Физика

Колебания и волны

5. Механические колебания и волны

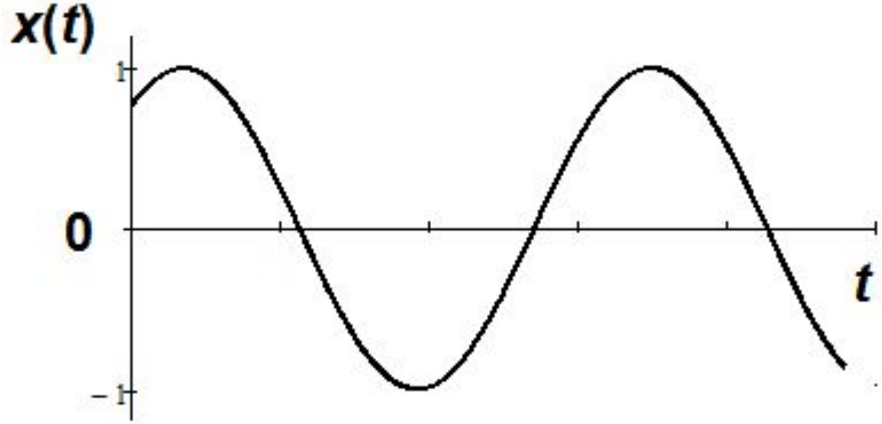
5.1. Гармонические колебания и их характеристики

Колебаниями **называются движения или процессы, которые характеризуются определенной повторяемостью во времени.**

Гармоническими колебаниями **называются колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса.**

$$s(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha).$$

A — амплитудой колебания, максимальное значение величины,
ω_0 — круговая (угловая) частота,
ϕ — начальная фаза колебания, в момент времени $t=0$,
$(\omega_0 t+\phi)$ — фаза колебания в момент времени t.



$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$ - период колебаний

$$\nu = \frac{1}{T},$$ - частота колебаний

Связь между угловой и обычной частотой колебаний:

$$\omega_0 = 2\pi\nu,$$

Единица частоты — герц (Гц): 1 Гц — частота периодического процесса, при которой за 1 с совершается один цикл процесса.

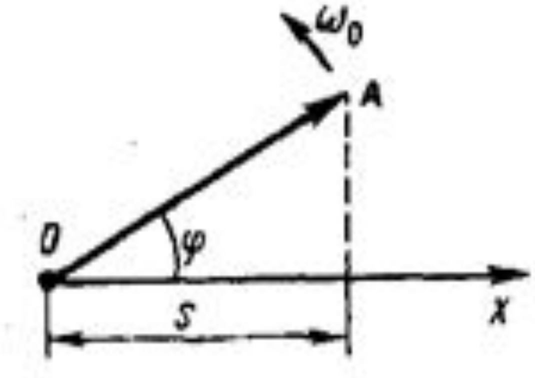
Дифференциальное уравнение гармонических колебаний:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0,$$

Решение дифференциального уравнения:

$$s(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Гармонические колебания можно графически представить в виде вращающегося вектора:



$$\breve{s} = Ae^{i\alpha} = A\cos\alpha + iA\sin\alpha, \qquad \alpha = \omega_0 t + \varphi$$

Вещественная часть вектора:

$$\mathrm{Re}(\tilde{s}) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) = s(t).$$

5.2. Гармонический осциллятор. Пружинный, физический и математический маятники

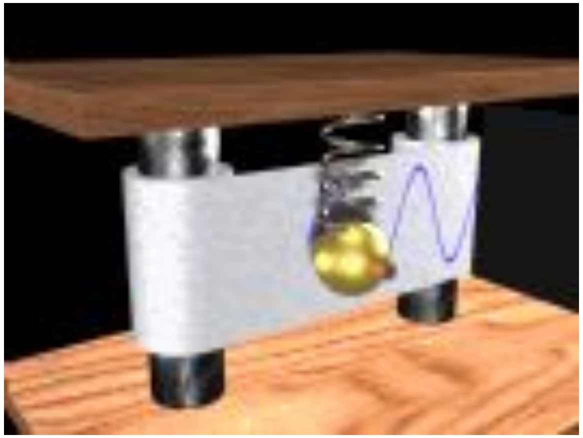
Гармоническим осциллятором **называется система, совершающая колебания, описываемые уравнением вида;**

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\omega_0^2 s=0,$$

Физические примеры гармонических осцилляторов.

