Физика

Колебания и волны

(продолжение)

5.5. Свободные колебания

Колебания называются свободными **(или собственными), если они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при отсутствии внешних воздействий.**

При наличии сил трения или сопротивления среды свободные механические колебания становятся затухающими.

Затухание колебаний объясняется возникновением силы трения (сопротивления).

Величина силы трения пропорциональна скорости движения тела:

$$F_{тр} = -k_{\text{тр}} \cdot v = -k_{\text{тр}} \cdot \frac{dx}{dt};$$

$k_{\text{тр}}$ **– коэффициент трения.**

Согласно закону Ньютона сумма сил, которая заставляет колебаться тело, определяется произведением массы тела на ускорение:

$$F = ma = -k_{\text{упр}}x - k_{\text{тр}}\frac{dx}{dt}.$$

На основании записанного равенства можно записать уравнение динамики свободных колебаний тела:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k_{\text{упр}}x - k_{\text{тр}}\frac{dx}{dt}; \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_{\text{тр}}}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k_{\text{упр}}}{m}x = 0.$$

Дифференциальное уравнение свободно колеблющегося тела, которое называют уравнением осциллятора:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

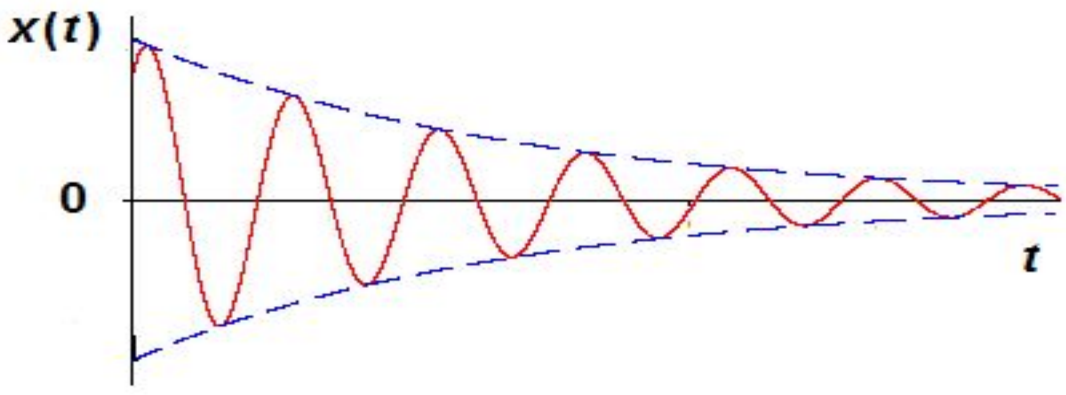
$$\beta = \frac{k_{\text{тр}}}{2m}$$ - коэффициент затухания,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{\text{упр}}}{m}}$$ - собственная частота.

Решение дифференциального уравнения можно записать в виде гармонического колебания, амплитуда которого затухает по закону экспоненты:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha).$$

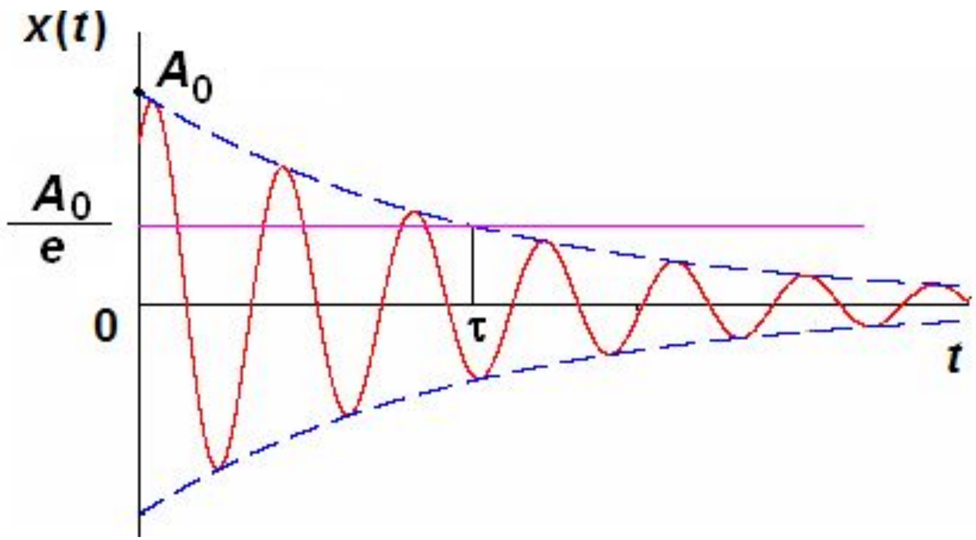
График затухающих колебаний:



Параметры затухающих колебаний

1. Частота затухающих колебаний: $$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

2. Время релаксации (постоянная затухания):



$$\frac{A_0}{e} = \frac{A_0}{2{,}7}$$

Время релаксации – это интервал времени, в течении которого амплитуда колебаний уменьшается в *e* ≈ 2,7 раз.

