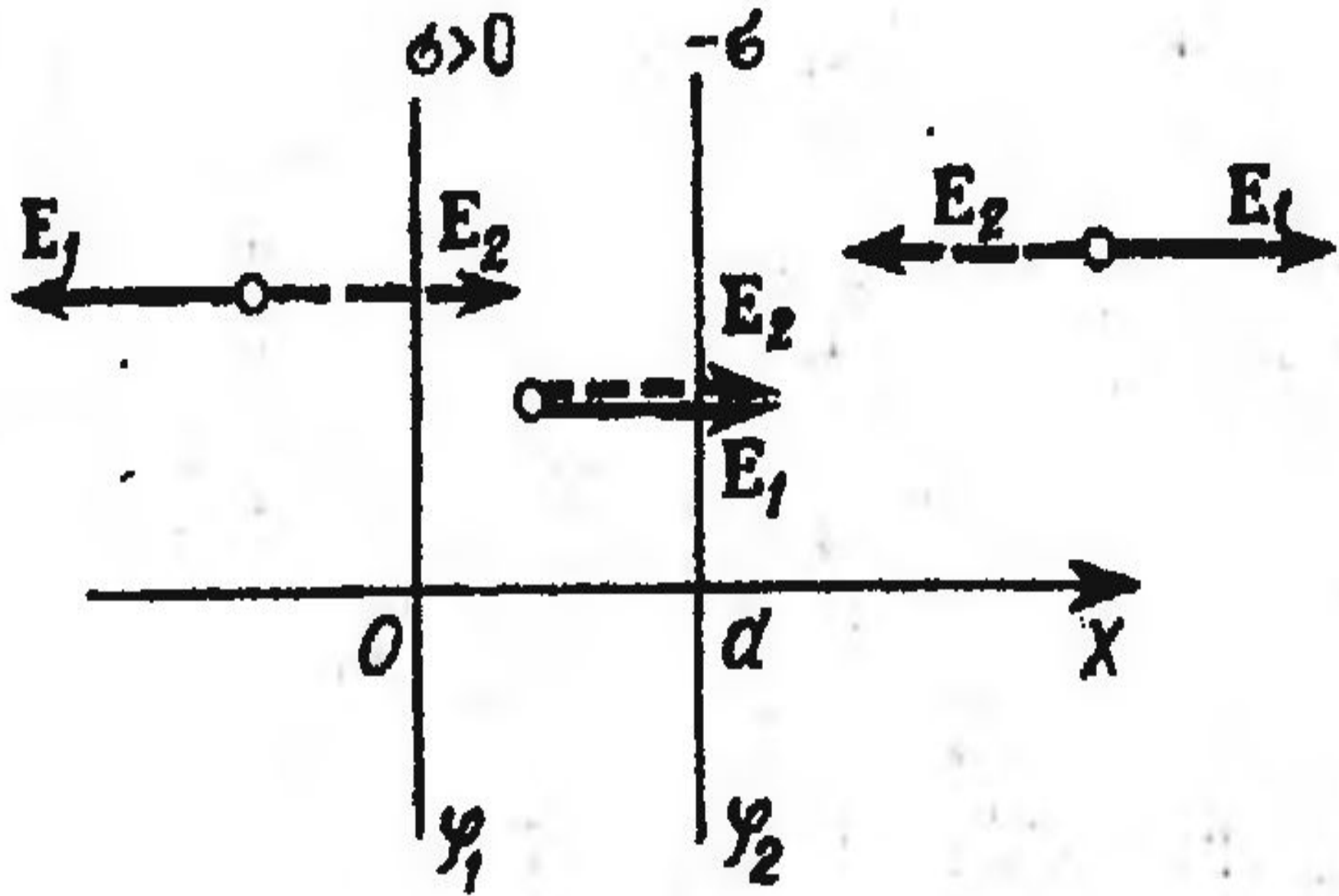


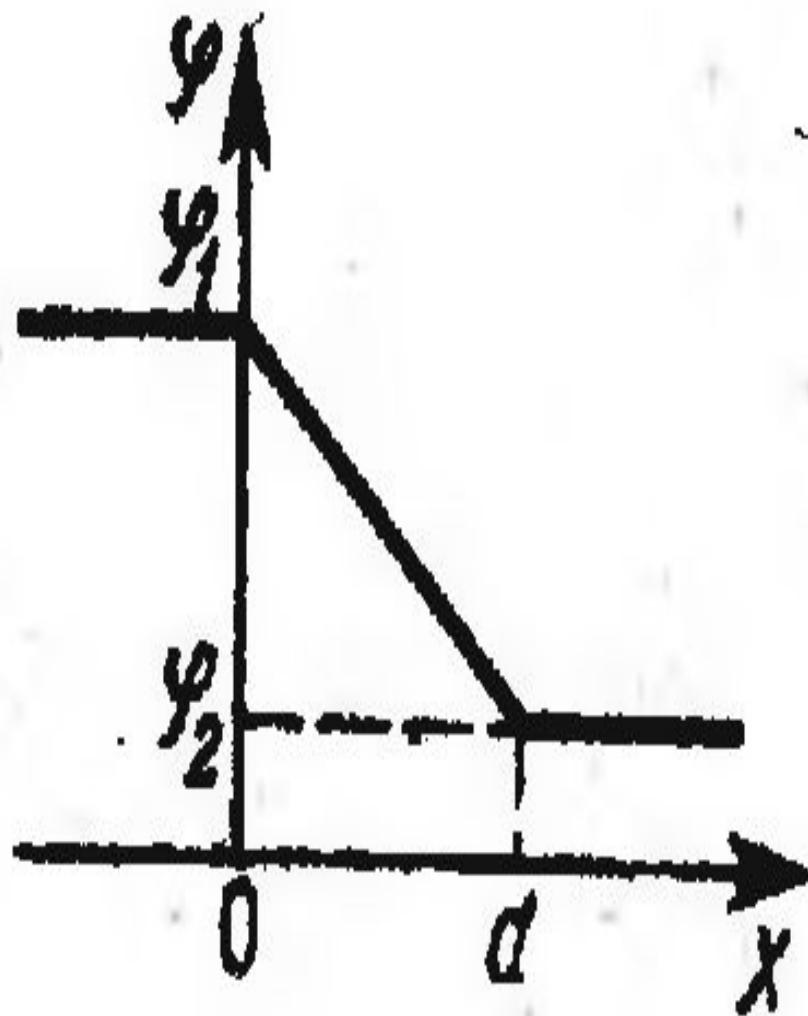
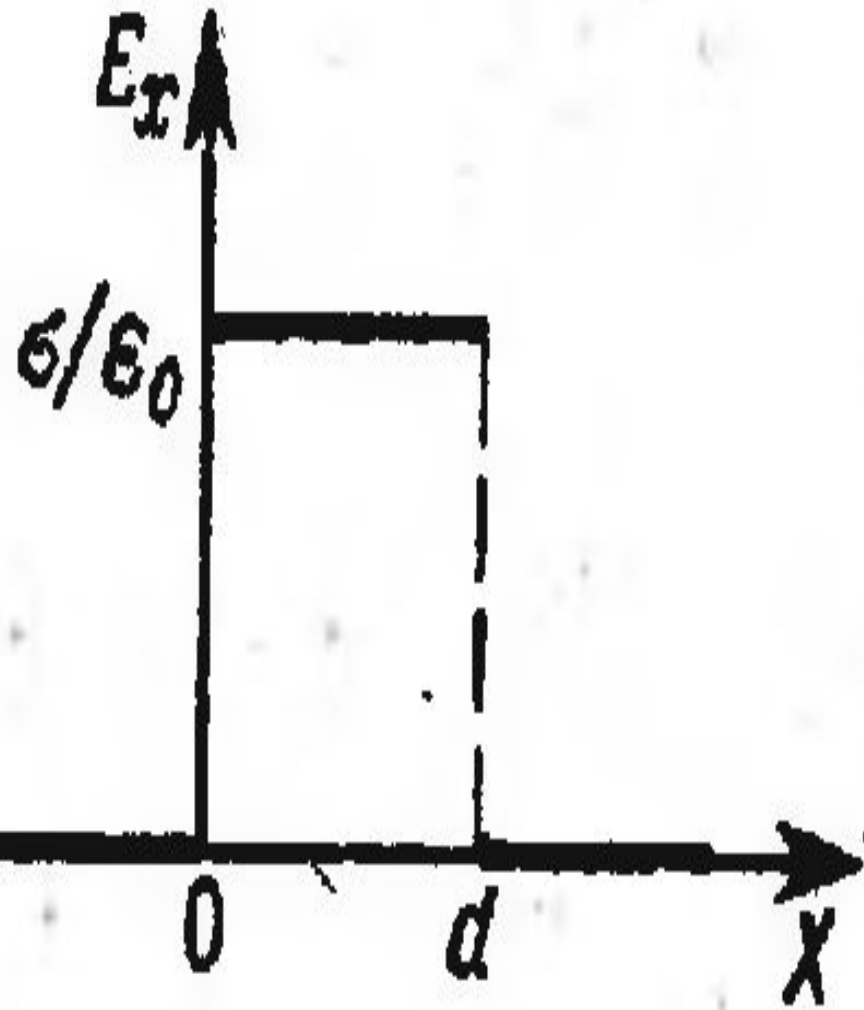
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Поле двух плоскостей

