

Физика

Колебания и волны

5. Механические колебания и волны

5.1. Гармонические колебания и их характеристики

Колебаниями называются движения или процессы, которые характеризуются определенной повторяемостью во времени.

Гармоническими колебаниями называются колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса.

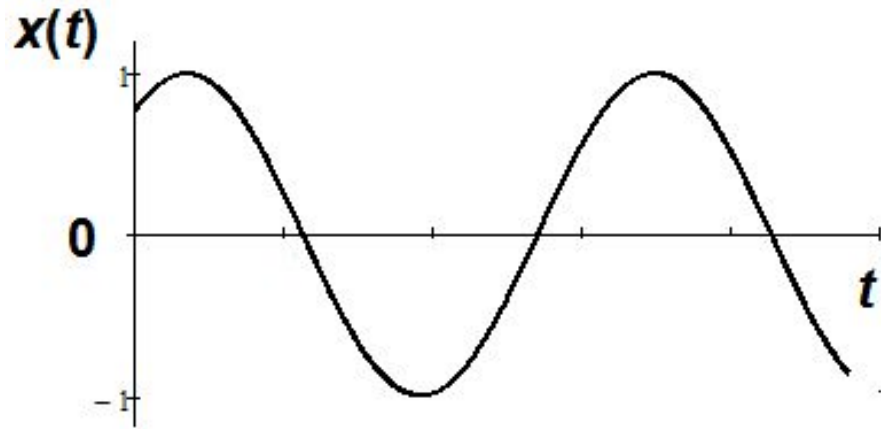
$$s(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

A — амплитудой колебания, максимальное значение величины,

ω_0 — круговая (угловая) частота,

ϕ — начальная фаза колебания, в момент времени $t=0$,

$(\omega_0 t + \phi)$ — фаза колебания в момент времени t .



$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \text{- период колебаний} \quad \nu = \frac{1}{T}, \quad \text{- частота колебаний}$$

Связь между угловой и обычной частотой колебаний:

$$\omega_0 = 2\pi\nu,$$

Единица частоты — герц (Гц): 1 Гц — частота периодического процесса, при которой за 1 с совершается один цикл процесса.

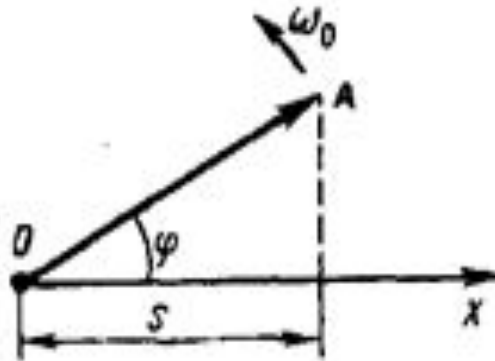
Дифференциальное уравнение гармонических колебаний:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0,$$

Решение дифференциального уравнения:

$$s(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Гармонические колебания можно графически представить в виде вращающегося вектора:



$$\tilde{s} = Ae^{i\alpha} = A\cos\alpha + iA\sin\alpha, \quad \alpha = \omega_0 t + \varphi$$

Вещественная часть вектора:

$$\operatorname{Re}(\tilde{s}) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) = s(t).$$

5.2. Гармонический осциллятор. Пружинный, физический и математический маятники

Гармоническим осциллятором называется система, совершающая колебания, описываемые уравнением вида;

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0,$$

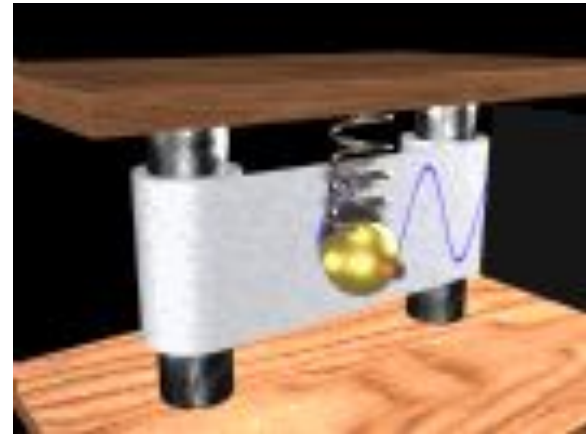
Физические примеры гармонических осцилляторов.