3. Амплитуда колебаний:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t}$$

4. Декремент затухания:

$$\Delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}$$

5. Логарифмический декремент затухания:

$$\ln\Delta = \beta T$$

6. Добротность:

$$\boxed{Q \approx \frac{\pi}{\ln\Delta}}$$

Добротность определяет характер затухания колебаний.

Чем медленнее происходит затухание свободных колебаний, тем выше добротность *Q* колебательной системы.

Добротность характеризует расход энергии колебательной системы на интервале времени, равном одному периоду колебаний.

Добротность равна отношению энергии, запасенной в колебательной системе, к потере энергии за один период колебаний.

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}.$$

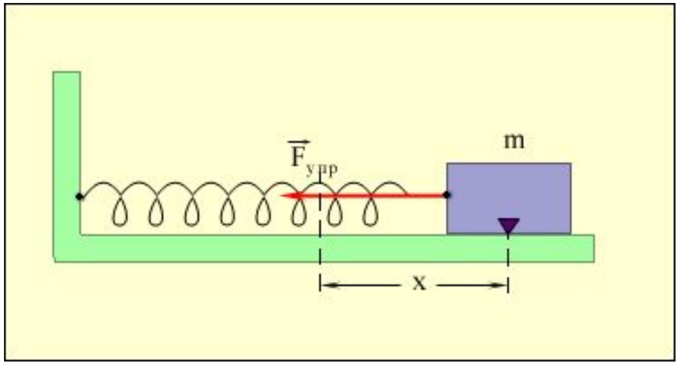
Начальные условия колебаний

$$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha).$$

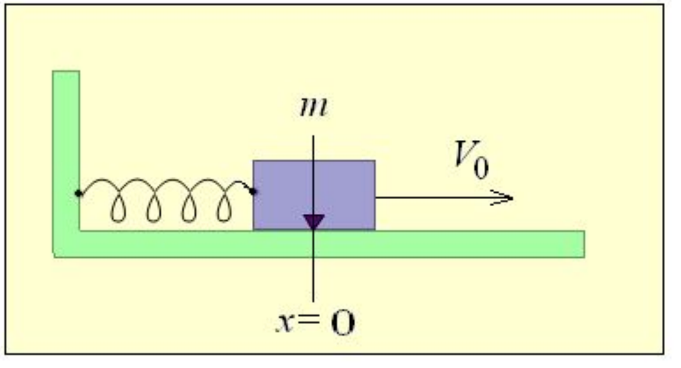
Амплитуда и начальная фаза колебаний определяются из начальных условий.

Два случая начальных условий:

1. $x_0 = A, \quad \alpha = 0\,.$



2. $x_0 = 0, \quad v = v_0\,.$



Если же грузу, находившемуся в положении равновесия, с помощью резкого толчка была сообщена начальная скорость ± V_0, то

Из выражения $$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$$

$$\textit{при}\ \ t = 0 \qquad 0 = A\cos(\alpha); \qquad \alpha = \mp\frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) = A\omega\cos\left(\omega t \mp \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right).$$

При $t = 0$ $$v_0 = A\omega\cos\left(\mp\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right).$$

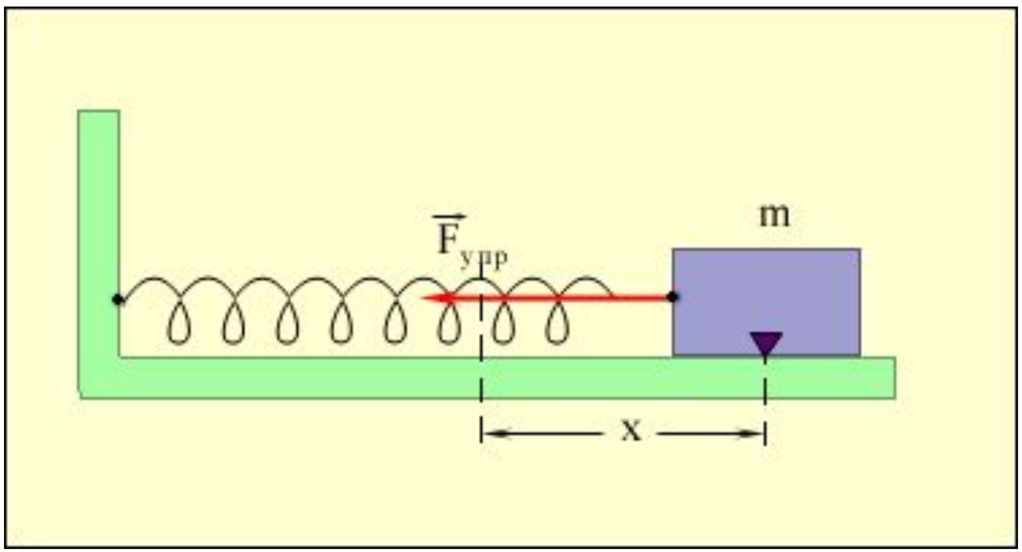
Отсюда: $$A = \frac{v_0}{\omega}.$$

Вывод: амплитуда A свободных колебаний и его начальная фаза α определяются начальными условиями.