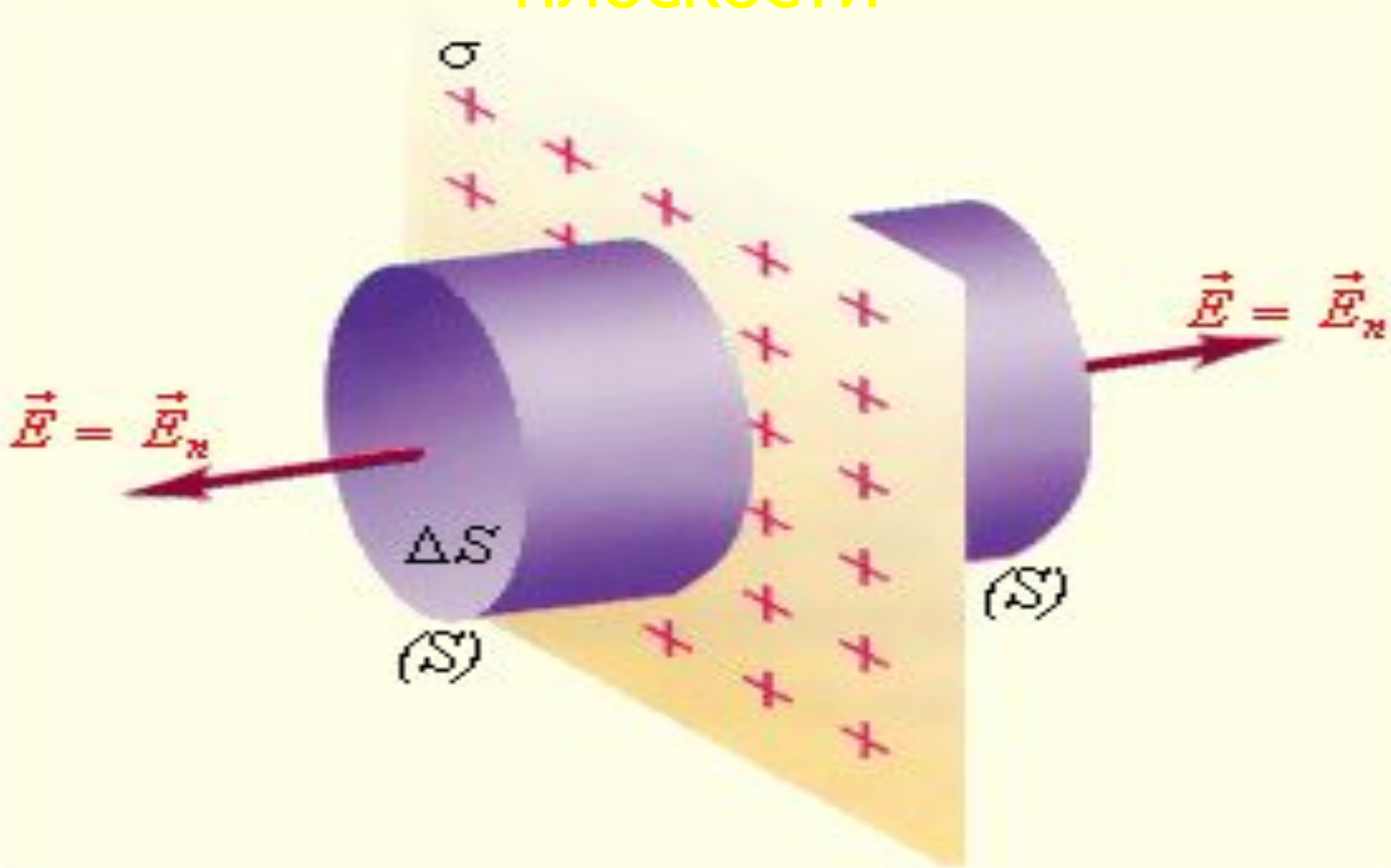
$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-; \quad E = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0} + \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}; \quad \mathbf{E} = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0}$$