1. **Пружинный маятник** — это груз массой m , подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающий гармонические колебания под действием упругой силы $F = -kx$.

Уравнение движения маятника:

$$ma = -kx;$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0;$$



Пружинный маятник совершает гармонические колебания по закону:

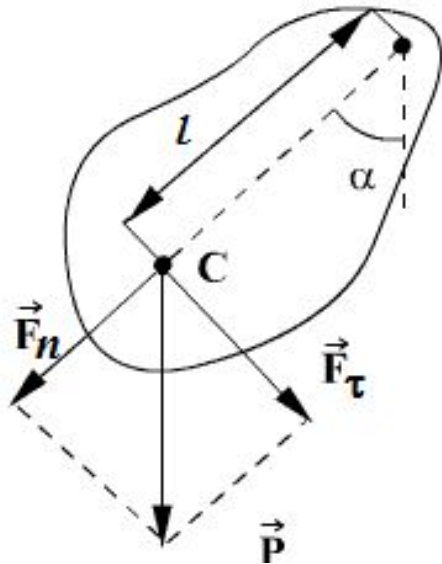
$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{с циклической частотой} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

и периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Потенциальная энергия пружинного маятника равна

2. Физический маятник — это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку O , не совпадающую с центром масс C тела.



Момент M возвращающей силы:

$$M = J\varepsilon = F_{\tau}l = -mgl \sin \alpha \approx -mgl\alpha.$$

$$F_{\tau} = -mg \sin \alpha \approx -mg\alpha$$

— возвращающая сила.

Уравнение динамики физического маятника:

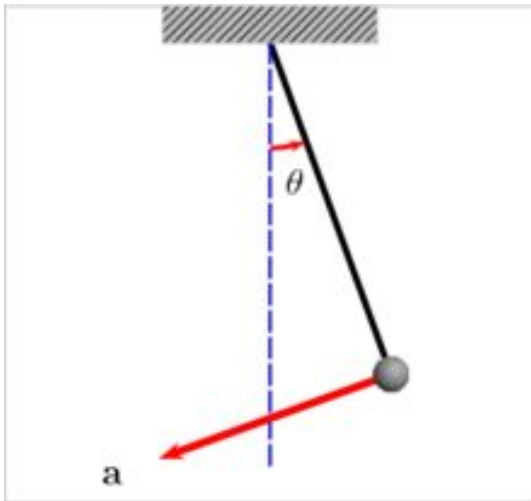
$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + mgl \alpha = 0; \quad \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{mgl \alpha}{J} = 0;$$

или: $\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha = 0;$ где: $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}.$

Решение динамического уравнения:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

3. **Математический маятник** — это идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m , подвешенной на нерастяжимой невесомой нити, и колеблющаяся под действием силы тяжести.



$$ma_{\tau} = F_{\tau} = -mg \sin \frac{x}{l};$$

$$ma_{\tau} = -m \frac{g}{l} x;$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}};$$

Период малых колебаний математического маятника:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