1. *Пружинный маятник* — это груз массой *m*, подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающий гармонические колебания под действием упругой силы $F = -kx$.

Уравнение движения маятника:



$$ma = -kx;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0;$$

Пружинный маятник совершает гармонические колебания по закону:

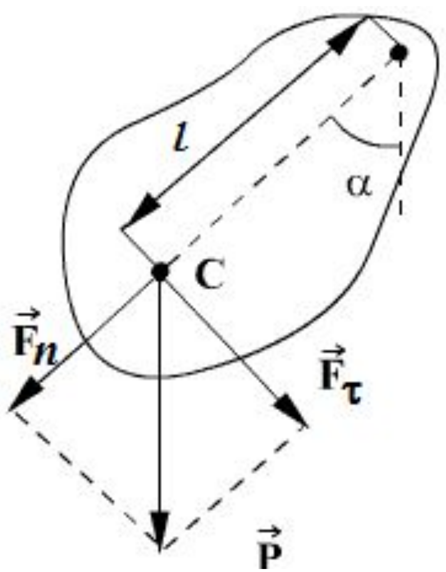
$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$ **с циклической частотой** $$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

и периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Потенциальная энергия пружинного маятника равна

2. ***Физический маятник*** **— это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку *O*, не совпадающую с центром масс *C* тела.**



Момент *M* возвращающей силы:

$$M = J\varepsilon = F_\tau l = -mgl\sin\alpha \approx -mgl\alpha.$$

$$F_\tau = -mg\sin\alpha \approx -mg\alpha$$

— возвращающая сила.

Уравнение динамики физического маятника:

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} + mgl\alpha = 0; \qquad \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgl\alpha}{J} = 0;$$

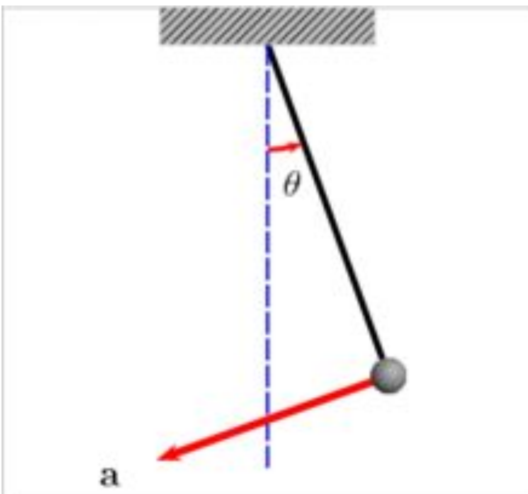
или: $$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2\alpha = 0;$$ где: $$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}.$$

Решение динамического уравнения:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

3. ***Математический маятник*** **— это идеализированная система, состоящая из материальной точки массой *m*, подвешенной на нерастяжимой невесомой нити, и колеблющаяся под действием силы тяжести.**

$$ma_\tau = F_\tau = -mg\sin\frac{x}{l};$$



$$ma_\tau = -m\frac{g}{l}x;$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}};$$

Период малых колебаний математического маятника:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