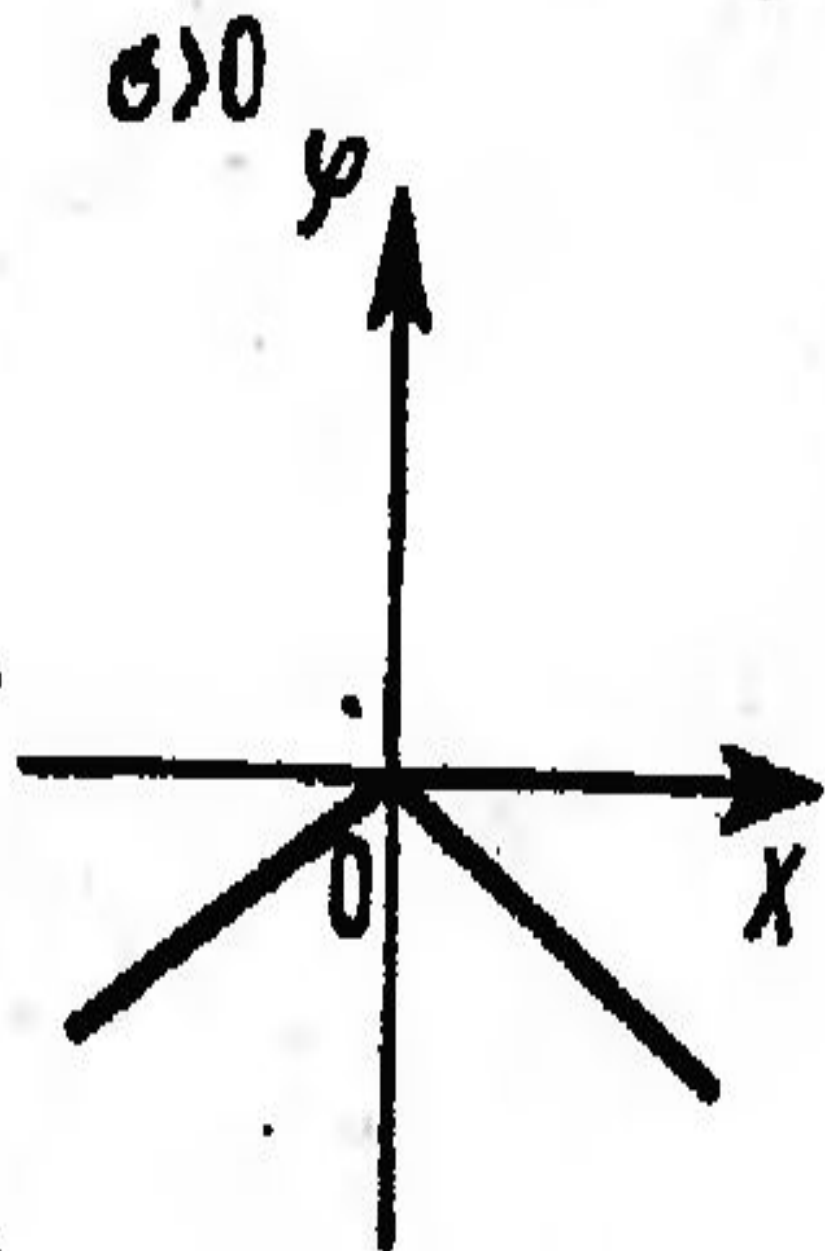
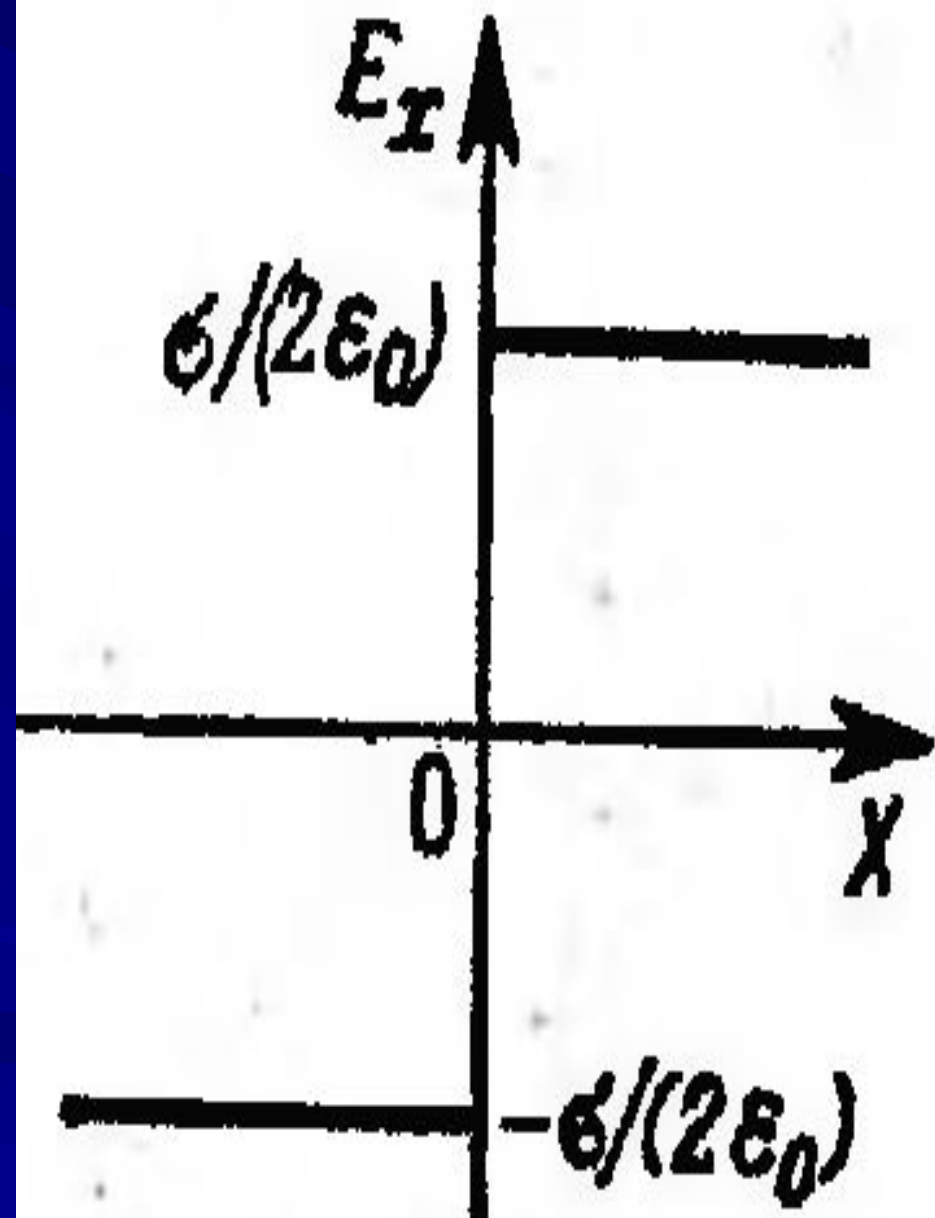