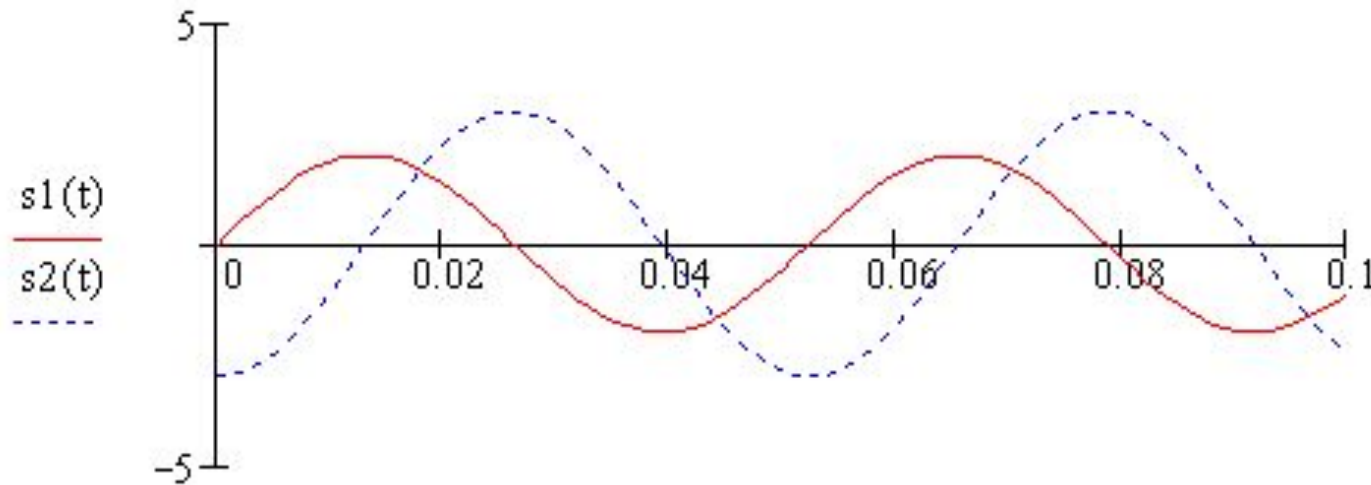
5.3. Сложение гармонических колебаний

1) Сложение параллельных колебаний одинаковой частоты.

Постановка задачи:

Пусть имеется два гармонических сигнала

$$s_1(t) = s_{01} \sin(\omega_0 t + \varphi_1); \quad s_2(t) = s_{02} \sin(\omega_0 t + \varphi_2).$$

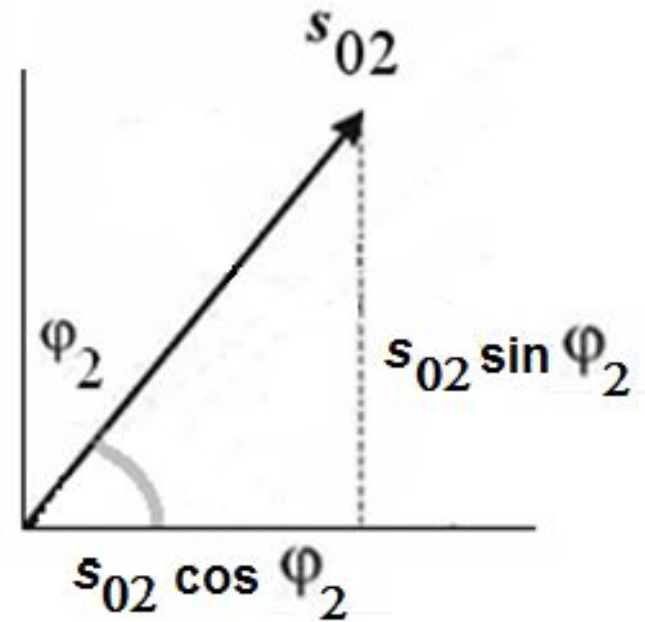
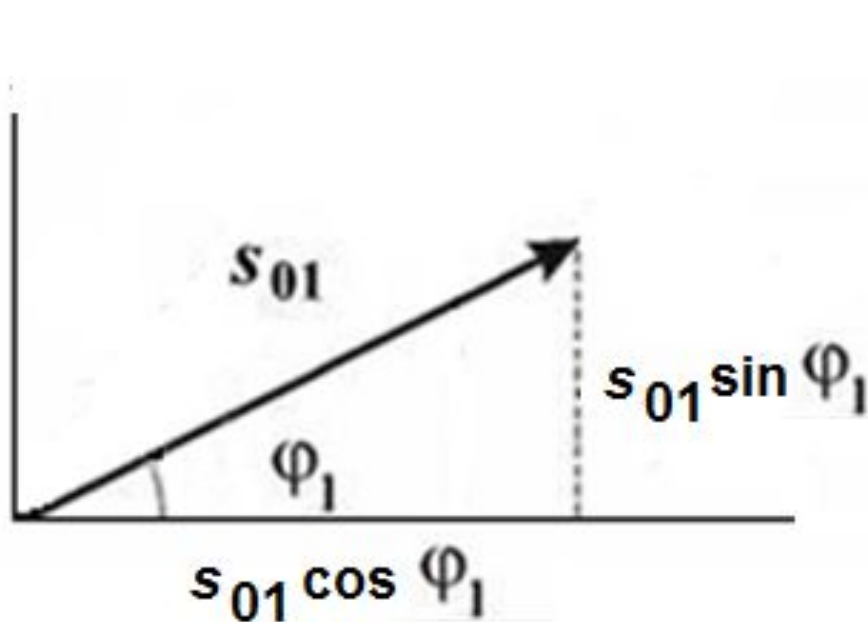