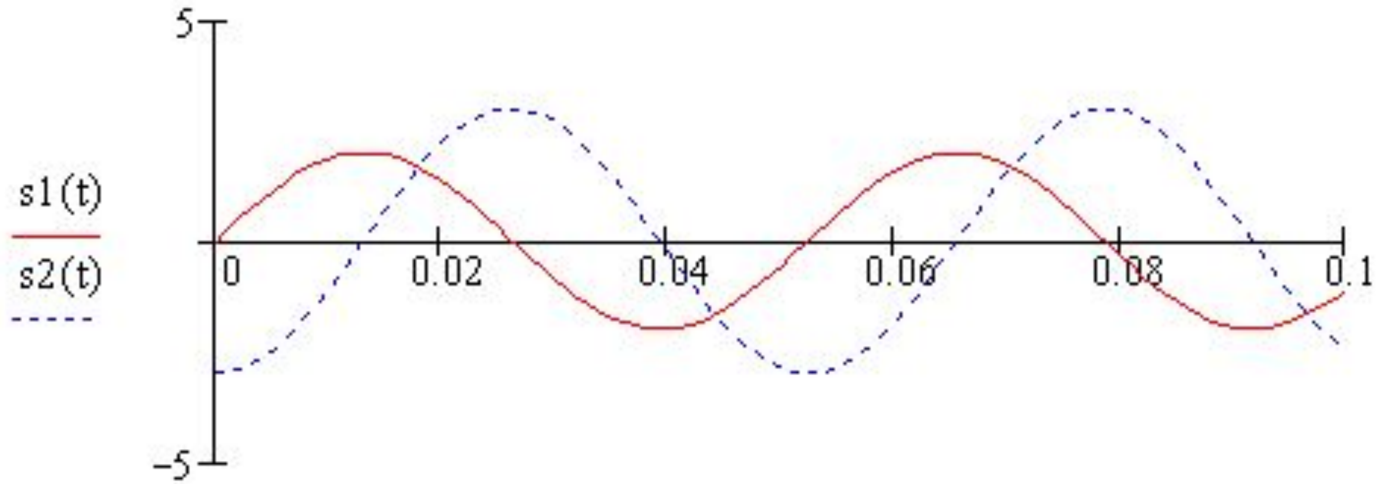
5.3. Сложение гармонических колебаний

1) Сложение параллельных колебаний одинаковой частоты.

Постановка задачи:

Пусть имеется два гармонических сигнала

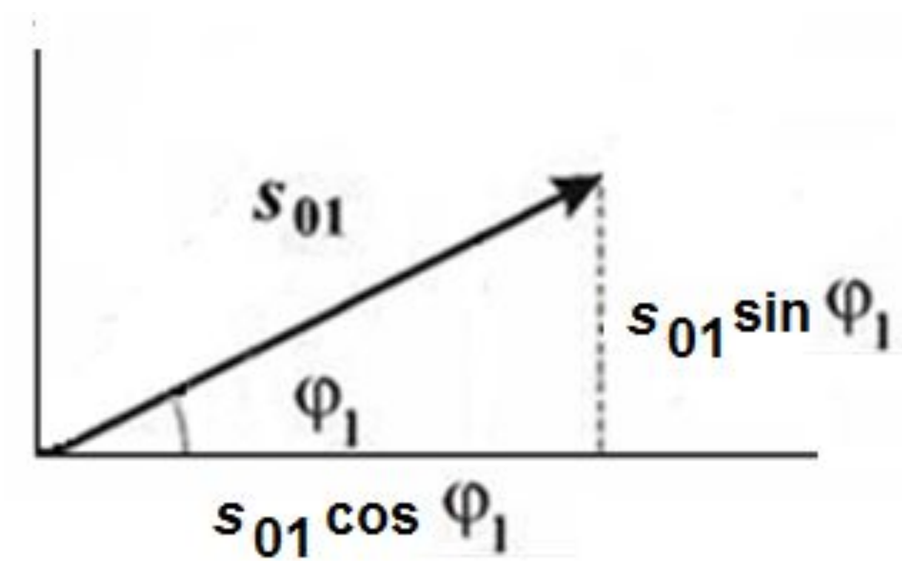
$$s_1(t) = s_{01}\sin(\omega_0 t + \varphi_1); \quad s_2(t) = s_{02}\sin(\omega_0 t + \varphi_2).$$