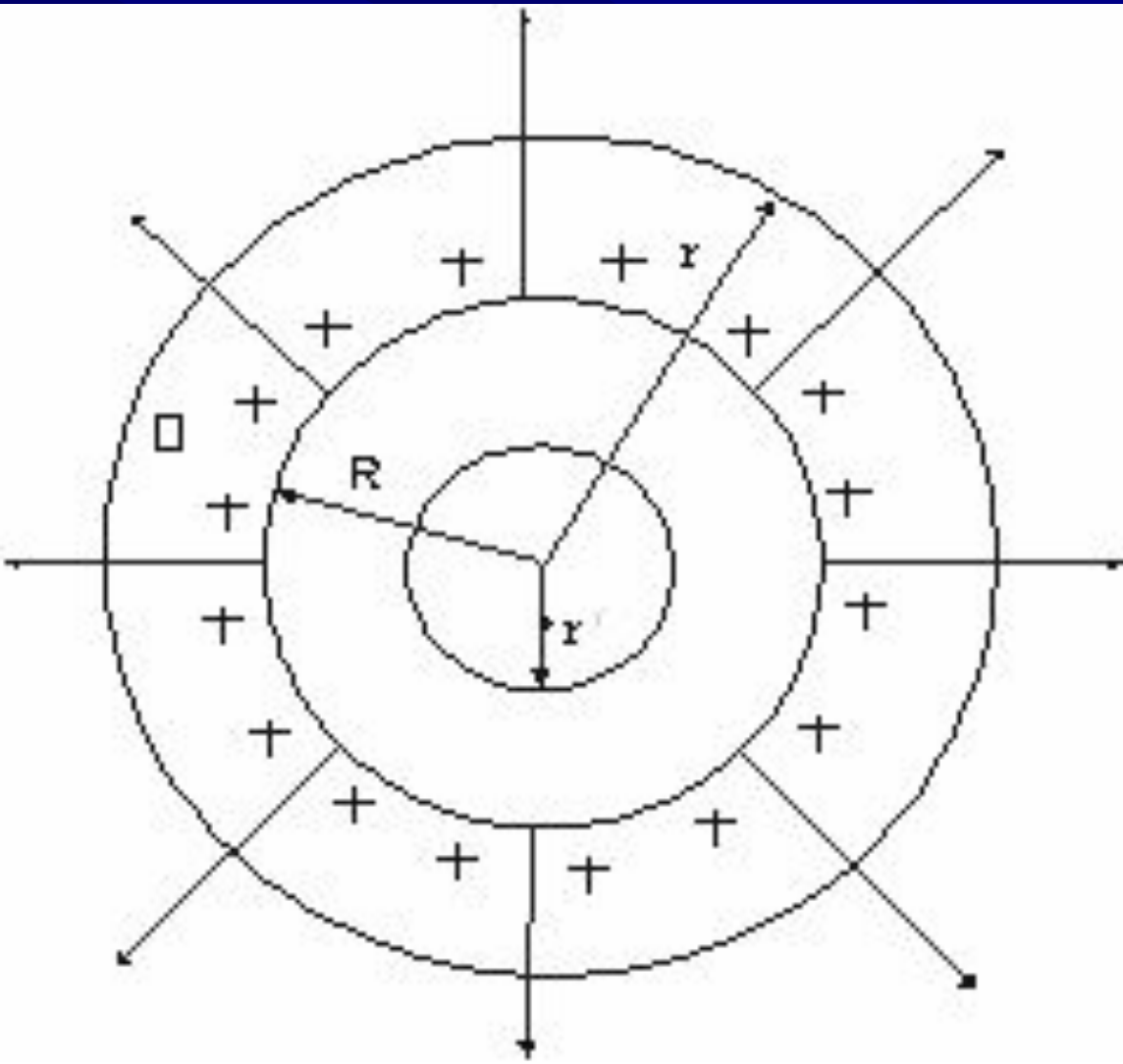


Поле равномерно заряженной плоскости





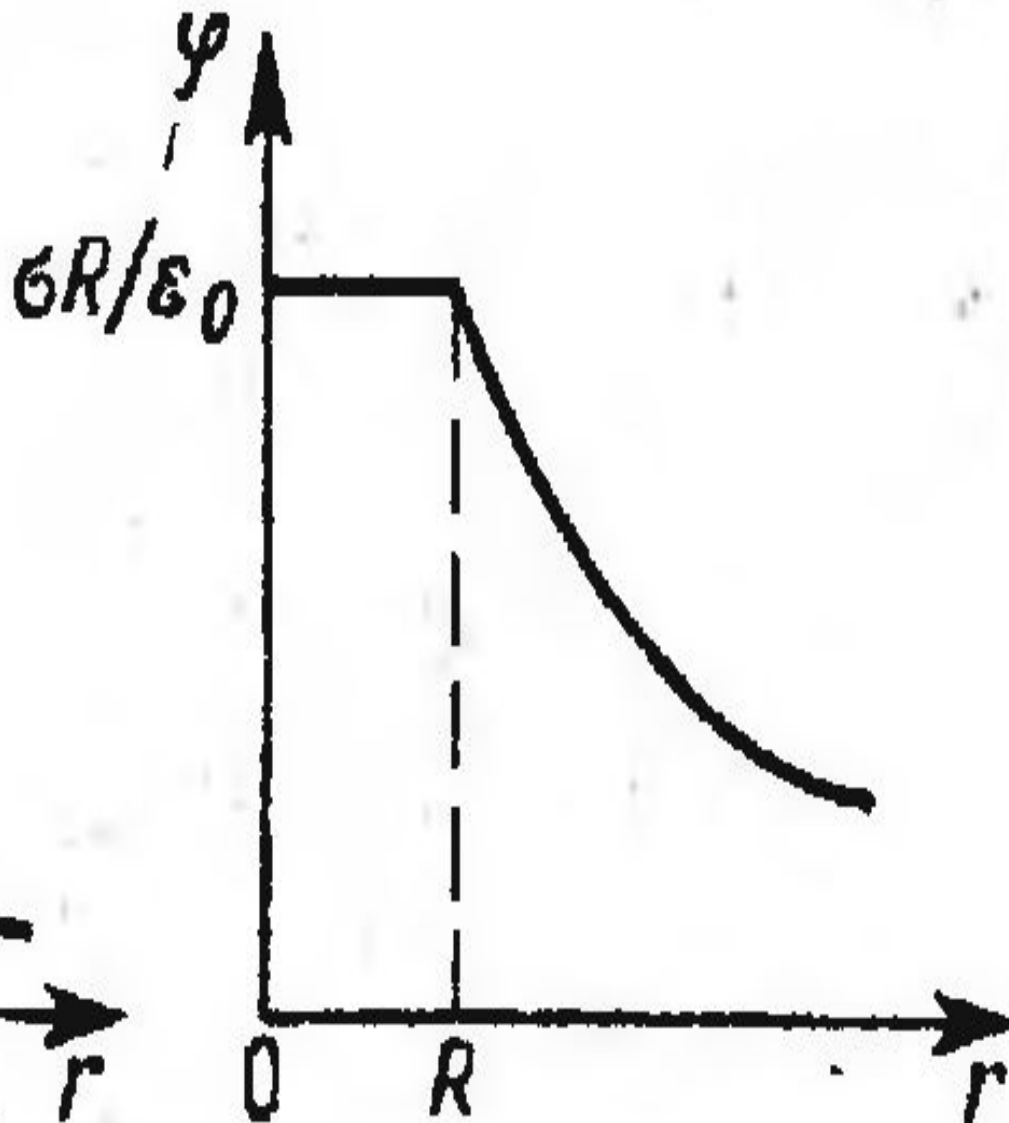
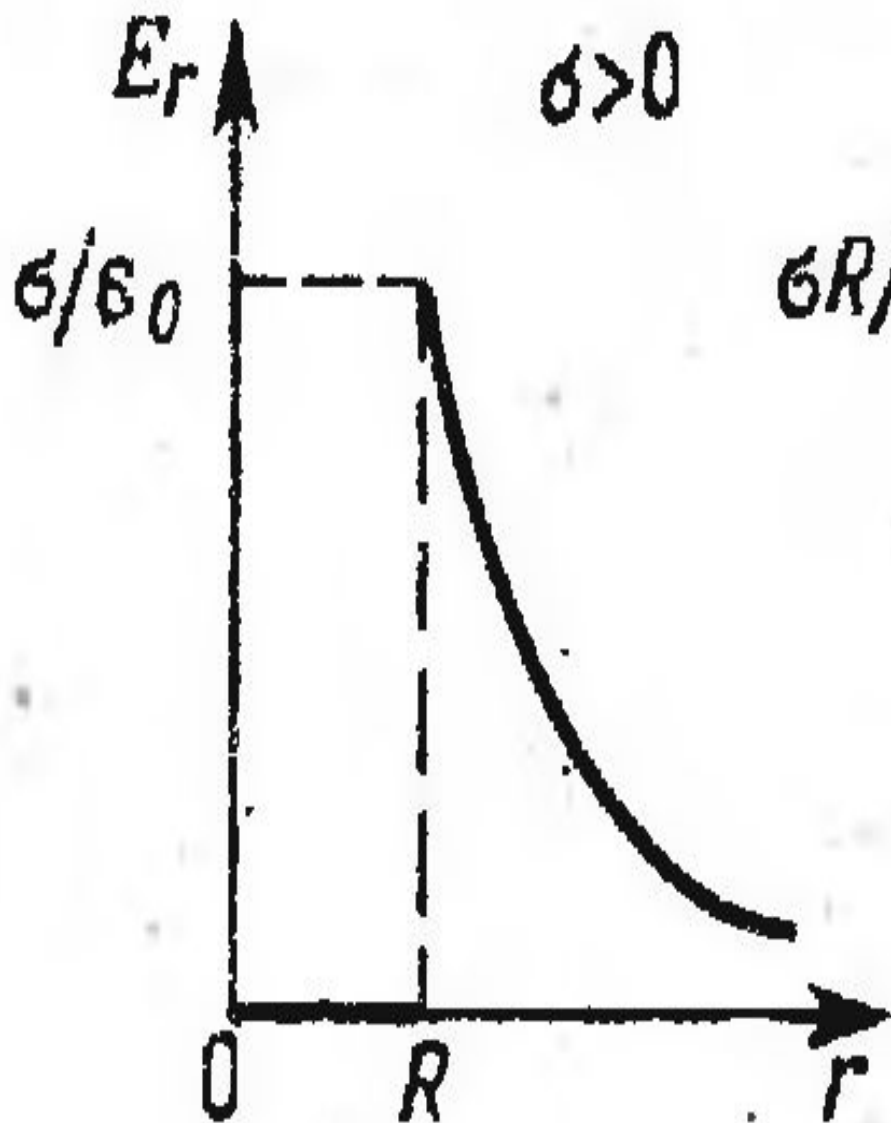
Поле равномерно заряженной сферической поверхности.