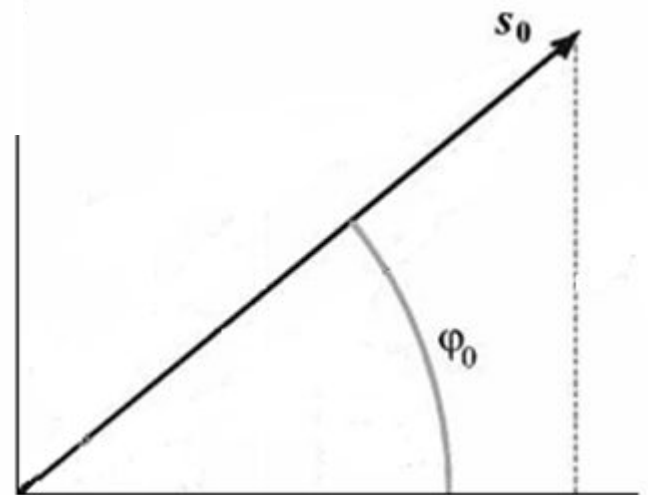
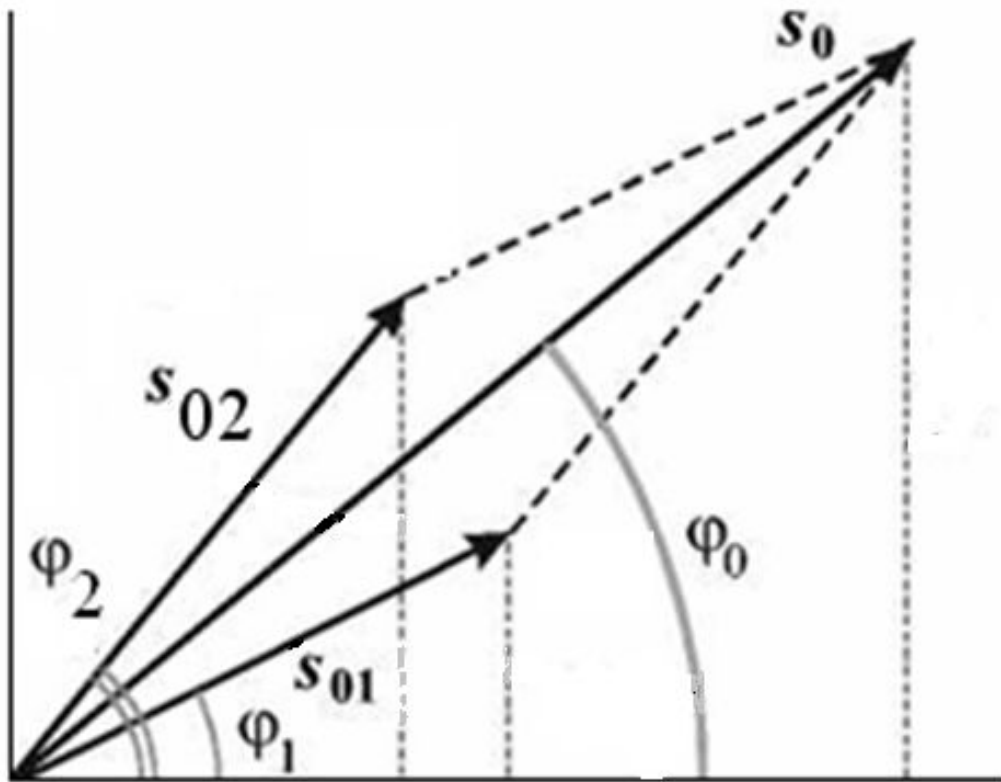
Необходимо сложить два колебания с одинаковыми частотами:

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{s}_1(t) + \mathbf{s}_2(t) = \mathbf{s}_{01} \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + \mathbf{s}_{02} \sin(\omega_0 t + \varphi_2)$$

$$\rightarrow \mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_{01} \mathbf{e}^{j\varphi_1};$$

$$\rightarrow \mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_{02} \mathbf{e}^{j\varphi_2}.$$