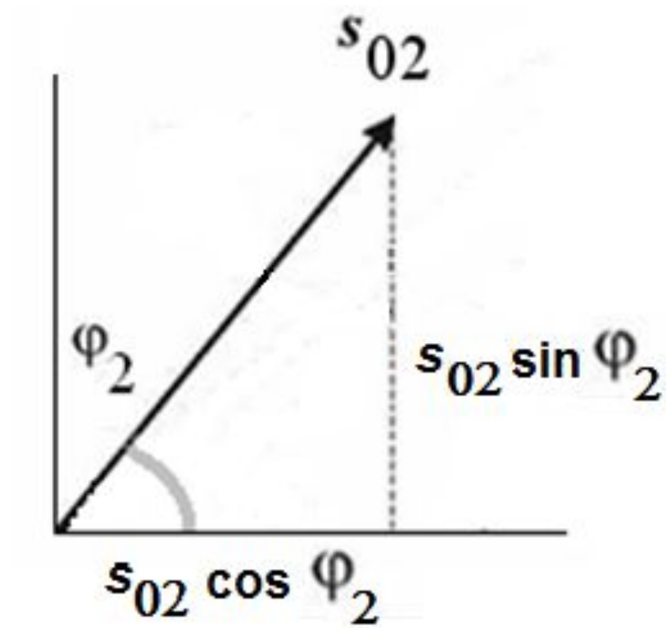


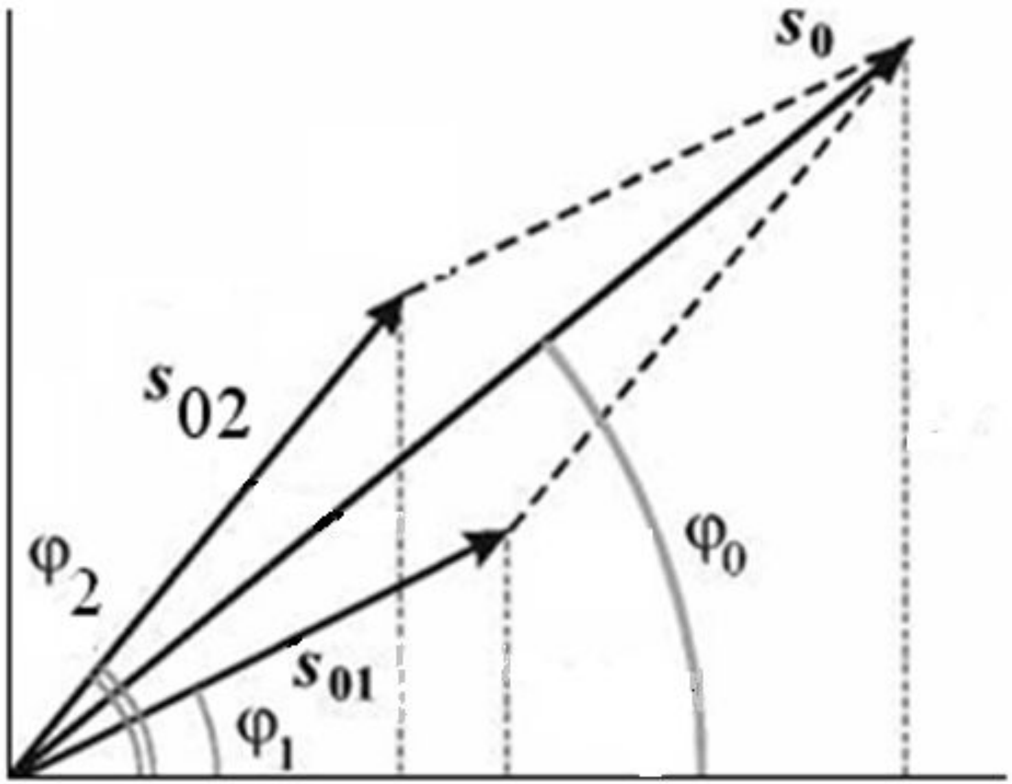
Необходимо сложить два колебания с одинаковыми частотами:

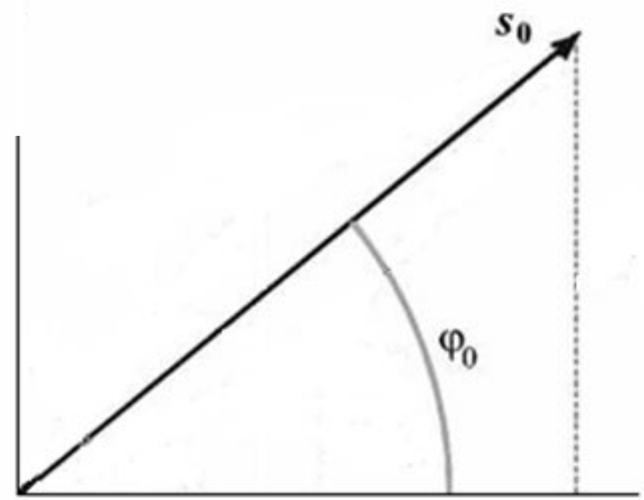
$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = s_{01}\sin(\omega_0 t + \varphi_1) + s_{02}\sin(\omega_0 t + \varphi_2)$$