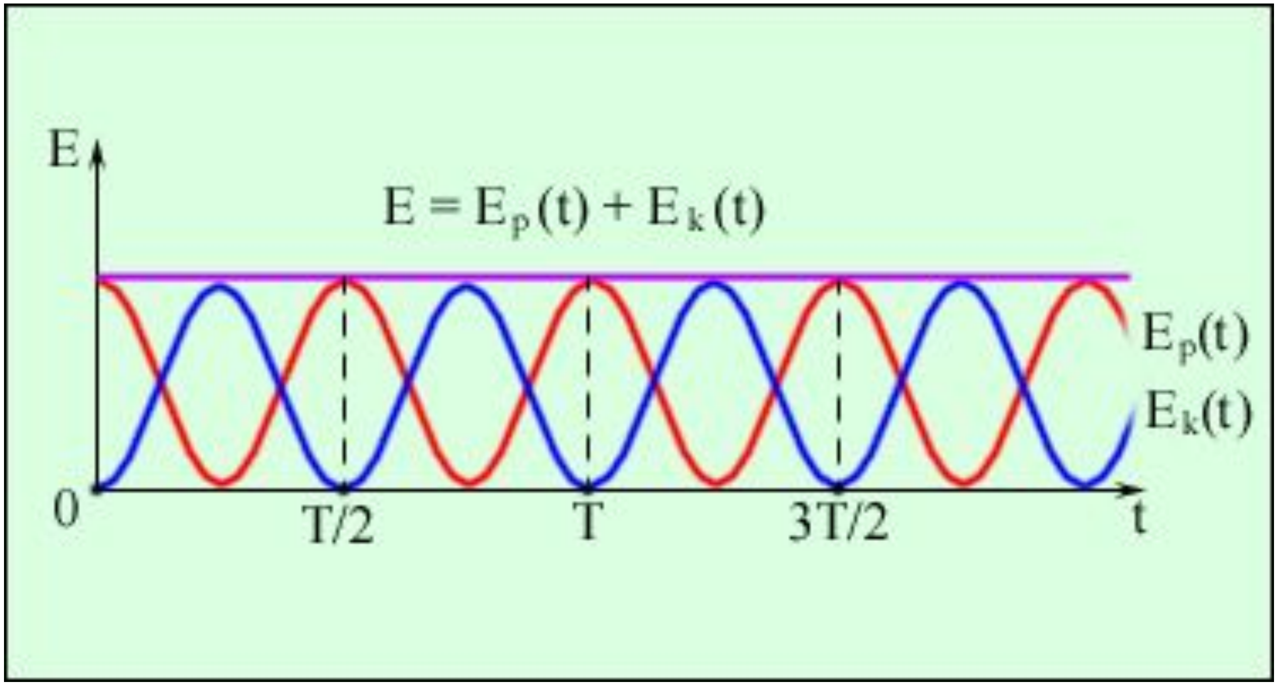
Превращения энергии при свободных механических колебаниях

При гармонических колебаниях происходит периодическое превращение кинетической энергии в потенциальную и наоборот.

$$E = E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$



$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{k(A\cos(\omega t))^2}{2} = \frac{kA^2}{4}(1+\cos(2\omega t))$$

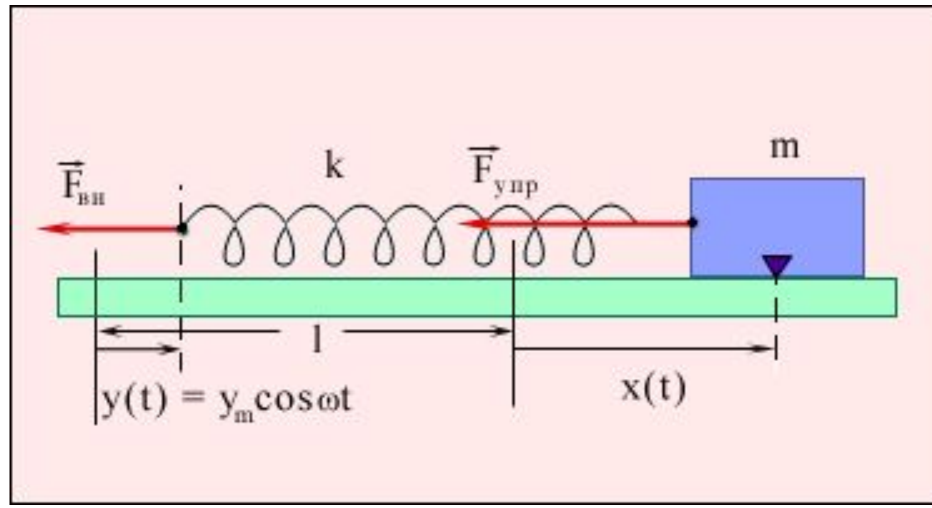


5.6. Вынужденные колебания

Вынужденными колебаниями называются такие, которые совершаются под воздействием внешней периодической силы.