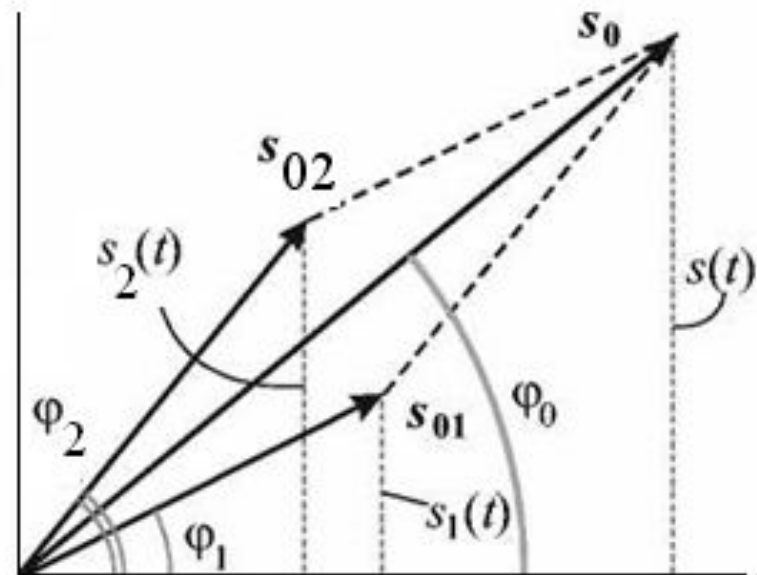




$$s_0 = \sqrt{(s_{01} \cos \varphi_1 + s_{02} \cos \varphi_2)^2 + (s_{01} \sin \varphi_1 + s_{02} \sin \varphi_2)^2}$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{s_{01} \sin \varphi_1 + s_{02} \sin \varphi_2}{s_{01} \cos \varphi_1 + s_{02} \cos \varphi_2}$$

Суммарное колебание $s_0(t)$ опережает по фазе колебание $s_1(t)$ и отстает по фазе от колебания $s_2(t)$.



2) Сложение параллельных гармонических колебаний с близкими частотами.

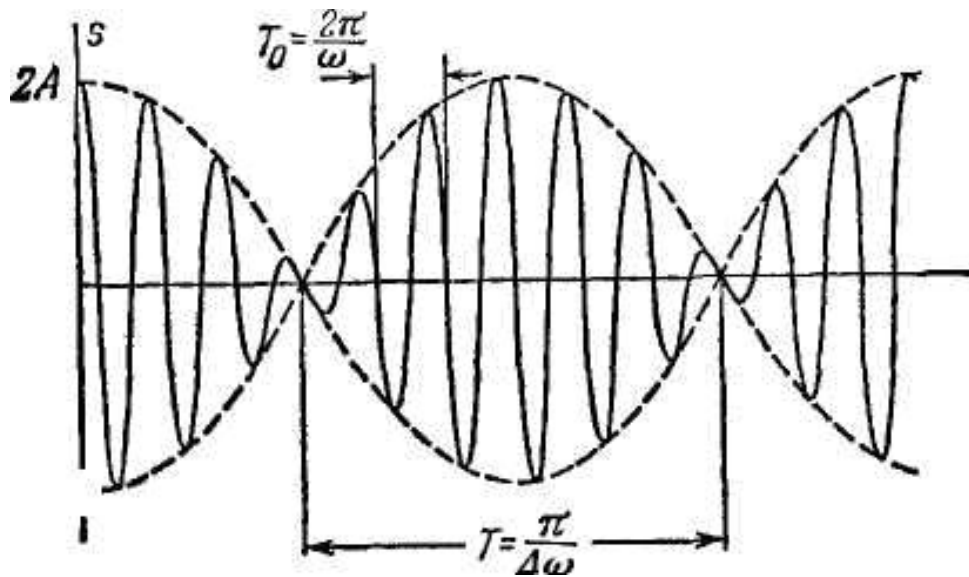
Найдем сумму двух гармонических колебаний, частоты которых различны, но близки по величине:

$$\omega_1 = \omega - \Delta\omega; \quad \omega_2 = \omega + \Delta\omega; \quad \Delta\omega \ll \omega.$$

$$s_1 = A \cos \omega_1 t; \quad s_2 = A \cos \omega_2 t;$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right);$$

$$\begin{aligned} s &= s_1 + s_2 = 2A \cos \frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2} t \cdot \cos \frac{(\omega_2 + \omega_1)}{2} t = \\ &= 2A \cos(\Delta\omega t) \cos(\omega t). \end{aligned}$$



Суммарное колебание можно рассматривать как «почти синусоидальное» колебание с «условным периодом»:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega},$$

и с медленно меняющейся «амплитудой»

$$B = |2A \cos(\Delta\omega t)|.$$

Периодические изменения амплитуды описанного выше вида называются *биениями*.