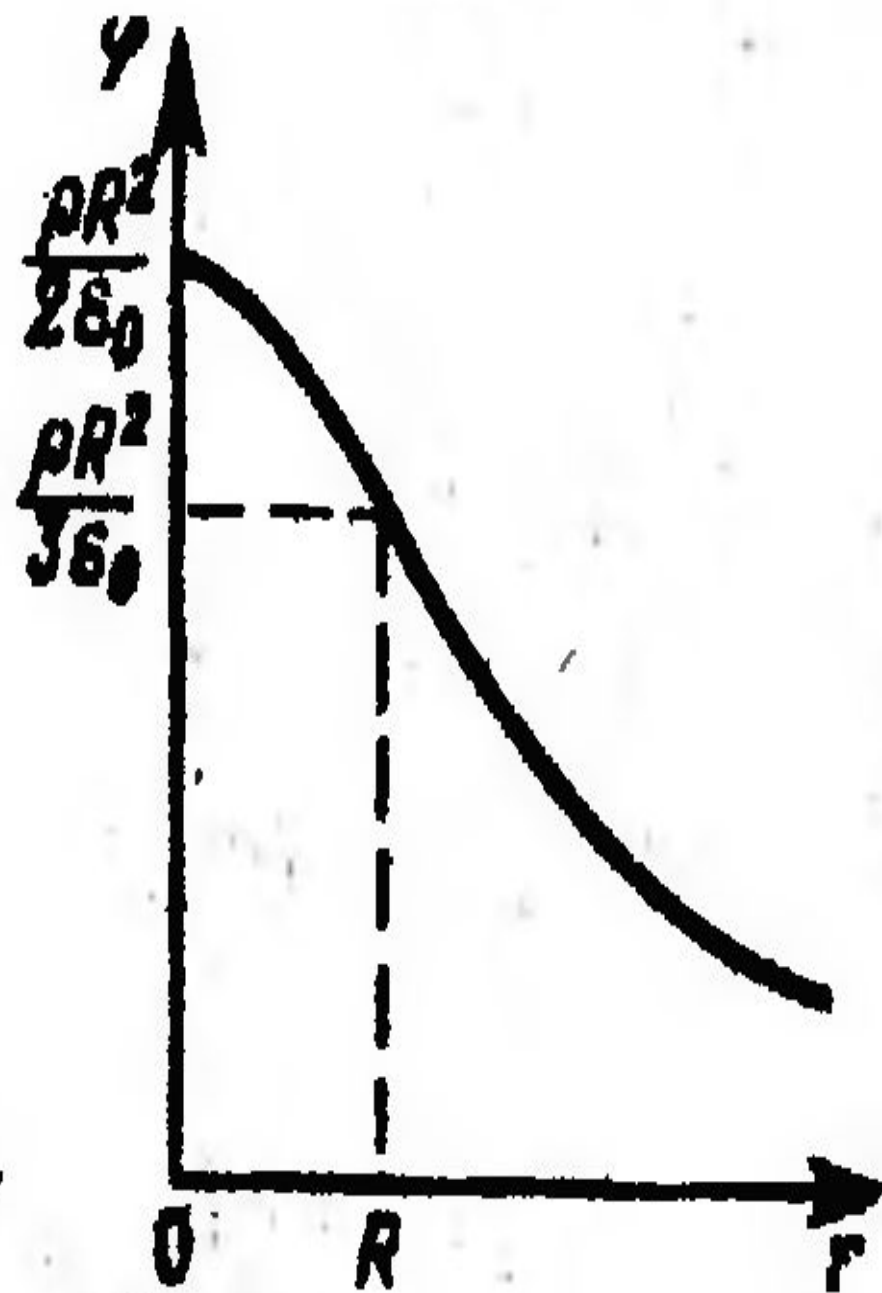
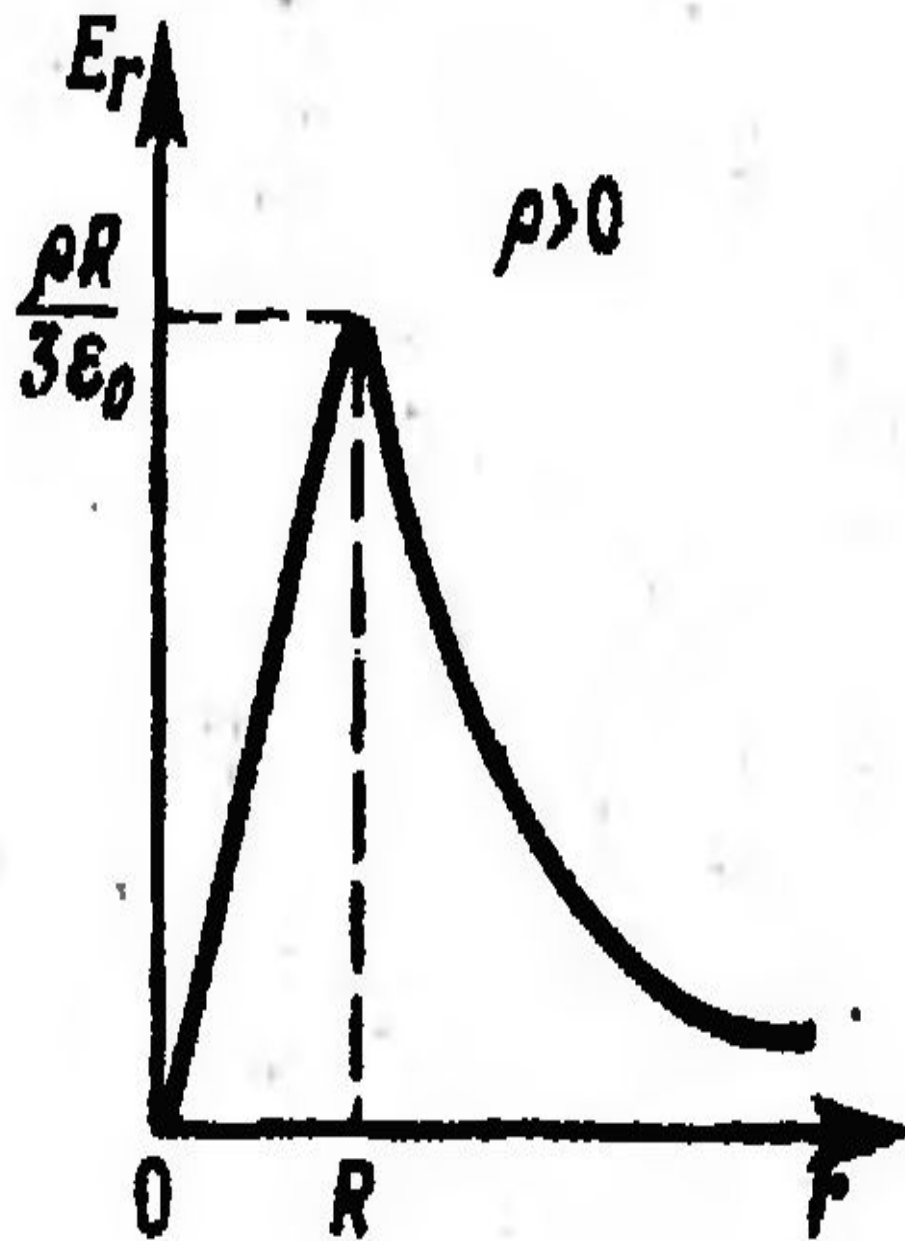
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

