

Физика

Динамика (продолжение)

3.3. Соударения тел

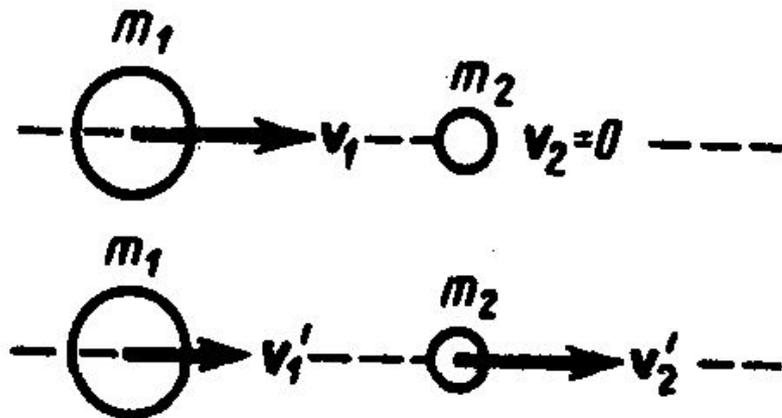
Определения:

Удар (или соударение)—это столкновение двух или более тел, при котором взаимодействие длится очень короткое время.

Центральный удар – такой, если тела до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры масс.

Абсолютно упругий удар — столкновение двух тел, в результате которого в обоих взаимодействующих телах не остается никаких деформаций и вся кинетическая энергия, которой обладали тела до удара, после удара снова превращается в кинетическую энергию.

Абсолютно неупругий удар — столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше как единое целое.



Для абсолютно упругого удара справедливы законы:

Закон сохранения импульса:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2';$$

Закон сохранения механической энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2};$$

Решая совместно два уравнения, получим выражения для скорости тел после удара:

$$V_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2};$$

$$V_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}.$$

Абсолютно неупругий удар

Закон сохранения импульса:

$$m_1V_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v;$$

$$v = \frac{m_1V_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}.$$

В частном случае, если массы шаров равны ($m_1 = m_2$), то

$$v = \frac{(V_1 + V_2)}{2}.$$

Если ударяемое тело было первоначально неподвижно ($v_2 = 0$), то

$$v = \frac{m_1V_1}{m_1 + m_2}.$$

Вследствие деформации происходит «потеря» кинетической энергии, перешедшей в тепловую или другие формы энергии.

$$\Delta T = \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right) - \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2}$$

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2.$$

Если ударяемое тело было первоначально неподвижно ($v_2=0$), то

$$\Delta T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{m_1 v_1^2}{2}.$$

4. Механика твердого тела

4.1. Момент инерции

Моментом инерции тела относительно оси называется произведение массы тела на квадраты расстояния до оси:

$$J_i = m_i r_i^2$$

Моментом инерции системы (тела) относительно данной оси называется физическая величина, равная сумме произведений масс материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси:

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу по объему тела:

$$J = \int_0^m r^2 dm$$

Теорема Штейнера:

«момент инерции тела J относительно произвольной оси равен моменту его инерции J_C относительно параллельной оси, проходящей через центр масс C тела, сложенному с произведением массы m тела на квадрат расстояния a между осями»

$$J = J_C + ma^2.$$

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиуса R	Ось симметрии	$J = mR^2$
Сплошной цилиндр или диск радиуса R	Ось симметрии	$J = \frac{1}{2}mR^2$
Стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$J = \frac{1}{12}ml^2$
Шар радиуса R	Ось проходит через центр шара	$J = \frac{2}{5}mR^2$

Пример.

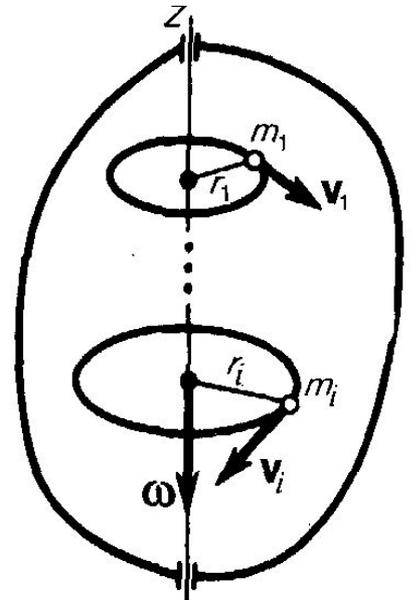
Момент инерции длинного стержня, у которого ось симметрии проходит через конец стержня:

$$J = J_c + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2$$

4.2. Кинетическая энергия вращения

Кинетическая энергия вращающегося тела равна сумме кинетических энергий его элементарных объемов:

$$T_{\text{вр}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \omega^2}{2} r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \frac{J_z \omega^2}{2}$$