Внешняя сила $F(t)$

приложена к свободному концу пружины.



Величина силы изменяется по гармоническому закону. Свободный конец пружины перемещается в соответствии с выражением:

$$y(t) = y_m \cos(\omega t)$$

Общее перемещение груза:

$$l(t) = x(t) - y(t) = x(t) - y_m \cos(\omega t)$$

Второй закон Ньютона для такой системы: $ma = \sum F.$

Уравнение динамики колебательной системы:

$$ma = -k_{тр}\frac{dx}{dt} - k_{упр}\cdot l = -k_{тр}\frac{dx}{dt} - k_{упр}(x + y_m \cos(\omega t));$$

$k_{тр}\dfrac{dx}{dt}$ **- сила трения,** $k_{упр}x$ **- сила упругости,**

$k_{упр}y_m \cos(\omega t)$ **- вынуждающая сила.**

В окончательной форме уравнение *вынужденных колебаний* можно записать в виде:

$$\ddot{x} + 2\beta \cdot \dot{x} + \omega_0{}^2 x = \frac{F_m}{m}\cos(\omega t)$$

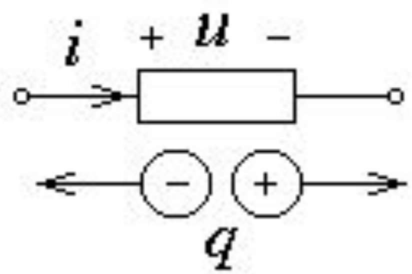
$$\beta = \frac{k_{тр}}{2m}$$ – коэффициент затухания,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{упр}}{m}}$$ - собственная круговая частота свободных колебаний .

5.7. Электромагнитные колебания в электрическом колебательном контуре.

Электрический ток.

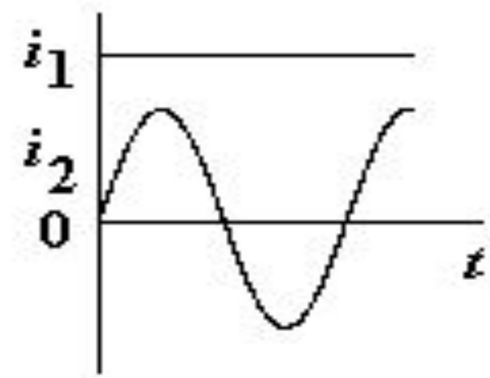
Электрическим током называется упорядоченное движение электрических зарядов.



$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

[К/с=А]

Виды электрического тока

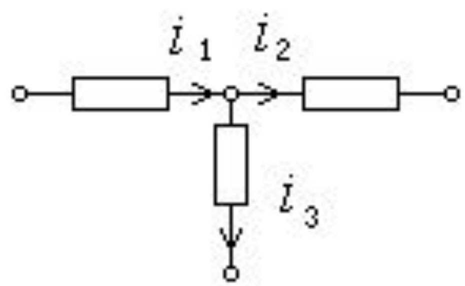


Закон токов Кирхгофа:

Алгебраическая сумма токов ветвей цепи, подключенных к узлу цепи равна нулю

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0$$

. **Узлом цепи называется такая точка в цепи, к которой подключены две или более ветвей**

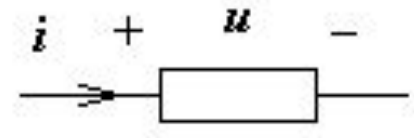


$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

Электрическое напряжение.

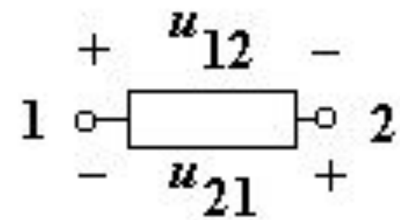
Электрическим напряжением называется энергия, которую необходимо затратить на перемещение единицы заряда из одной точки в другую.

$$u = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta q} = \frac{dw}{dq}.$$



Размерность напряжения:

[Дж/Кл=В]

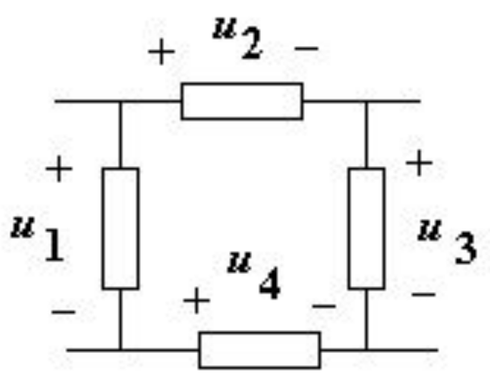


Закон напряжений Кирхгофа

Алгебраическая сумма напряжений ветвей цепи, входящих в контур, равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = 0.$$

Контуром называется путь по ветвям цепи, который начинается и заканчивается в одном и том же узле.