$$\vec{s}_1 = s_{01}e^{j\varphi_1}; \qquad \vec{s}_2 = s_{02}e^{j\varphi_2}.$$





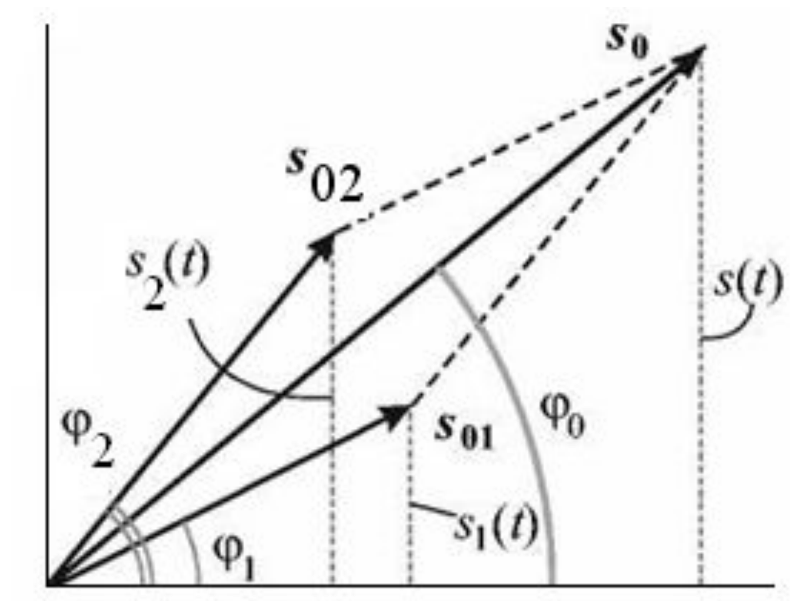

s0
s02
φ2
φ0
s01
φ1


s0
φ0

$$s_0 = \sqrt{(s_{01}\cos\varphi_1 + s_{02}\cos\varphi_2)^2 + (s_{01}\sin\varphi_1 + s_{02}\sin\varphi_2)^2}$$

$$\varphi_0 = arctg\,\frac{s_{01}\sin\varphi_1 + s_{02}\sin\varphi_2}{s_{01}\cos\varphi_1 + s_{02}\cos\varphi_2}$$

Суммарное колебание $s_0(t)$ опережает по фазе колебание $s_1(t)$ и отстает по фазе от колебания $s_2(t)$.



2) Сложение параллельных гармонических колебаний с близкими частотами.

Найдем сумму двух гармонических колебаний, частоты которых различны, но близки по величине:

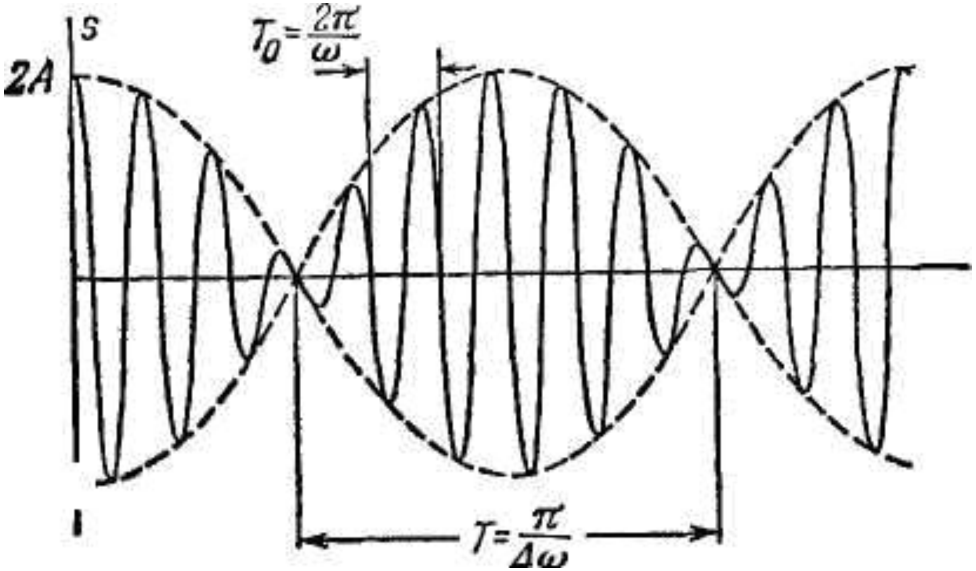
$$\omega_1 = \omega - \Delta\omega; \quad \omega_2 = \omega + \Delta\omega; \quad \Delta\omega \ll \omega.$$

$$s_1 = A\cos\omega_1 t; \quad s_2 = A\cos\omega_2 t;$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2Cos(\frac{\alpha-\beta}{2})\cdot\cos(\frac{\alpha+\beta}{2});$$

$$s = s_1 + s_2 = 2A\cos\frac{(\omega_2-\omega_1)}{2}t\cdot\cos\frac{(\omega_2+\omega_1)}{2}t =$$

$$= 2A\cos(\Delta\omega t)\cos(\omega t).$$



Суммарное колебание можно рассматривать как «почти синусоидальное» колебание с «условным периодом»:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega},$$

