Лекция 22

Тема: Принцип суперпозиций электростатических полей. Теорема Гаусса. Разность потенциалов

Рассмотрим метод определения модуля и направления вектора напряженности **E** в каждой точке электростатического поля, создаваемого системой неподвижных зарядов Q_1, Q_2, ..., Q_n.

Опыт показывает, что к кулоновским силам применим рассмотренный в механике принцип независимости действия сил , т. е. результирующая сила **F**, действующая со стороны поля на пробный заряд Q_0, равна векторной сумме сил F_i, приложенных к нему со стороны каждого из зарядов Q_i:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i. \quad (1)$$

Согласно ($\mathbf{E} = \mathbf{F}/Q_0$.), $\mathbf{F} = Q_0\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}_i = Q_0\mathbf{E}_i$, где **E**—напряженность результирующего поля, а $\mathbf{E}_i$ — напряженность поля, создаваемого зарядом Q_i. Подставляя последние выражения в (1), получаем

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i. \quad (2)$$

Формула (2) выражает **принцип суперпозиции (наложения) электростатических полей,** согласно которому напряженность **E** результирующего поля, создаваемого системой зарядов, равна *геометрической сумме* напряженностей полей, создаваемых в данной точке каждым из зарядов в отдельности.

Принцип суперпозиции позволяет рассчитать электростатические поля любой системы неподвижных зарядов, поскольку если заряды не точечные, то их можно всегда свести к совокупности точечных зарядов.

Принцип суперпозиции применим для расчета электростатического поля электрического диполя. **Электрический диполь** — система двух равных по модулю разноименных точечных зарядов $(+Q,-Q)$, расстояние l между которыми значительно меньше расстояния до рассматриваемых точек поля. Вектор, направленный по оси диполя (прямой, проходящей через оба заряда) от отрицательного заряда к положительному и равный расстоянию между ними, называется **плечом диполя 1.** Вектор

$$\mathbf{p} = |Q|\,\mathbf{l}, \qquad (3)$$

совпадающий по направлению с плечом диполя и равный произведению заряда $|Q|$ на плечо $\mathbf{l}$, называется **электрическим моментом диполя** или **дипольным моментом** (рис. 1).

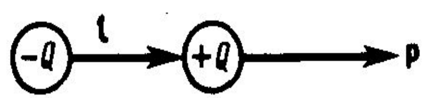

Рисунок 1

Согласно принципу суперпозиции (2), напряженность E поля диполя в произвольной точке

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{+} + \mathbf{E}_{-},$$

где E_+ и E_- — напряженности полей, создаваемых соответственно положительным и отрицательным зарядами. Воспользовавшись этой формулой, рассчитаем напряженность поля в произвольной точке на продолжении оси диполя и на перпендикуляре к середине его оси.

1. Напряженность поля на продолжении оси диполя в точке *A* (рис. 2). Как видно из рисунка, напряженность поля диполя в точке *A* направлена по оси диполя и по модулю равна

$$E_A = E_+ - E_- .$$

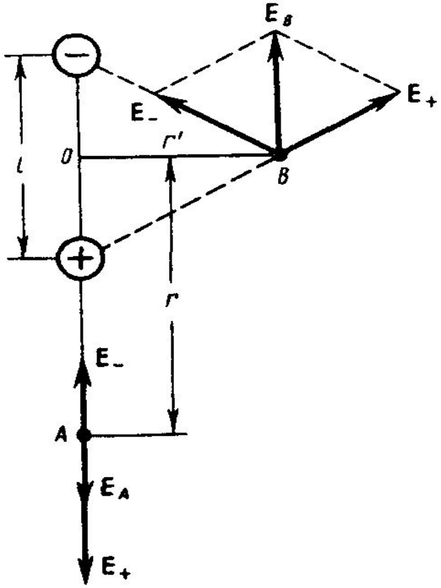

Рисунок 2

Обозначив расстояние от точки *A* до середины оси диполя через *r*, на основании формулы ($\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$ или $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$.) для вакуума можно записать

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{(r-l/2)^2} - \frac{Q}{(r+l/2)^2}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{(r+l/2)^2-(r-l/2)^2}{(r-l/2)^2\,(r+l/2)^2}.$$

