

# **Физика**

## **Электростатика**

## 10. Электростатика

### 10.1. Электрические заряды

Все тела в природе способны электризоваться, т. е. приобретать электрический заряд.

Электризация тел может осуществляться различными способами: трением, электростатической индукцией и т. п.

***Электрический заряд*** (количество электричества) — это физическая величина, определяющая способность тел быть источником электромагнитных полей и принимать участие в электромагнитном взаимодействии.

***Электрический заряд*** – это физическая величина, характеризующая свойство частиц или тел вступать в электромагнитные силовые взаимодействия.

Единица электрического заряда — кулон (Кл) — электрический заряд, проходящий через поперечное сечение проводника при силе тока 1 А за время 1 с.

## ***Закон сохранения заряда:***

«алгебраическая сумма электрических зарядов любой замкнутой системы остается неизменной».

Электрический заряд дискретен. Элементарный электрический заряд  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

Электрон и протон являются носителями элементарных зарядов.

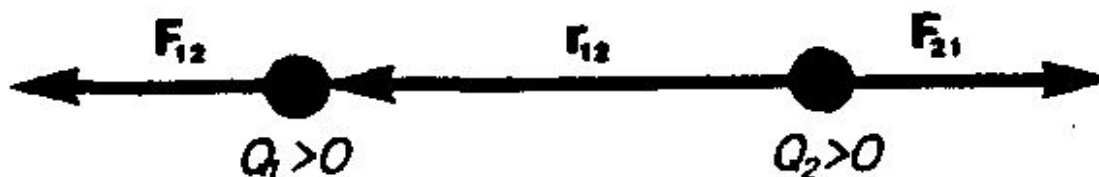
***Закон Кулона:*** сила взаимодействия  $F$  между двумя неподвижными точечными зарядами, находящимися в вакууме, пропорциональна зарядам  $Q_1$  и  $Q_2$  и обратно пропорциональна квадрату расстояния  $r$  между ними:

$$F = k \frac{|Q_1 \cdot Q_2|}{r^2}.$$

$k$  — коэффициент пропорциональности.

Точечным называется заряд, сосредоточенный на теле, линейные размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием до других заряженных тел.

Сила  $F$  направлена по прямой, соединяющей взаимодействующие заряды, т. е. является центральной, и соответствует притяжению ( $F < 0$ ) в случае разноименных зарядов и отталкиванию ( $F > 0$ ) в случае одноименных зарядов.



В векторной форме закон Кулона имеет вид:

$$\vec{F}_{12} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r}.$$

$F_{12}$  — сила, действующая на заряд  $Q_1$  со стороны заряда  $Q_2$ ,  
 $r_{12}$  — радиус-вектор, соединяющий заряд  $Q_2$  с зарядом  $Q_1$ ,  
 $r = |r_{12}|$ .

В системе СИ коэффициент пропорциональности равен:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$

С учетом этого закон Кулона запишется в окончательном виде:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2}.$$

Величина  $\epsilon_0$  называется электрической постоянной. Она относится к числу *фундаментальных физических постоянных* и равна:

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{М}}.$$

Фарад (Ф) — единица электрической емкости.

## 10.2. Электростатическое поле. Напряженность электростатического поля

В пространстве, окружающем неподвижные электрические заряды, существует силовое поле. Это поле называется электростатическим.

Силовая характеристика электростатического поля называется напряженностью и обозначается  $E$ .