Период биений:

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

Частота биений равна разности частот слагаемых колебаний:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = \nu_2 - \nu_1,$$

3) Сложение взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковыми частотами.

$$s_1 = s_{01} \sin(\omega_0 t + \varphi_1); \quad s_2 = s_{02} \sin(\omega_0 t + \varphi_2).$$

Чтобы получить траекторию движения, исключим из выражений текущее время и преобразуем синус по формулам тригонометрии:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta;$$

$$\frac{s_1}{s_{01}} = \sin \omega_0 t \cdot \cos \varphi_1 + \cos \omega_0 t \cdot \sin \varphi_1;$$

$$\frac{s_2}{s_{02}} = \sin \omega_0 t \cdot \cos \varphi_2 + \cos \omega_0 t \cdot \sin \varphi_2.$$

Умножим первое уравнение на $\cos \varphi_2$, а второе — на $\cos \varphi_1$ и вычтем второе уравнение из первого

$$\frac{s_1}{s_{01}} \cdot \cos \varphi_2 - \frac{s_2}{s_{02}} \cdot \cos \varphi_1 = \cos \omega_0 t \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Теперь умножим первое уравнение на $\sin \varphi_2$, а второе — на $\sin \varphi_1$, повторим вычитание, получим:

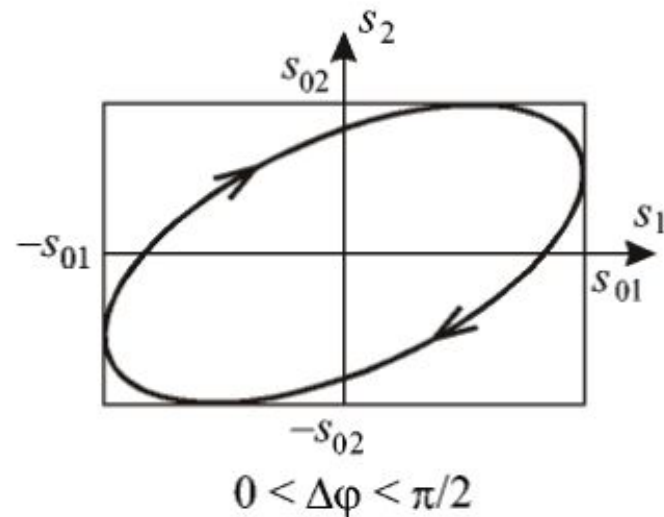
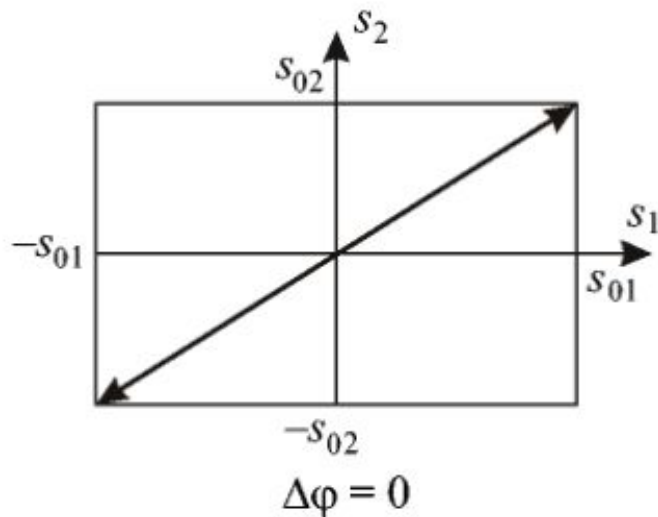
$$\frac{s_1}{s_{01}} \cdot \sin \varphi_2 - \frac{s_2}{s_{02}} \cdot \sin \varphi_1 = \sin \omega_0 t \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Возведем в квадрат каждое из равенств и сложим их.