Согласно определению диполя, $l/2 << r$, поэтому

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2Ql}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2p}{r^3}.$$

2. Напряженность поля на перпендикуляре, восставленном к оси из его середины, в точке *B* (рис. 2). Точка *B* равноудалена от зарядов, поэтому

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{(r')^2 + l^2/4} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{(r')^2}, \qquad (4)$$

где r' — расстояние от точки B до середины плеча диполя. Из подобия равнобедренных треугольников, опирающихся на плечо диполя и вектор $\mathbf{E}_B$, получим

$$\frac{E_B}{E_+} = \frac{l}{\sqrt{(r')^2 + (l/2)^2}} \approx \frac{l}{r'},$$

откуда

$$E_B = E_+ l/r'. \quad (5)$$

Подставив в выражение (5) значение (4), получим

$$E_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Ql}{(r')^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p}{(r')^3}.$$

Вектор E_B имеет направление, противоположное вектору электрического момента диполя (вектор $\mathbf{p}$ направлен от отрицательного заряда к положительному).

Вычисление напряженности поля системы электрических зарядов с помощью принципа суперпозиции электростатических полей можно значительно упростить, используя выведенную немецким ученым К. Гауссом (1777—1855) теорему, определяющую поток вектора напряженности электрического поля сквозь произвольную замкнутую поверхность.

В соответствии с формулой ($\Phi_E = \oint_S E_n \, dS = \oint_S \mathbf{E} \, d\mathbf{S}$,) поток вектора напряженности сквозь сферическую поверхность радиуса r, охватывающую точечный заряд Q, находящийся в ее центре (рис. 3), равен

$$\Phi_E = \oint\limits_S E_n \, dS = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Этот результат справедлив для замкнутой поверхности любой формы. Действительно, если окружить сферу (рис. 3) произвольной замкнутой поверхностью, то каждая линия напряженности, пронизывающая сферу, пройдет и сквозь эту поверхность.

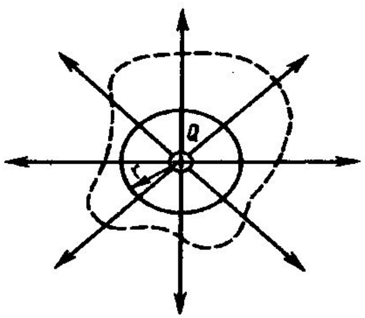

Рисунок 3

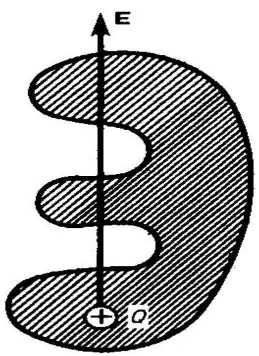

Рисунок 4

Если замкнутая поверхность произвольной формы охватывает заряд (рис. 4), то при пересечении любой выбранной линии напряженности с поверхностью она то входит в нее, то выходит из нее. Нечетное число пересечений при вычислении потока в конечном счете сводится к одному пересечению, так как поток считается положительным, если линии напряженности выходят из поверхности, и отрицательным для линий, входящих в поверхность. Если замкнутая поверхность не охватывает заряда, то поток сквозь нее равен нулю, так как число линий напряженности, входящих в поверхность, равно числу линий напряженности, выходящих из нее.

Таким образом, для поверхности любой формы, если она замкнута и заключает в себя точечный заряд Q, поток вектора **E** будет равен Q/ε_0, т. е.

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}\,d\mathbf{S} = \oint_S E_n\,dS = Q/\varepsilon_0. \quad (6)$$

Знак потока совпадает со знаком заряда Q.