***Напряженность электростатического поля*** в данной точке есть физическая величина, определяемая силой, действующей на пробный единичный положительный заряд, помещенный в эту точку поля.

$$E = \frac{F}{Q_0}.$$

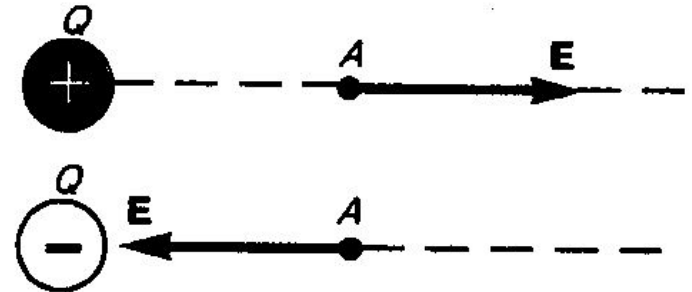
Напряженность поля точечного заряда в вакууме:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2},$$

или в векторной форме:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

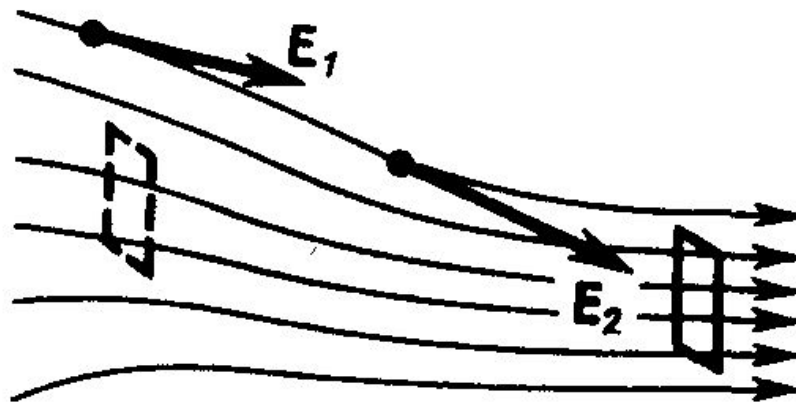
Направление вектора  $E$  совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд:



Единица напряженности электростатического поля (Н/Кл):

**1 Н/Кл** — напряженность такого поля, которое на точечный заряд **1 Кл** действует с силой в **1 Н**.

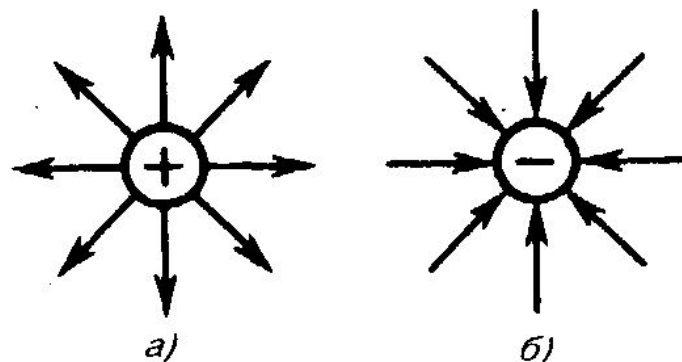
Электростатическое поле изображают графически с помощью линий напряженности. Это линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора  $E$ .



Число линий напряженности, пронизывающих единицу площади поверхности, перпендикулярную линиям напряженности, должно быть равно модулю вектора  $E$ .



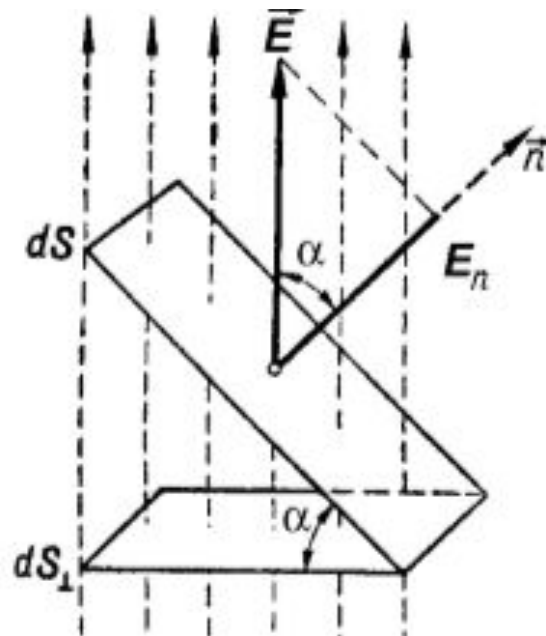
Если поле создается точечным зарядом, то линии напряженности — радиальные прямые.