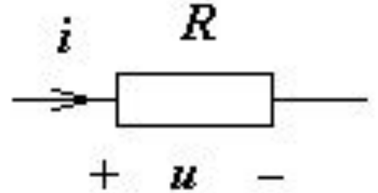
$$-u_1 + u_2 + u_3 - u_4 = 0.$$

Приемники электрической энергии.

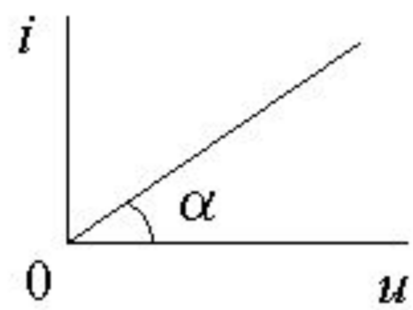
Приемниками называются устройства, потребляющие энергию или преобразующие электрическую энергию в другие виды энергии.

Резистор.

Резистором называется такой элемент цепи, в котором происходит необратимый процесс преобразования электрической энергии в тепловую энергию.



Вольт-амперная зависимость:



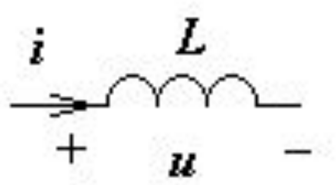
$$i = \frac{u}{R};$$

$$R = \frac{u}{i}$$

[А/В=См]

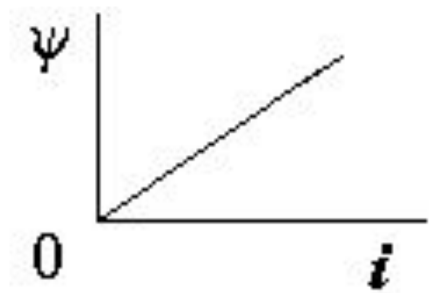
Катушка индуктивности.

Катушкой индуктивности называется такой пассивный элемент цепи, в котором происходит процесс преобразования энергии электрического тока в энергию магнитного поля и наоборот.



Вебер-амперная зависимость:

$$\Psi = L \cdot i;$$



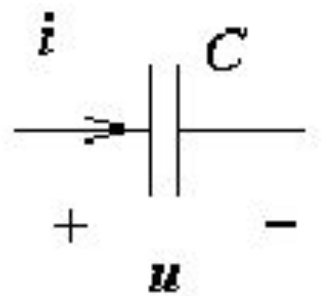
Ψ - потокосцепление.

$$L = \frac{\Psi}{i}$$ **[Вб/А=Гн]**

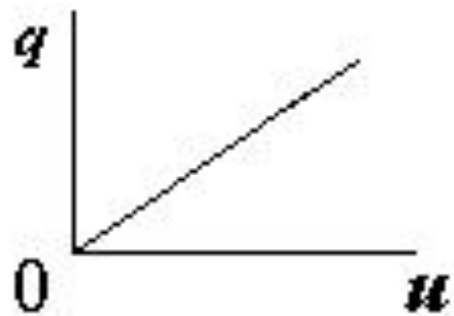
Вольт-амперная зависимость: $$u = L\frac{di_L}{dt}.$$

Конденсатор.

Конденсатором называется такой пассивный элемент цепи, в котором происходит процесс преобразования энергии электрического тока в энергию электрического поля и наоборот.



Кулон-вольтная характеристика:



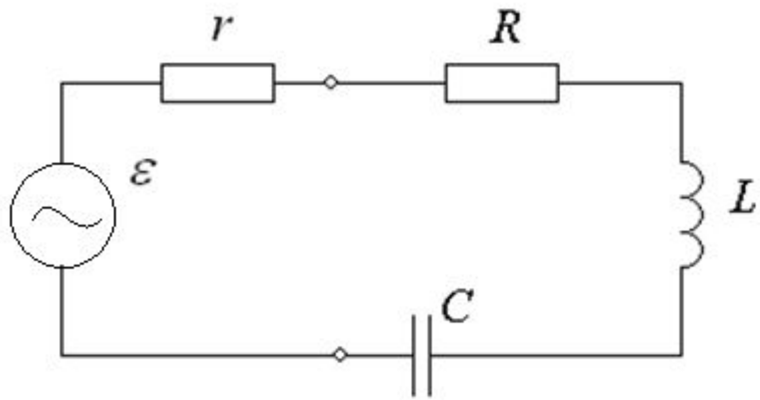
$$q = C \cdot u;$$

$$C = \frac{q}{u}; \qquad [\text{Кл/В=Ф}]$$

Вольт-амперная зависимость:

$$i = C\frac{du_C}{dt}.$$

Вынужденные колебания в электрическом колебательном контуре.