$$(r \geq R)$$

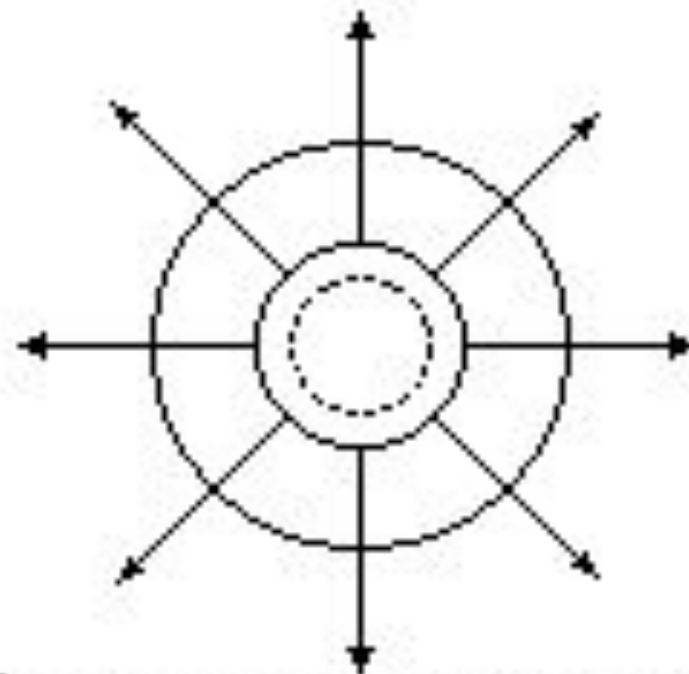
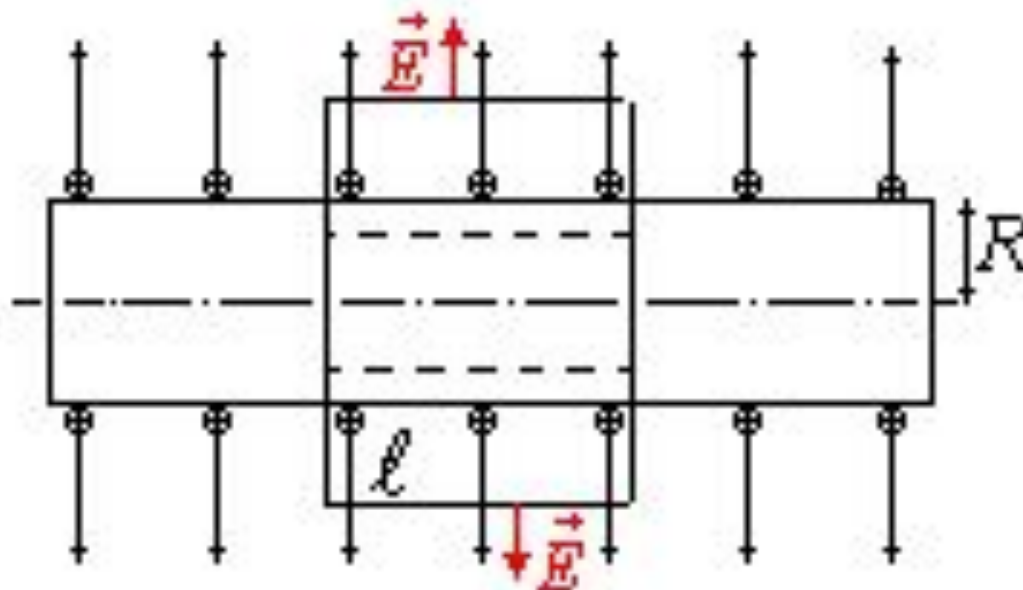
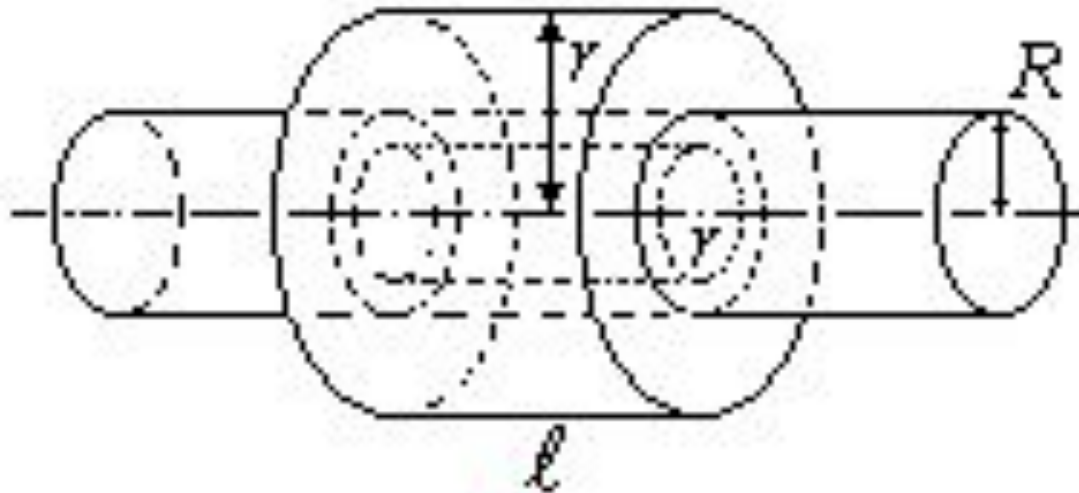
$\sigma > 0$