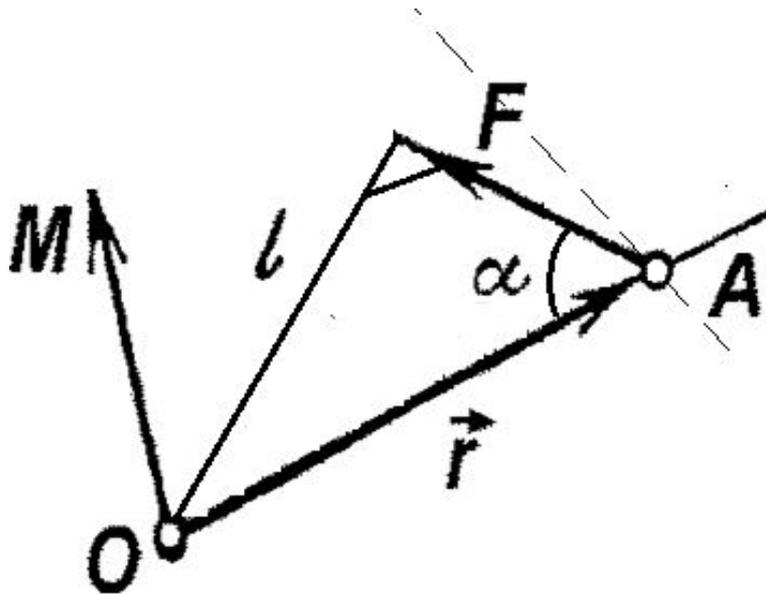
Момент инерции — мера инертности тела при вращательном движении.

В случае плоского движения тела, например цилиндра, скатывающегося с наклонной плоскости без скольжения, энергия движения складывается из энергии поступательного движения и энергии вращения:

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2}$$

4.3. Момент силы. Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела

Моментом силы F относительно неподвижной точки O называется физическая величина, определяемая векторным произведением радиуса-вектора r , проведенного из точки O в точку A приложения силы, на силу F .



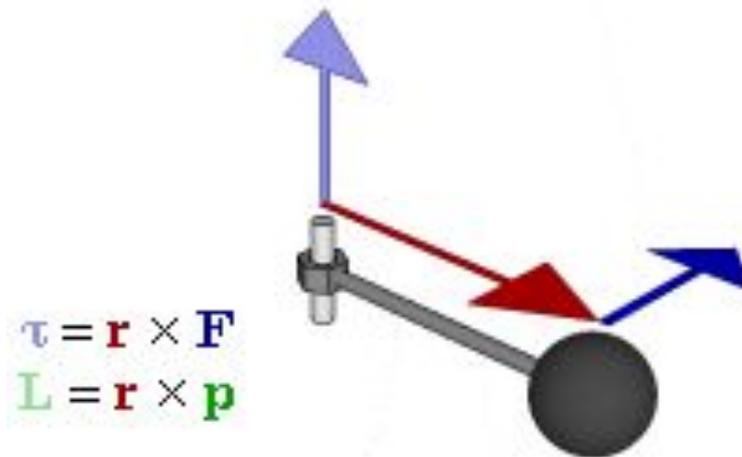
$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

Модуль момента силы:

$$M = Fr \sin \alpha = Fl.$$

Моментом силы F относительно неподвижной оси Z называется скалярная величина M_z , равную проекции на эту ось вектора M момента силы, определенного относительно произвольной точки O данной оси Z .

Значение момента не зависит от выбора точки O на оси Z .



Основной закон и основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела.

Работа при вращении тела:

$$dA = M_z d\varphi.$$

Работа при вращении тела идет на увеличение его кинетической энергии:

$$dK = d\left(\frac{J_z \omega^2}{2}\right) = J_z \omega d\omega$$

Отсюда:

$$M_z d\varphi = J_z \omega d\omega, \quad M_z \frac{d\varphi}{dt} = J_z \omega \frac{d\omega}{dt}$$

- уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси.