Число линий напряженности, пронизывающих элементарную площадку  $dS$ , нормаль  $n$  которой образует угол  $\alpha$  с вектором  $E$ , равно:

$$E dS \cos \alpha = E_n dS,$$

$E_n$  — проекция вектора  $E$  на нормаль  $n$  к площадке  $dS$ .



Поток вектора напряженности через площадку  $dS$ :

$$d\Phi_E = E_n dS = E dS$$

Здесь  $dS = dSn$  — вектор, модуль которого равен  $dS$ , а направление совпадает с направлением нормали  $n$  к площадке

Для произвольной замкнутой поверхности  $S$  поток вектора  $E$  сквозь эту поверхность:

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S E dS,$$

интеграл берется по замкнутой поверхности  $S$ .

### 10.3. Принцип суперпозиции электростатических полей. Поле диполя

Принцип суперпозиции полей позволяет определить модуль и направление вектора напряженности  $E$  в каждой точке электростатического поля, создаваемого системой неподвижных зарядов  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ .

***Принцип суперпозиции (наложения) электростатических полей :***

«напряженность  $E$  результирующего поля, создаваемого системой зарядов, равна *геометрической* сумме напряженностей полей, создаваемых в данной точке каждым из зарядов в отдельности».

$$E = \sum_{i=1}^n E_i .$$

**Пример** расчета напряженности электростатического поля с помощью метода наложения: расчет напряженности поля диполя.

Электрический диполь — система двух равных по модулю разноименных точечных зарядов  $(+Q, -Q)$ , расстояние между которыми значительно меньше расстояния до рассматриваемых точек поля.



Вектор, направленный по оси диполя от отрицательного заряда к положительному и равный расстоянию между ними, называется плечом диполя.

Дипольный момент:  $\mathbf{p} = |Q| l$ .

Электрическим моментом диполя или дипольным моментом называется вектор, совпадающий по направлению с плечом диполя и равный произведению заряда  $|Q|$  на плечо  $l$ .



Напряженность поля на продолжении оси диполя в точке  $A$ .

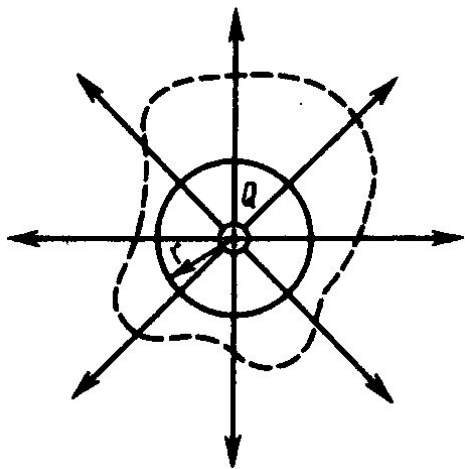
$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ql}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}.$$

Напряженность поля на перпендикуляре, восстановленном к оси из его середины, в точке  $B$  :

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\left(r'\right)^2 + \frac{l^2}{4}} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\left(r'\right)^2}.$$

## 10.4. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

Поток вектора напряженности сквозь сферическую поверхность радиуса  $r$ , охватывающую точечный заряд  $Q$ , находящийся в ее центре, равен:



$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}_n dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Для поверхности любой формы, если она замкнута и заключает в себя точечный заряд  $Q$ , поток вектора  $\mathbf{E}$  будет равен:

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Общий случай произвольной поверхности, окружающей  $n$  зарядов.

$$E = \sum_i E_i, \quad \Phi_E = \oint_S E \, dS = \sum_i \oint_S E_i \, dS.$$

Каждый из интегралов, стоящих под знаком суммы, равен  $Q_i/\epsilon_0$ , следовательно:

$$\oint_S E \, dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i \quad - \text{теорема Гаусса.}$$

**Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме:**

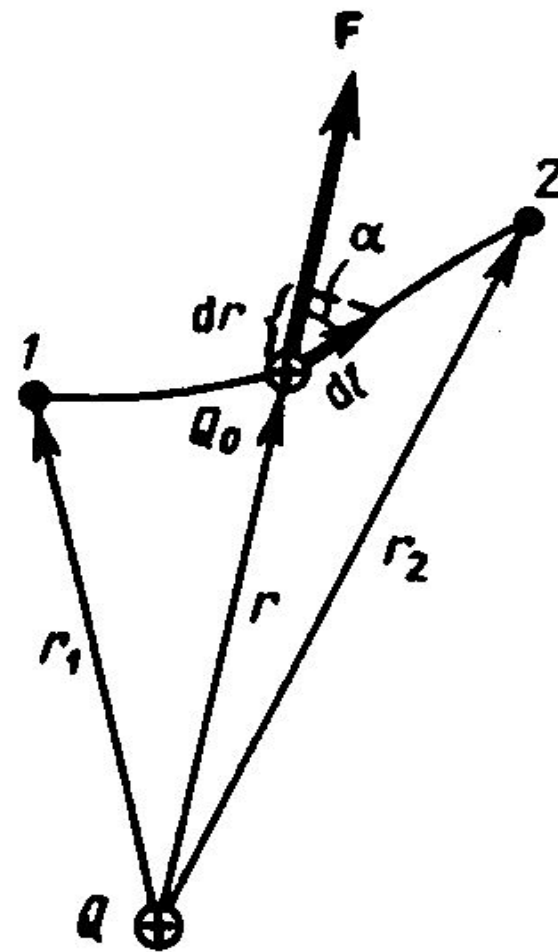
«поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на  $\epsilon_0$ ».

## 10.5. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля

Заряд  $Q_0$  перемещается в электростатическом поле точечного заряда  $Q$ .

При его перемещении из точки **1** в точку **2** совершается работа:

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dA = \frac{QQ_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{QQ_0}{r_1} - \frac{QQ_0}{r_2} \right).$$





Если траектория перемещения заряда замкнута, то работа по замкнутому пути  $L$  равна нулю, т.е.:

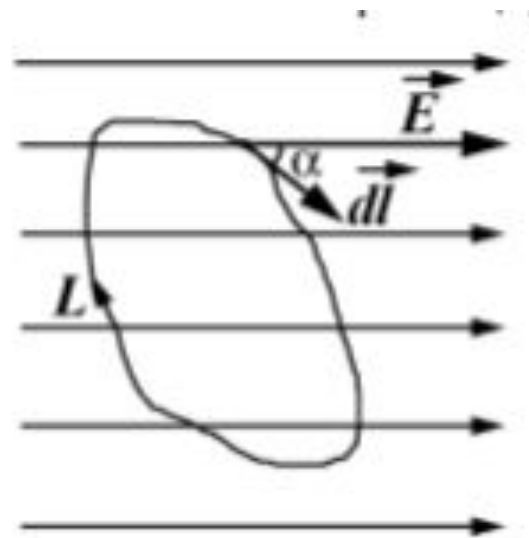
$$\oint_L dA = 0.$$

Элементарная работа сил поля на пути  $d\vec{l}$  равна:

$$E \cos \alpha d\vec{l} = E_{\parallel} d\vec{l},$$

тогда работа по замкнутому пути  $L$  равна:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L E_{\parallel} d\vec{l} = 0.$$



Интеграл

$$\oint_L \vec{E} \, dl = \oint_L E_{\parallel} \, dl = 0.$$

называется *циркуляцией вектора напряженности*.

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю.

Из обращения в нуль циркуляции вектора  $\vec{E}$  следует, что линии напряженности электростатического поля не могут быть замкнутыми.

Они начинаются и кончаются на зарядах или же уходят в бесконечность.