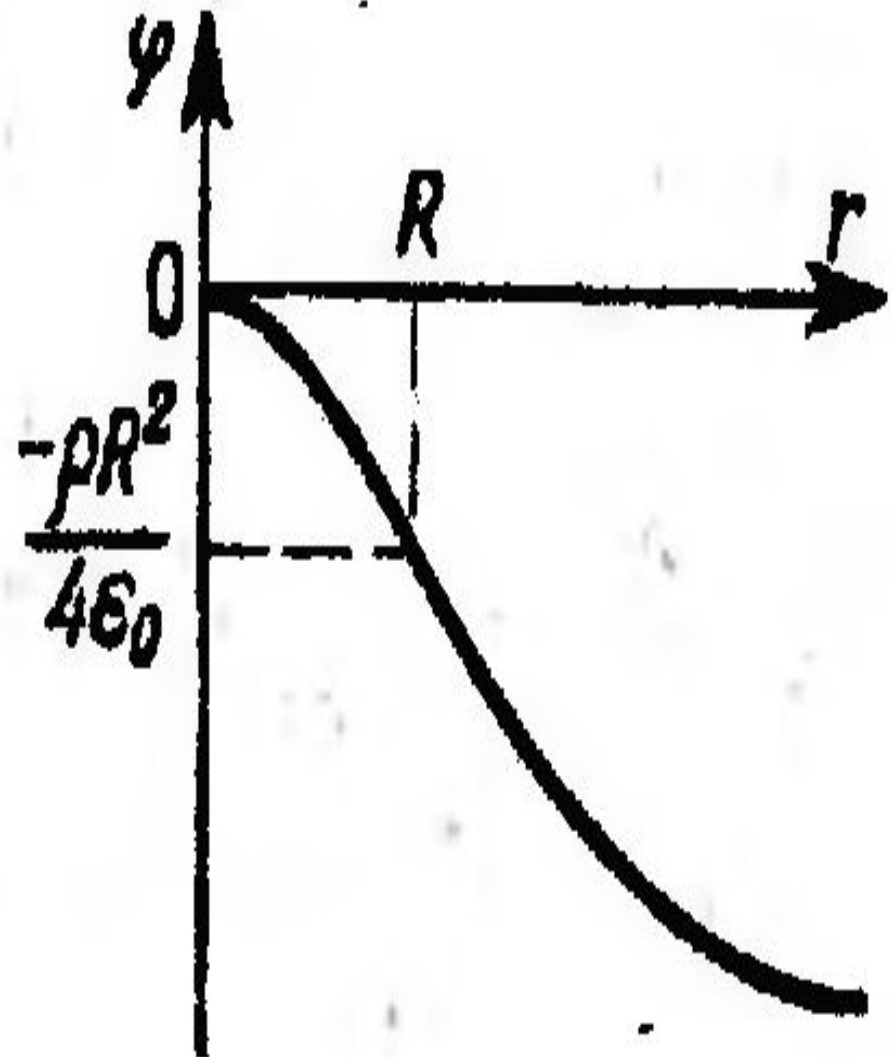
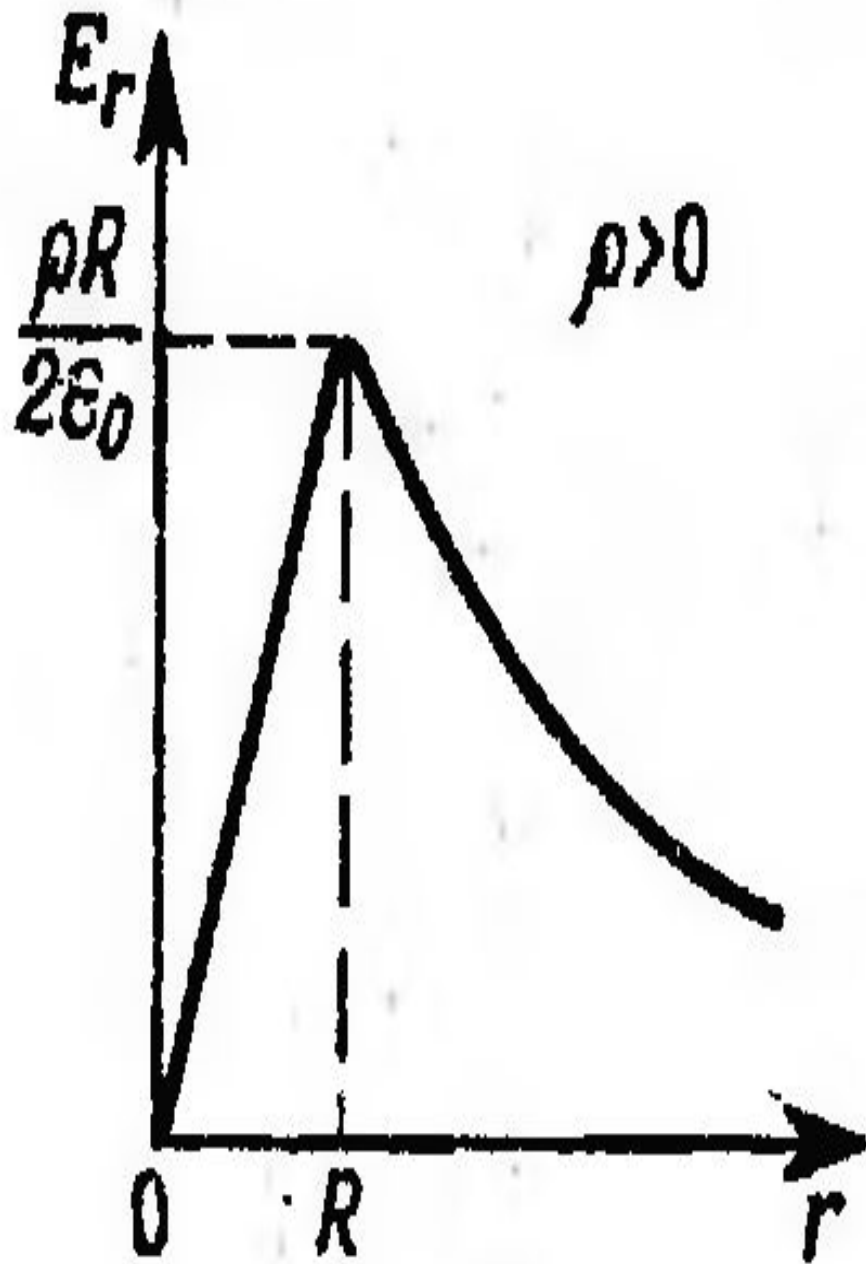
Поле заряда, равномерно
распределенного в вакууме по
объему шара



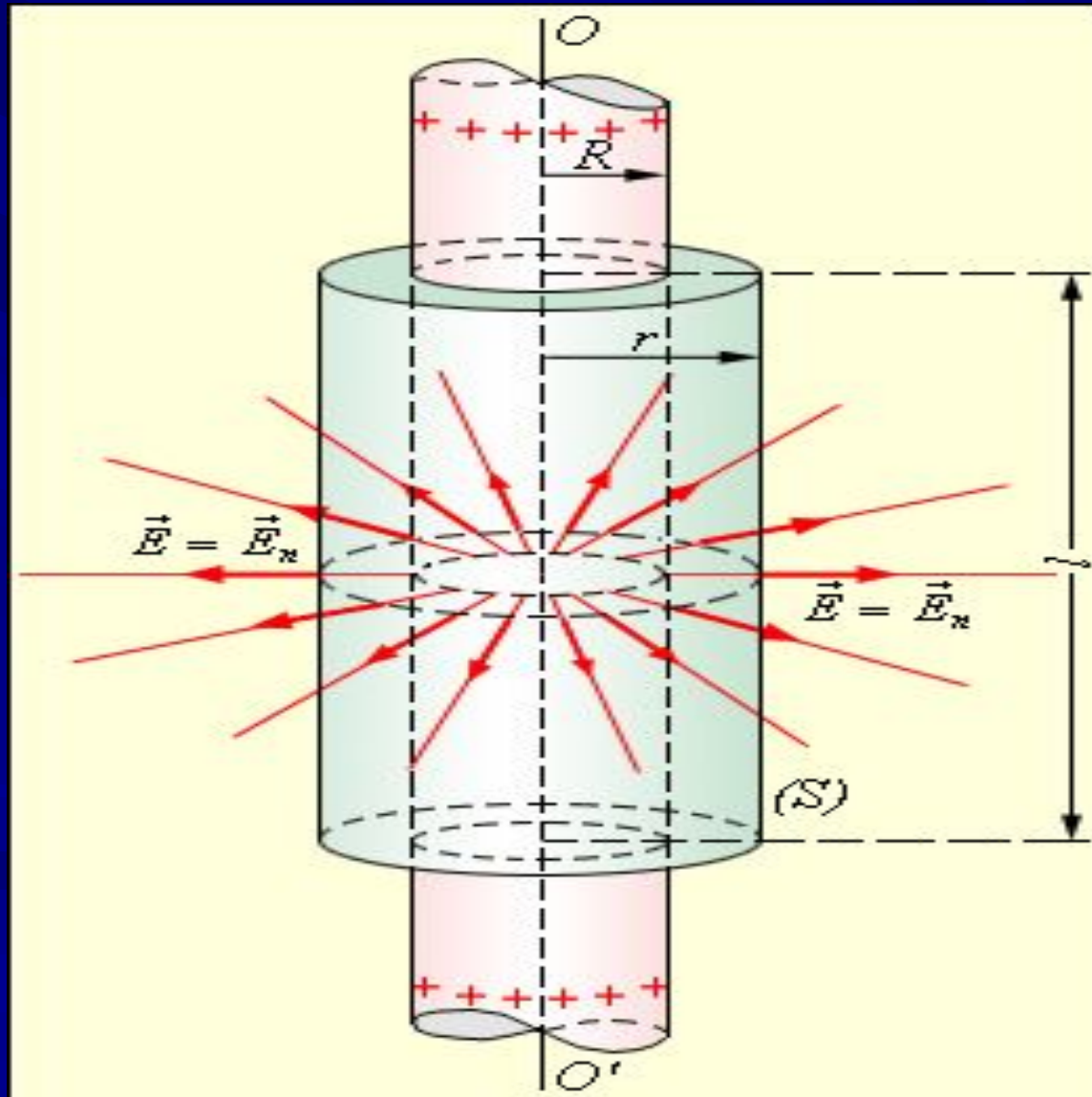
Поле бесконечно длинного заряженного цилиндра (нити)