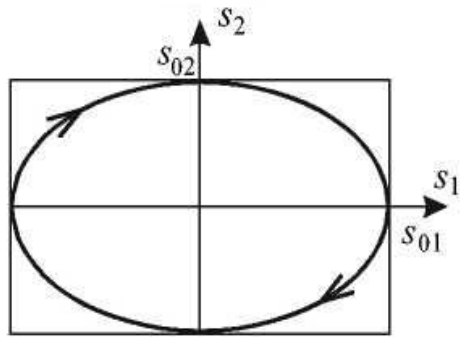
В результате время будет исключено, а уравнение траектории движения будет уравнением эллипса:

$$\left[\frac{s_1}{s_{01}} \right]^2 + \left[\frac{s_2}{s_{02}} \right]^2 - 2 \frac{s_1}{s_{01}} \frac{s_2}{s_{02}} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

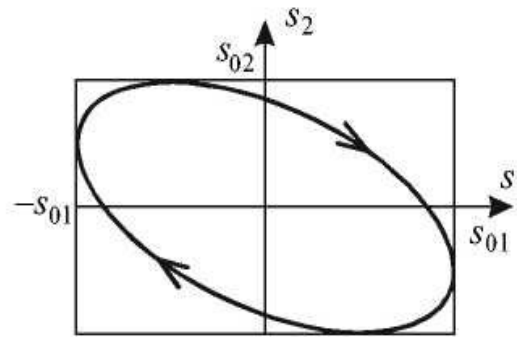
В результате будут совершаться периодические движения по эллиптической траектории. Направление движения вдоль траектории и ориентация эллипса относительно осей S_1 и S_2 зависят от разности фаз $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.



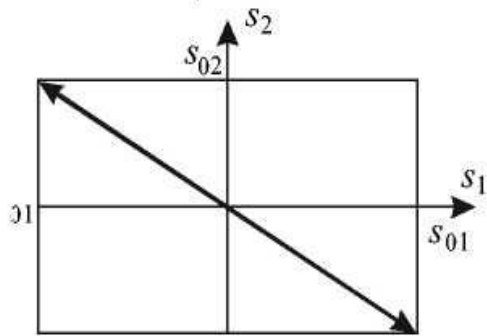
При разности фаз $0 < \Delta\varphi < \pi$ вектор движется по часовой стрелке, а при $\pi < \Delta\varphi < 2\pi$ -против часовой стрелки.