Уравнение контура по закону Кирхгофа для напряжений:

$$-U + u_R + u_L + u_C = 0;$$

$$u_R + u_L + u_C = U.$$

$$u = iR; \quad u = L\frac{di}{dt}; \quad L\frac{di}{dt} + Ri + u_C = U;$$

$$i = C\frac{du_C}{dt};$$

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = U;$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{U}{LC}.$$

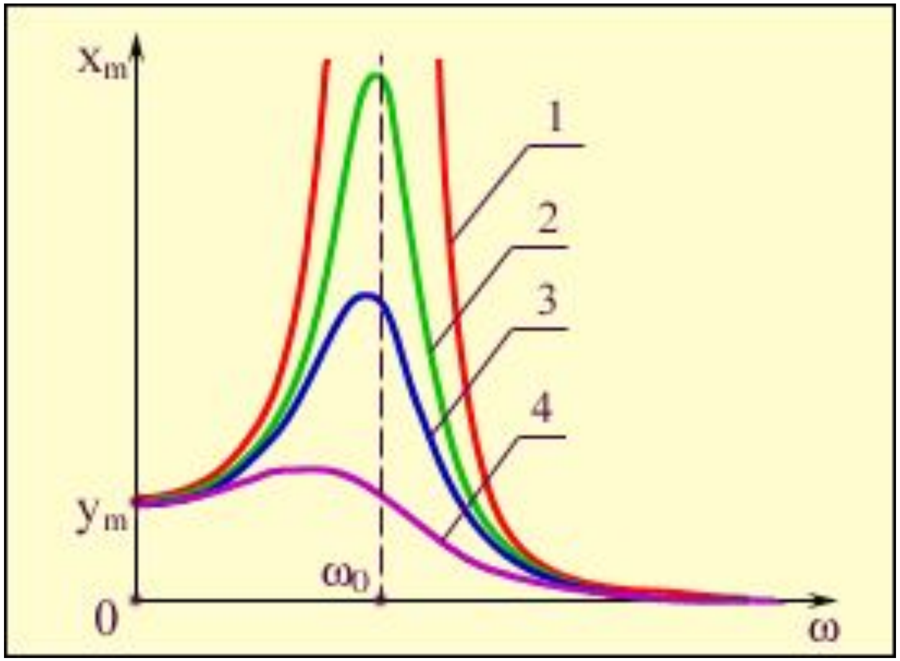
$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{LC}u_C=\frac{U}{LC};$$

$$\beta=\frac{R}{2L};\qquad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}};$$

$$\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2}+2\beta\frac{du_C}{dt}+\omega_0u_C=\omega_0U.}$$

5.8. Явление резонанса

Резонансом называется явление резкого возрастания амплитуды колебаний при совпадении собственной частоты колебательной системы с частотой вынуждающей силы.

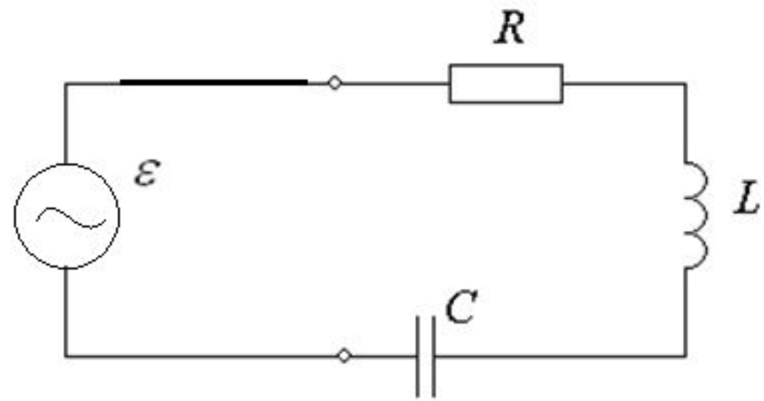


Зависимость амплитуды x_m вынужденных колебаний от частоты ω вынуждающей силы называется частотной характеристикой или резонансной кривой.