и с медленно меняющейся «амплитудой» $$B = \left|2A\cos(\Delta\omega t)\right|.$$

Периодические изменения амплитуды описанного выше вида называются *биениями.*

Период биений: $$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

Частота биений равна разности частот слагаемых колебаний:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = \nu_2 - \nu_1,$$

3) Сложение взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковыми частотами.

$$s_1 = s_{01}\sin(\omega_0 t + \varphi_1); \qquad s_2 = s_{02}\sin(\omega_0 t + \varphi_2).$$

Чтобы получить траекторию движения, исключим из выражений текущее время и преобразуем синус по формулам тригонометрии:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta;$$

$$\frac{s_1}{s_{01}} = \sin\omega_0 t \cdot \cos\varphi_1 + \cos\omega_0 t \cdot \sin\varphi_1;$$

$$\frac{s_2}{s_{02}} = \sin\omega_0 t \cdot \cos\varphi_2 + \cos\omega_0 t \cdot \sin\varphi_2.$$

Умножим первое уравнение на cos φ_2, а второе — на cos φ_1 и вычтем второе уравнение из первого

$$\frac{s_1}{s_{01}} \cdot \cos\varphi_2 - \frac{s_2}{s_{02}} \cdot \cos\varphi_1 = \cos\omega_0 t \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2).$$

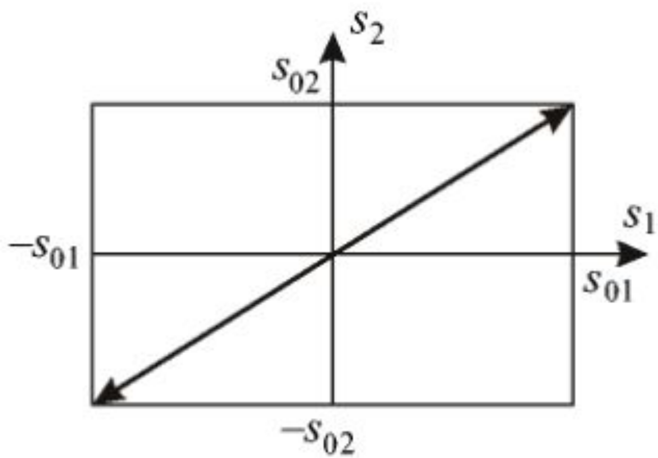
Теперь умножим первое уравнение на sin φ_2, а второе — на sin φ_1 , повторим вычитание, получим:

$$\frac{s_1}{s_{01}} \cdot \sin\varphi_2 - \frac{s_2}{s_{02}} \cdot \sin\varphi_1 = \sin\omega_0 t \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

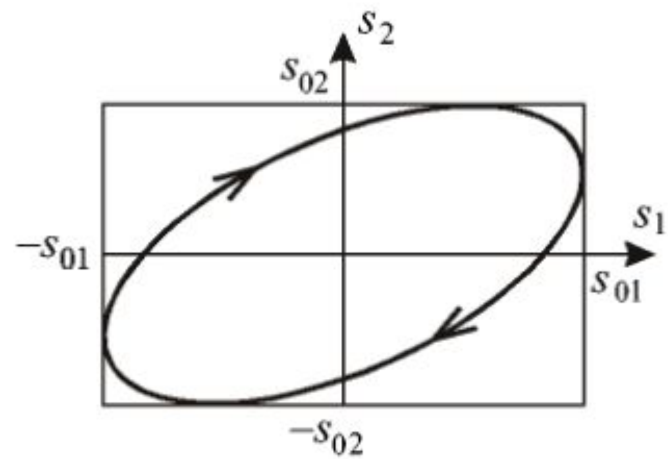
Возведем в квадрат каждое из равенств и сложим их.
В результате время будет исключено, а уравнение траектории движения будет уравнением эллипса:

$$\left[\frac{s_1}{s_{01}}\right]^2 + \left[\frac{s_2}{s_{02}}\right]^2 - 2\frac{s_1}{s_{01}}\frac{s_2}{s_{02}}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

В результате будут совершаться периодические движения по эллиптической траектории. Направление движения вдоль траектории и ориентация эллипса относительно осей s_1 и s_2 зависят от разности фаз $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