## 10.6. Потенциал электростатического поля

Потенциальная энергия заряда  $Q_0$ , находящегося в поле заряда  $Q$  на расстоянии  $r$  от него, равна:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ_0}{r}.$$

Работу сил электростатического поля можно представить как разность потенциальных энергий, которыми обладает точечный заряд  $Q_0$  в начальной и конечной точках поля заряда  $Q$ :

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ_0}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ_0}{r_2} = U_1 - U_2.$$

Если поле создается системой  $n$  точечных зарядов  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , то:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = Q_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i}.$$

Отношение потенциальной энергии точечного заряда к его величине называется потенциалом:

$$\varphi = \frac{U}{Q_0}.$$

**Потенциал  $\varphi$**  в какой-либо точке электростатического поля есть физическая величина, определяемая потенциальной энергией единичного положительного заряда, помещенного в эту точку.

Потенциал поля, создаваемого точечным зарядом  $Q$ , равен:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}.$$

Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда  $Q_0$  из точки **1** в точку **2** :

$$A_{12} = U_1 - U_2 = Q_0(\varphi_1 - \varphi_2),$$

т. е. разность потенциалов двух точек **1** и **2** определяется работой, совершаемой силами поля, при перемещении единичного положительного заряда из точки **1** в точку **2**.

Работа сил поля при перемещении заряда  $Q_0$  из точки **1** в точку **2** и разность потенциалов этих точек может быть записана через интеграл:

$$A_{12} = \int_1^2 Q_0 E dl, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E dl = \int_1^2 E_l dl.$$

Если перемещать заряд  $Q_0$  из произвольной точки за пределы поля в бесконечность, где, по условию, потенциал равен нулю, то:

$$\varphi = \frac{A_\infty}{Q_0}.$$

**Потенциал** — физическая величина, определяемая работой по перемещению единичного положительного заряда при удалении его из данной точки поля в бесконечность.

Единица потенциала — вольт (В):

1 В есть потенциал такой точки поля, в которой заряд в 1 Кл обладает потенциальной энергией 1 Дж (1 В = 1 Дж/Кл).

Если поле создается несколькими зарядами, то потенциал поля системы зарядов равен *алгебраической* сумме потенциалов полей всех этих зарядов:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i}.$$

## 10.7. Напряженность как градиент потенциала. Эквипотенциальные поверхности

Напряженность является *силовой характеристикой поля*, а потенциал — *энергетической характеристикой поля*.

Работа по перемещению *единичного* точечного положительного заряда из одной точки поля в другую вдоль оси  $x$ :

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Работа вдоль осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ :

$$\mathbf{E}_x = -\left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \mathbf{k} \right).$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  — единичные векторы координатных осей  $X, Y, Z$ .

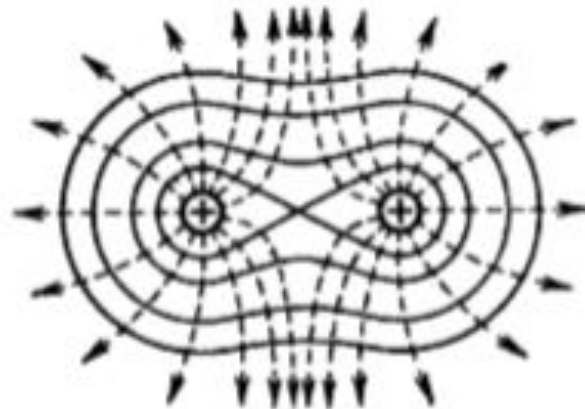
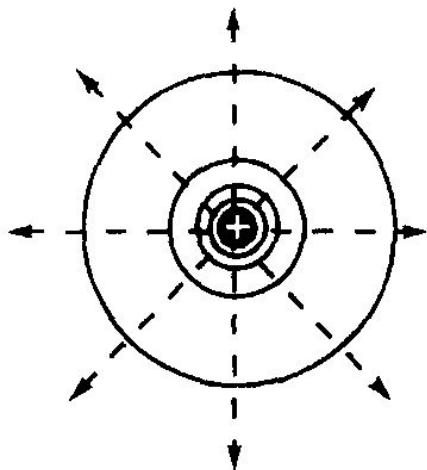
$$E = -\text{grad } \varphi = -\nabla\varphi$$

- напряженность поля  $E$  равна градиенту потенциала со знаком минус.