Резонансные явления в простых колебательных контурах

Резонанс в последовательном колебательном контуре

$$Z_{вх} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} =$$

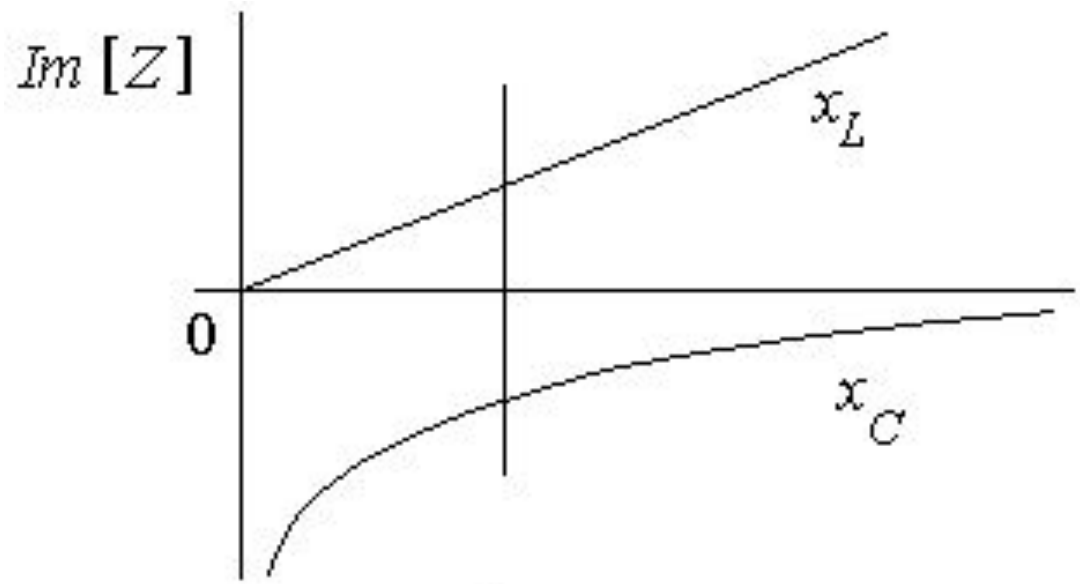


$$= R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = \quad R + j(x_L - x_C)$$

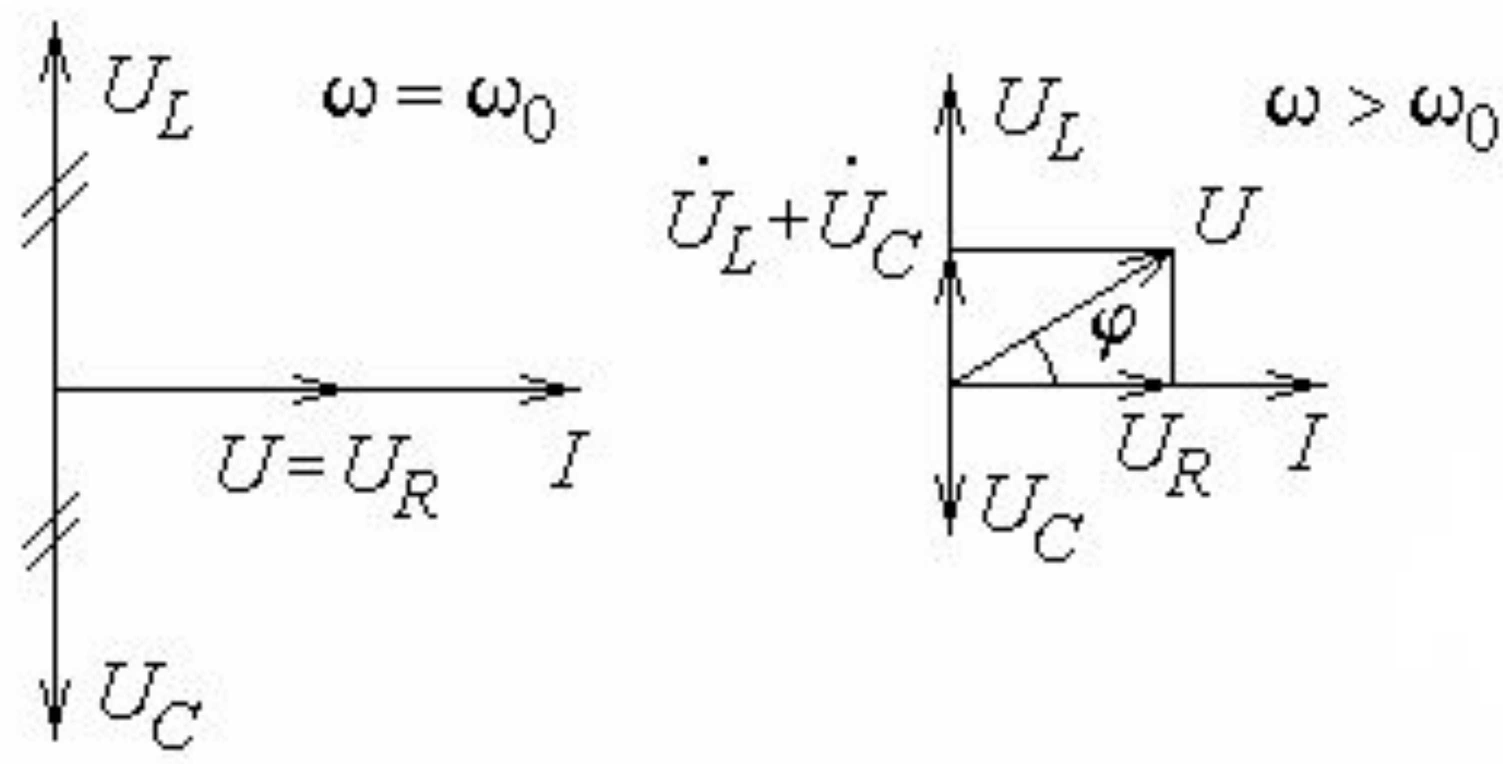
.