Если ось **Z** совпадает с главной осью инерции, проходящей через центр масс, то имеет место векторное равенство:

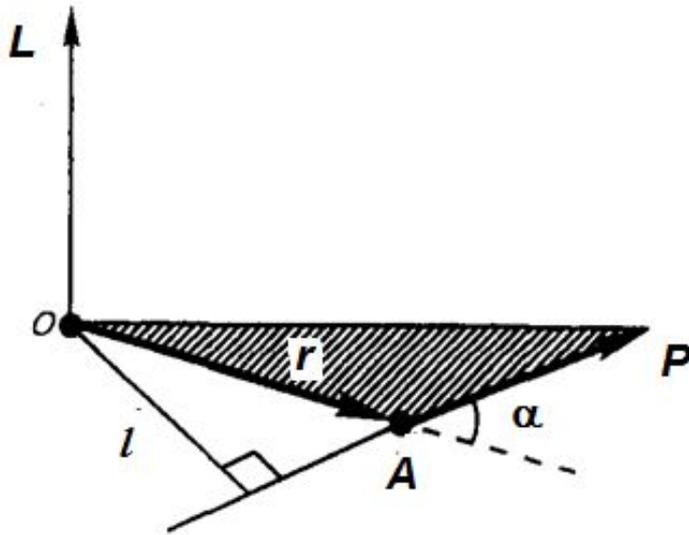
$$\vec{M} = J \vec{\varepsilon},$$

– основной закон динамики вращательного движения.

J — главный момент инерции тела.

Главный момент инерции – момент инерции относительно главной оси, проходящий через центр масс.

4.4. Момент импульса и закон сохранения момента импульса



Моментом импульса материальной точки **A** относительно неподвижной оси **O** называется физическая величина, определяемая векторным произведением:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m \vec{v}]$$

Моментом импульса относительно неподвижной оси **Z** называется скалярная величина L_z , равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определенного относительно произвольной точки **O** данной оси.

Скорость V_i и импульс $m_i V_i$ каждой отдельной точки **A** тела перпендикулярны этому радиусу, т. е. радиус является плечом вектора $m_i V_i$.

$$L_{iz} = m_i v_i r_i.$$

Момент импульса твердого тела относительно оси есть сумма моментов импульса отдельных частиц (точек):

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = J_z \omega, \quad L_z = J_z \omega.$$

Продифференцируем записанное уравнение по времени:

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon = M_z, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z.$$

Это еще одна форма уравнения динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси:

«производная момента импульса твердого тела относительно оси равна моменту сил относительно той же оси».

Закон сохранения момента импульса:

«момент импульса замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени».

$$L = \text{const}$$

Закон сохранения момента импульса — фундаментальный закон природы.

Он связан со свойством симметрии пространства — его изотропностью, т. е. с инвариантностью физических законов относительно выбора направления осей координат системы отсчета.

***Пространство называется изотропным*, если поворот системы отсчета на произвольный угол не приведет к изменению результатов измерений.**

Соотношение основных параметров

Поступательное движение		Вращательное движение	
Масса	m	Момент инерции	J
Скорость	$v = \frac{dr}{dt}$	Угловая скорость	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Ускорение	$a = \frac{dv}{dt}$	Угловое ускорение	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
Сила	F	Момент силы	M
Импульс	p	Момент импульса	L
Основное уравнение динамики	$F = ma$	Основное уравнение динамики	$M = J\varepsilon$

4.5. Деформация твердого тела

Деформация – это изменение формы и размеров твердых тел после прекращения действия внешних сил.

Деформация называется упругой, если после прекращения действия внешних сил тело принимает первоначальные размеры и форму.

Деформации, называются пластическими, если они сохраняются после прекращения действия внешних сил.

Деформации бывают: растяжения, сжатия или сдвига.

Основные параметры деформация твердого тела

Напряжение – сила, действующая на единицу площади поперечного сечения :

$$\sigma = \frac{F}{S}.$$

Относительная деформация – количественная мера, характеризующая степень деформации, испытываемой телом:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Относительное поперечное растяжение (сжатие):

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d}.$$

d — диаметр стержня.

Деформации ε и ε' всегда имеют разные знаки (при растяжении Δl положительно, а Δd отрицательно, при сжатии Δl отрицательно, а Δd положительно).

Взаимосвязь ε и ε' :
$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon.$$

μ — коэффициент Пуассона, зависит от свойств материала.



Симеон Пуассон — французский ученый (1781—1840), автор трудов по теории упругости.

4.6. Закон Гука

Для малых деформаций относительное удлинение ε и напряжение σ прямо пропорциональны друг другу:

$$\sigma = E \varepsilon.$$

Коэффициент пропорциональности E называется модулем Юнга. Модуль Юнга E определяется напряжением, вызывающим относительное удлинение, равное единице.



Относительное
удлинение:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{ES}.$$

Томас Юнг (1773-1829) — английский физик, механик, врач, астроном.

Закон Гука:

«удлинение стержня при упругой деформации пропорционально действующей на стержень силе»:

$$F = \frac{ES}{l} \Delta l = k \Delta l,$$

k —коэффициент упругости.

Роберт Гук (1635-1703) – английский естествоиспытатель, учёный-энциклопедист. Один из отцов экспериментальной физики.