Знак минус определяется тем, что вектор напряженности  $E$  поля направлен в сторону убывания потенциала.

Для графического изображения потенциала электростатического поля пользуются эквипотенциальными поверхностями.

Эквипотенциальные поверхности это такие, во всех точках которых потенциал  $\Phi$  имеет одно и то же значение.



*Линии напряженности всегда нормальны к эквипотенциальным поверхностям.*



## Четыре примера вычисления разности потенциалов по напряженности поля

1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости.

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \quad \sigma \text{ — поверхностная плотность заряда.}$$

Разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях  $x_1$  и  $x_2$  от плоскости, равна:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (x_2 - x_1).$$

2. Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей.

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

$\sigma$  – поверхностная плотность заряда,  
 $d$  – расстояние между плоскостями.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \int_0^d \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d.$$

### 3. Поле равномерно заряженной сферической поверхности.

Напряженность поля сферической поверхности радиуса  $R$  с общим зарядом  $Q$  вне сферы ( $r > R$ ):

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}.$$

Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от центра сферы ( $r_1 > R$ ,  $r_2 > R$ ,  $r_2 > r_1$ ), равна:

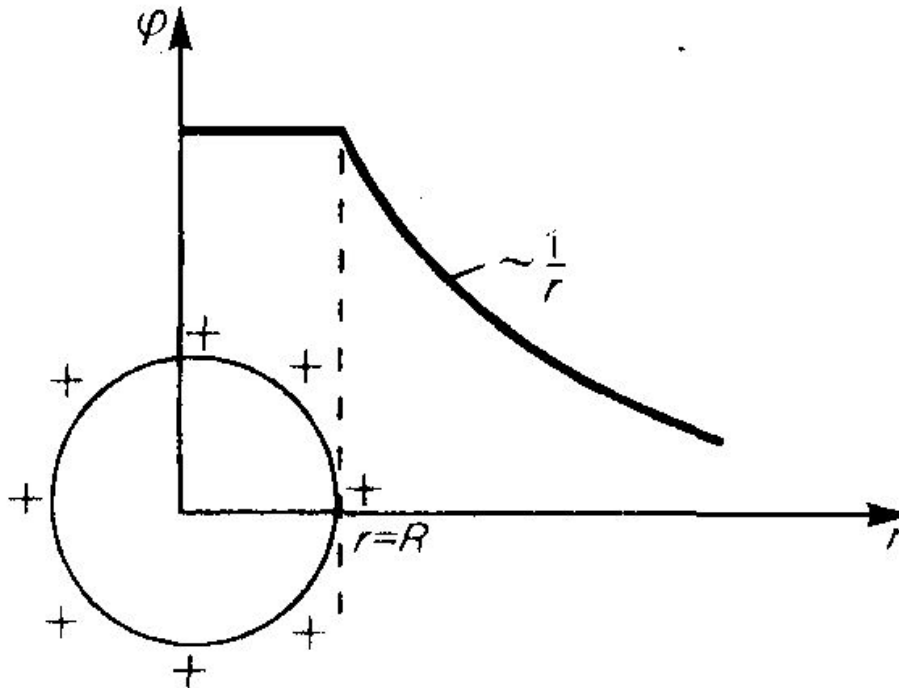
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Если принять  $r_1 = r$  и  $r_2 = \infty$ , то потенциал поля вне сферической поверхности:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}.$$

Внутри сферической поверхности потенциал всюду одинаков и равен:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}.$$



#### 4. Поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра.

Напряженность вне цилиндра:

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r}. \quad R - \text{радиус цилиндра,}$$

$\tau$  - линейная плотность заряда.

Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от оси заряженного цилиндра ( $r_1 > R$ ,  $r_2 > R$ ,  $r_2 > r_1$ ), равна:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$