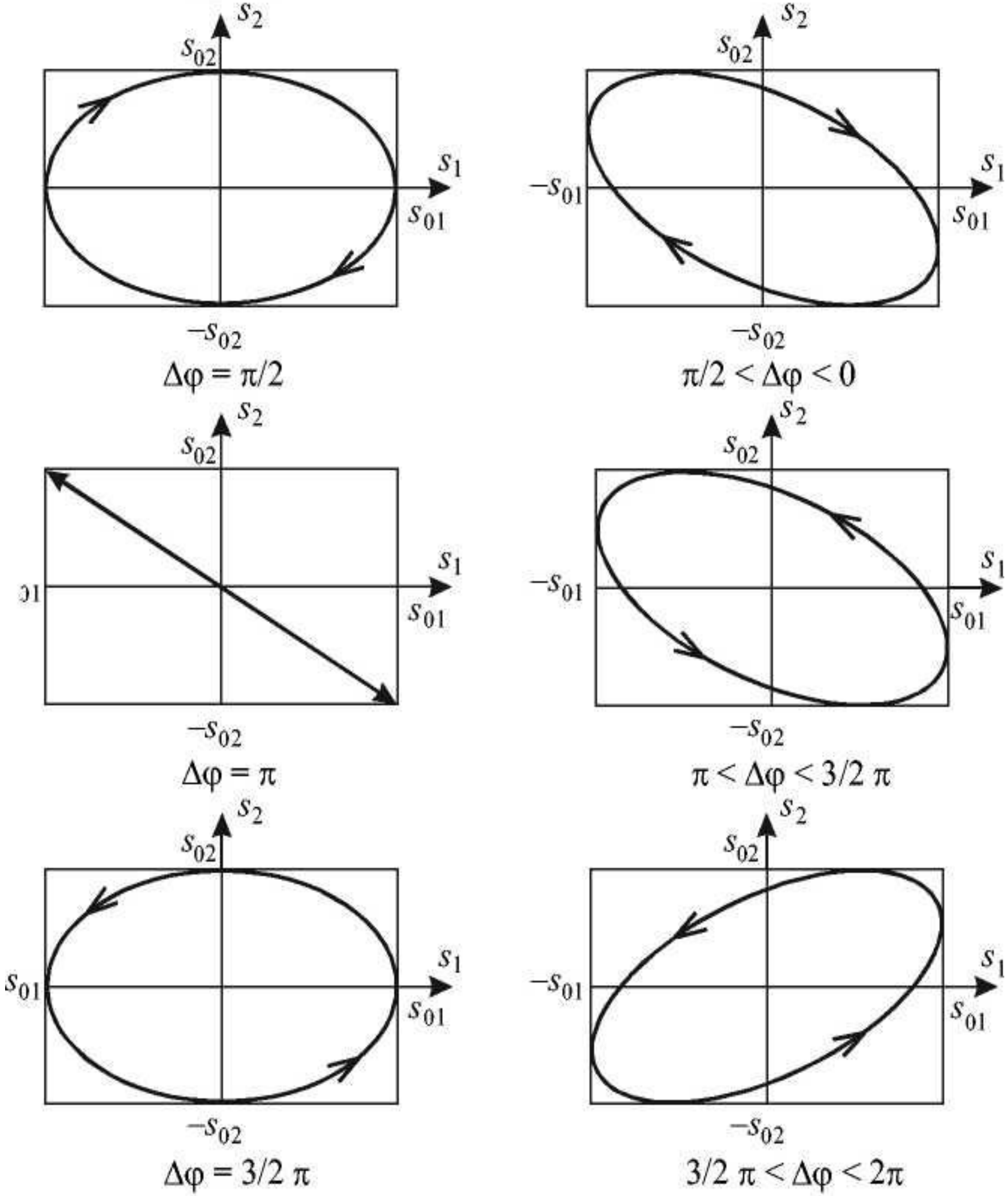


$\Delta\varphi = 0$



$0 < \Delta\varphi < \pi/2$

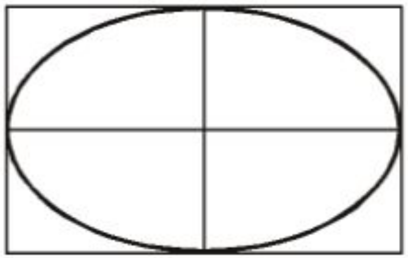
При разности фаз $0 < \Delta\varphi < \pi$ вектор движется по часовой стрелке, а при $\pi < \Delta\varphi < 2\pi$ -против часовой стрелки.