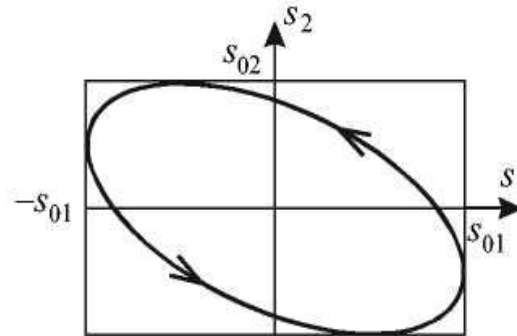
$$\Delta\varphi = \pi/2$$



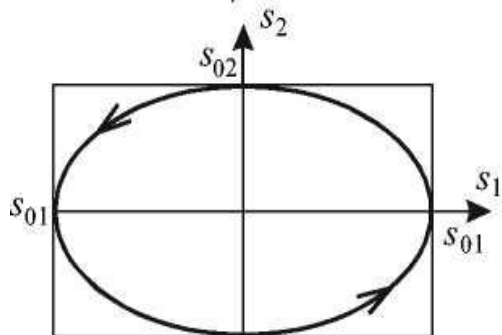
$$\pi/2 < \Delta\varphi < \pi$$



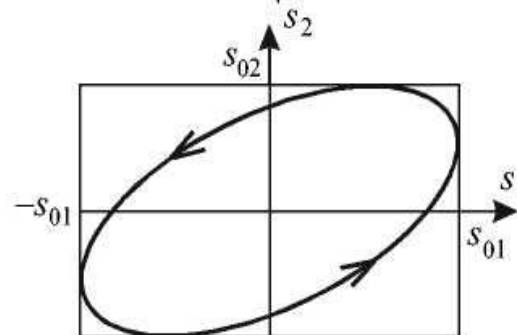
$$\Delta\varphi = \pi$$



$$\pi < \Delta\varphi < 3/2 \pi$$



$$\Delta\varphi = 3/2 \pi$$

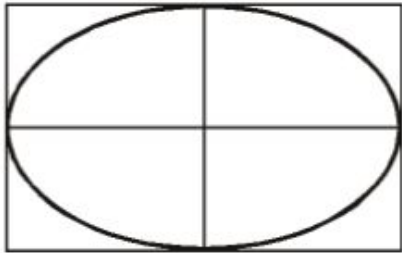


$$3/2 \pi < \Delta\varphi < 2\pi$$

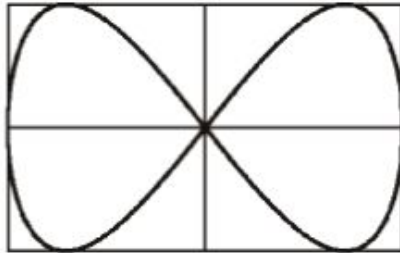
4) Сложение перпендикулярных колебаний с кратными частотами.

$m\omega_{02} = n\omega_{01}$, где m и n - целые числа.

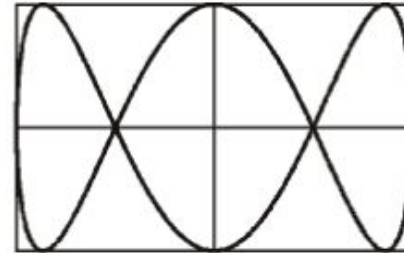
Траектории движения представляют собой замкнутые кривые, называемые фигурами Лиссажу.



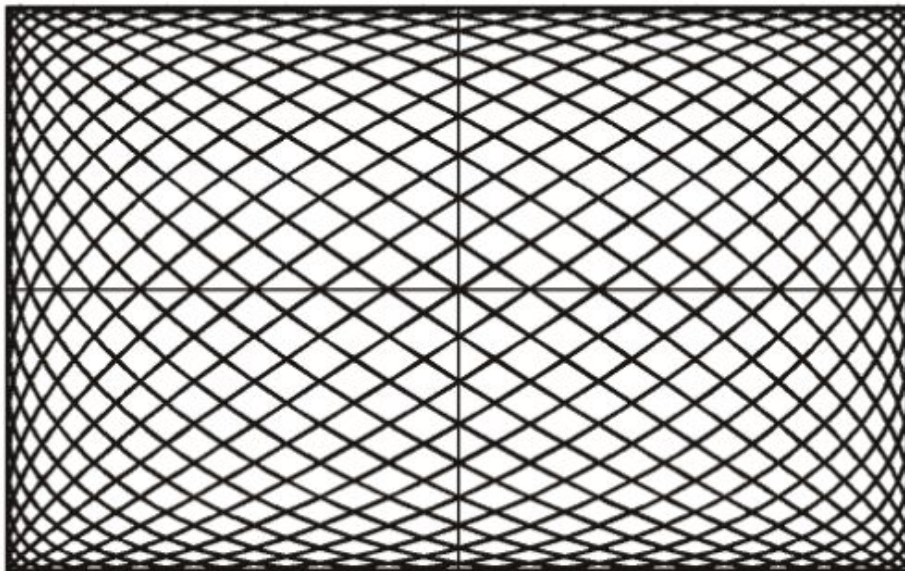
$m = 1, n = 1$



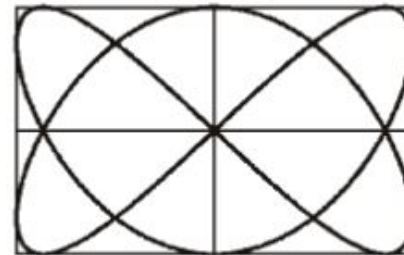
$m = 1, n = 2$



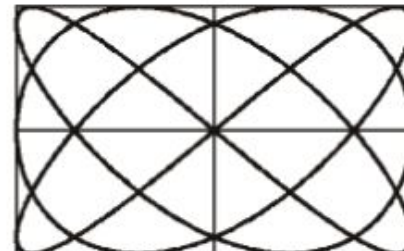
$m = 1, n = 3$



$m = 19, n = 20$



$m = 2, n = 3$



$m = 3, n = 4$