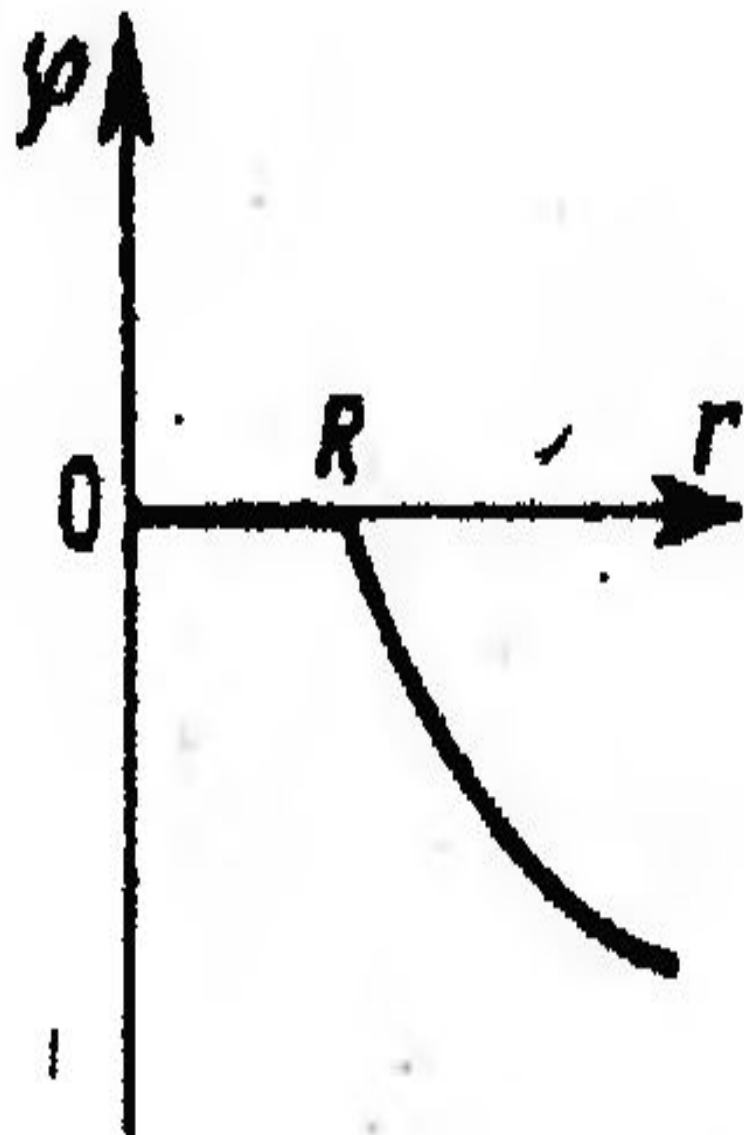
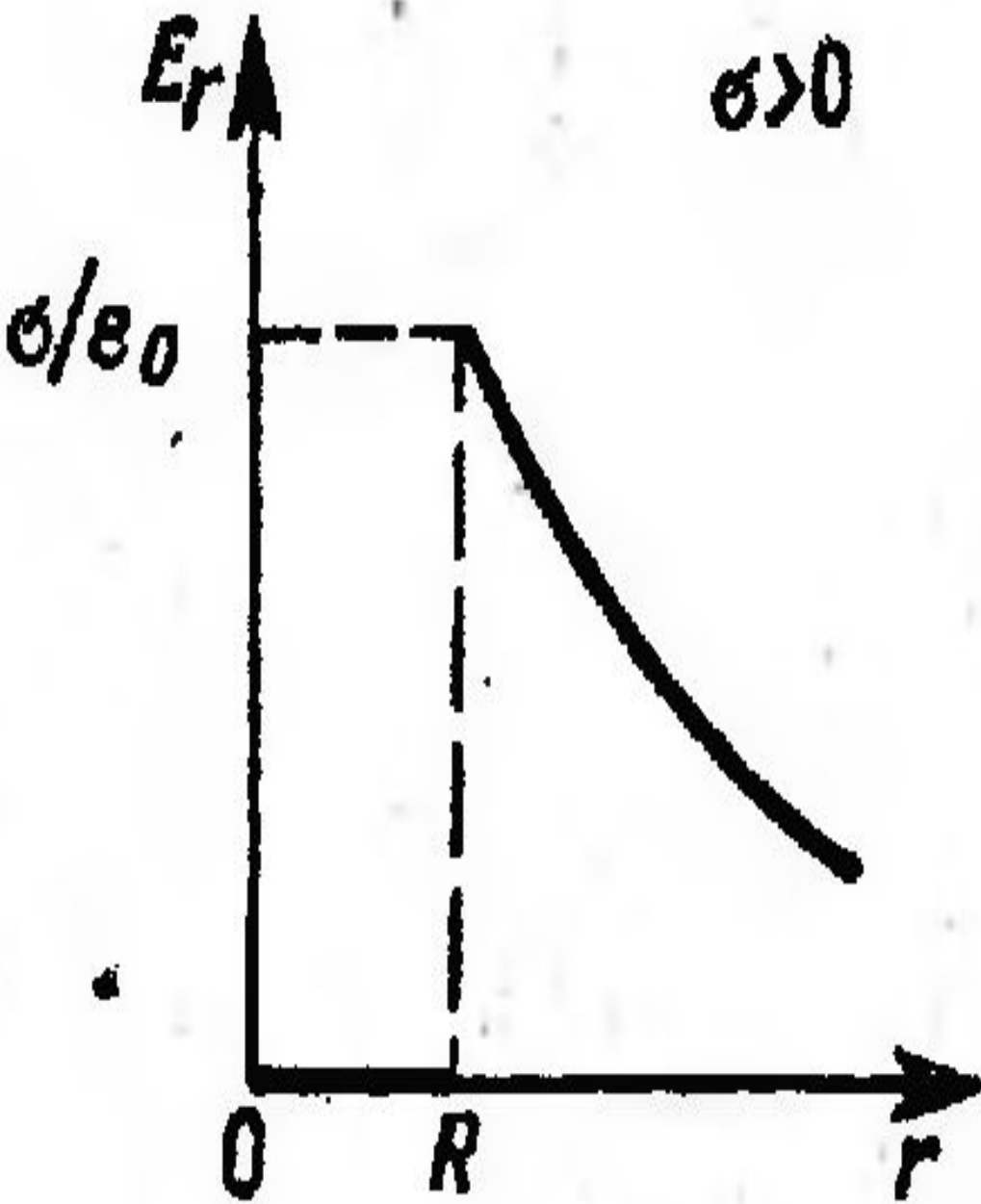


Вид с торца цилиндра



Поле однородно заряженного цилиндра





Основные выводы

- Напряженность электростатического поля в вакууме изменяется скачком при переходе через заряженную поверхность;
- при переходе через границу области объемного заряда напряженность поля в вакууме изменяется непрерывно;
- потенциал поля всегда является непрерывной функцией координат.