Рассмотрим общий случай произвольной поверхности, окружающей n зарядов. В соответствии с принципом суперпозиции напряженность **E** поля, создаваемого всеми зарядами, равна сумме напряженностей E_i полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности: $\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i$. Поэтому

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}\,d\mathbf{S} = \oint_S \left(\sum_i \mathbf{E}_i\right) d\mathbf{S} = \sum_i \oint_S \mathbf{E}_i\,d\mathbf{S}.$$

Согласно (6), каждый из интегралов, стоящий под знаком суммы, равен Q_i/ε_0. Следовательно,

$$\oint_S \mathbf{E}\,d\mathbf{S} = \oint_S E_n\,dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} Q_i. \quad (7)$$

Формула (7) выражает **теорему Гаусса для электростатического поля в вакууме:** поток вектора напряженности электростатического поля *в вакууме* сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ε_0. Эта теорема выведена математически для векторного поля любой природы русским математиком М. В. Остроградским (1801—1862), а затем независимо от него применительно к электростатическому полю — К. Гауссом.

В общем случае электрические заряды могут быть «размазаны» с некоторой объемной плотностью $\rho = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}V$, различной в разных местах пространства. Тогда суммарный заряд, заключенный внутри замкнутой поверхности S, охватывающей некоторый объем V,

$$\sum_i Q_i = \int_V \rho \, \mathrm{d}V. \quad (8)$$

Используя формулу (8), теорему Гаусса (7) можно записать так:

$$\oint_S \mathbf{E} \, \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_S E_n \, \mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, \mathrm{d}V.$$

1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости определяется формулой ($E = \sigma/(2\varepsilon_0).$): $E = \sigma/(2\varepsilon_0)$, где σ — поверхностная плотность заряда. Разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях x_1 и x_2 от плоскости, равна (используем формулу ($E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x},$)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E \, \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \, \mathrm{d}x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (x_2 - x_1).$$

2. Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей определяется формулой ($E = \sigma/\varepsilon_0.$); $E = \sigma/\varepsilon_0$, где σ — поверхностная плотность заряда. Разность потенциалов между плоскостями, расстояние между которыми равно d (см. формулу ($E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$)), равна

$$\varphi_1-\varphi_2=\int\limits_0^d E\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\mathrm{d}x=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,d. \qquad (9)$$

3. Поле равномерно заряженной сферической поверхности радиуса R с общим зарядом Q *вне* сферы ($r > R$) вычисляется по ($E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}.$):

Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от центра сферы ($r_1 > R$, $r_2 > R$, $r_2 > r_1$), равна

$$\varphi_1-\varphi_2=\int\limits_{r_1}^{r_2} E\,\mathrm{d}r=\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\mathrm{d}r=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right). \qquad (10)$$

Если принять $r_1=r$ и $r_2=\infty$, то потенциал поля вне сферической поверхности, согласно формуле (10), задается выражением

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

(ср. с формулой ($\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}.$). Внутри сферической поверхности потенциал всюду одинаков и равен

$$\varphi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

График зависимости ϕ от r приведен на рис. 5.

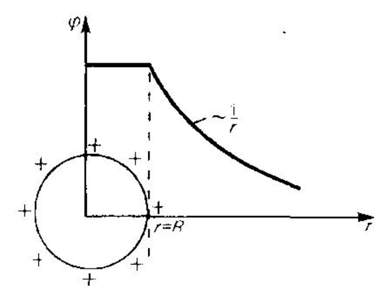

Рисунок 5

4. Поле объемно заряженного шара радиуса R с общим зарядом Q *вне* шара ($r>R$) вычисляется по формуле ($E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\quad(r\geq R).$), поэтому разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от центра шара ($r_1 > R$, $r_2 > R$, $r_2 > r_1$), определяется формулой (10). В любой точке, лежащей *внутри* шара на расстоянии r' от его центра ($r'<R$), напряженность определяется выражением ($E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}r'.$):

Следовательно, разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях от центра шара (r_1' и r_2'), равна

$$\varphi_1-\varphi_2=\int_{r_1'}^{r_2'}E\,\mathrm{d}r=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0R^3}\left(r_2'^{\,2}-r_1'^{\,2}\right).$$

5. Поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра радиуса R, заряженного с линейной плотностью τ, *вне* цилиндра ($r>R$) определяется формулой ($E=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r}.$):

Следовательно, разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 м r_2 от оси заряженного цилиндра ($r_1>R$, $r_2>R$, $r_2>r_1$), равна

$$\varphi_1-\varphi_2=\int_{r_1}^{r_2}E\,\mathrm{d}r=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}.\quad 11)$$