s_2
s_{02}
s_1
s_{01}
$-s_{02}$
$\Delta\varphi = \pi/2$
s_2
s_{02}
$-s_{01}$
s_1
s_{01}
$-s_{02}$
$\pi/2 < \Delta\varphi < 0$
s_2
s_{02}
s_1
s_{01}
$-s_{02}$
$\Delta\varphi = \pi$
s_2
s_{02}
$-s_{01}$
s_1
s_{01}
$-s_{02}$
$\pi < \Delta\varphi < 3/2\,\pi$
s_2
s_{02}
s_{01}
s_1
s_{01}
$-s_{02}$
$\Delta\varphi = 3/2\,\pi$
s_2
s_{02}
$-s_{01}$
s_1
s_{01}
$-s_{02}$
$3/2\,\pi < \Delta\varphi < 2\pi$

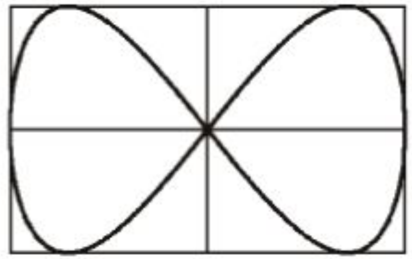
4) Сложение перпендикулярных колебаний с кратными частотами.

$m\omega_{02} = n\omega_{01}$, **где** m **и** n **- целые числа.**

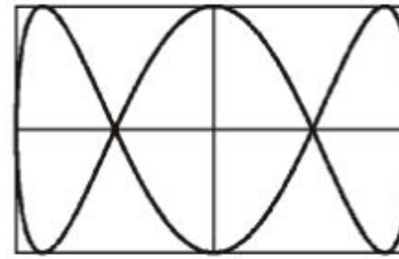
Траектории движения представляют собой замкнутые кривые, называемые фигурами Лиссажу.



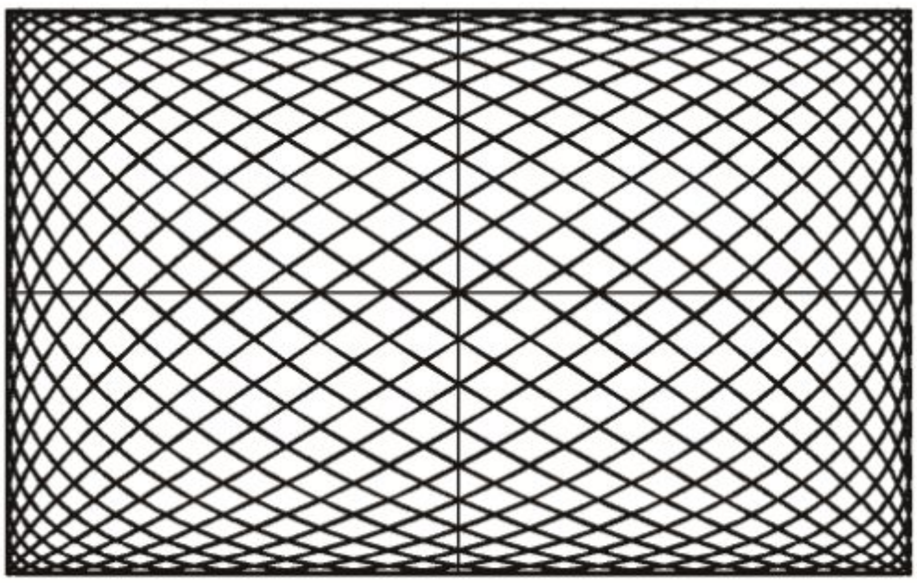
$m = 1, n = 1$



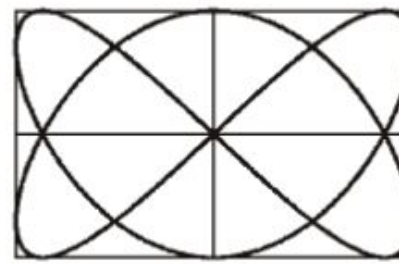
$m = 1, n = 2$



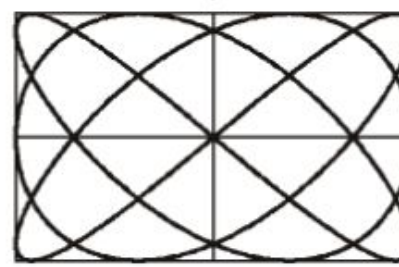
$m = 1, n = 3$



$m = 19, n = 20$



$m = 2, n = 3$



$m = 3, n = 4$