$$x_L - x_C = 0;\qquad \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0;$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ - резонансная частота контура



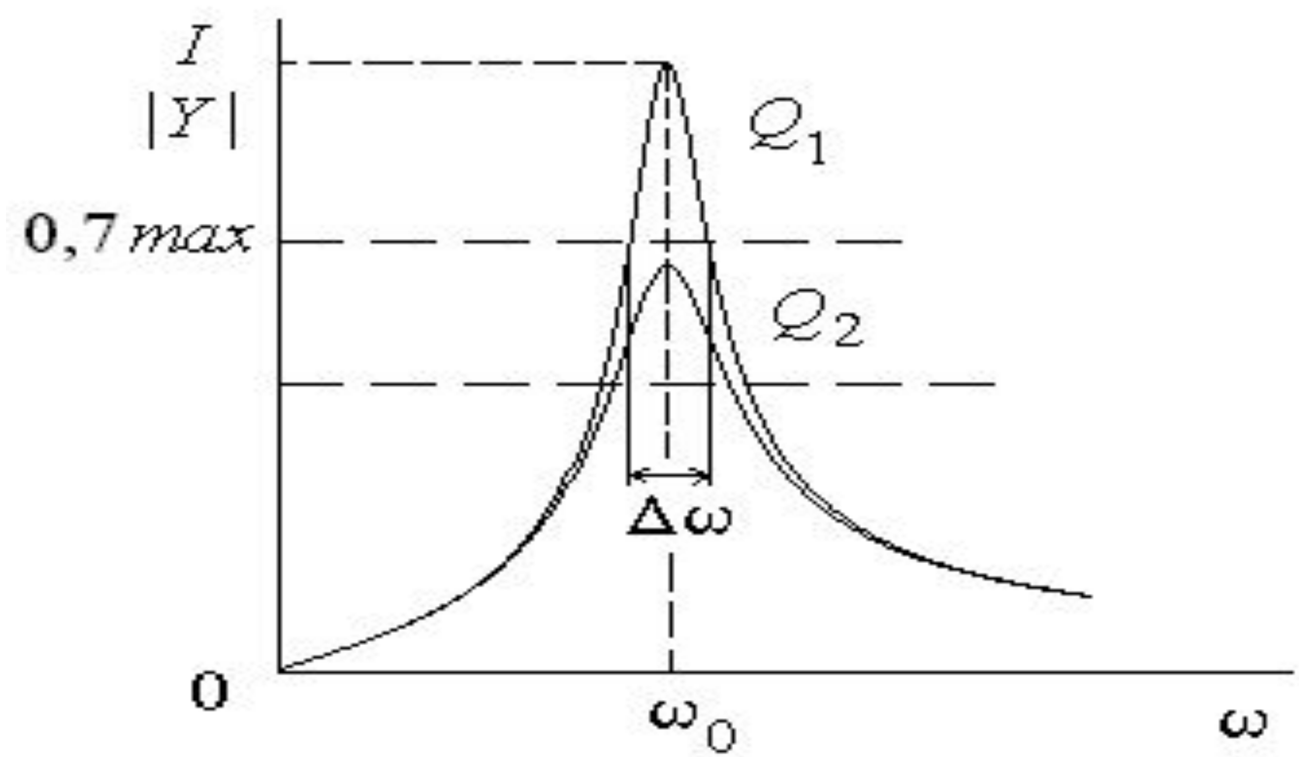
Векторные диаграммы



28

Свойства последовательного колебательного контура

$$I = \frac{U}{|Z|} = \frac{U}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}.$$



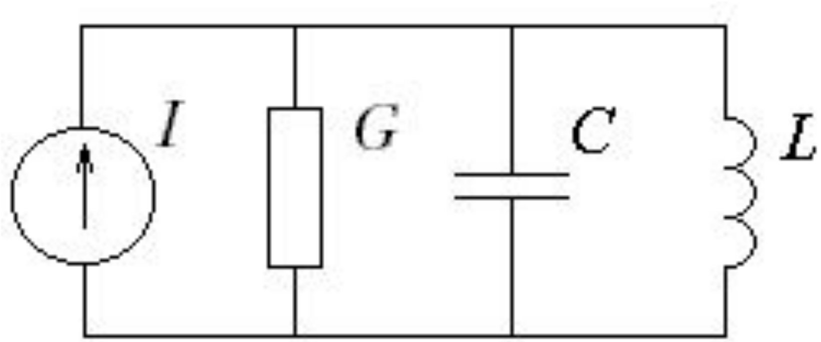
Ток в момент резонанса: $$I = \frac{U}{R}.$$

Волновое сопротивление: $$\rho = \omega_0 L = \frac{L}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Добротность: $$Q = \frac{U_{L0}}{U} = \frac{I \cdot \omega_0 L}{I \cdot R} = \frac{\rho}{R}.$$

Добротность по резонансной кривой: $$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}.$$

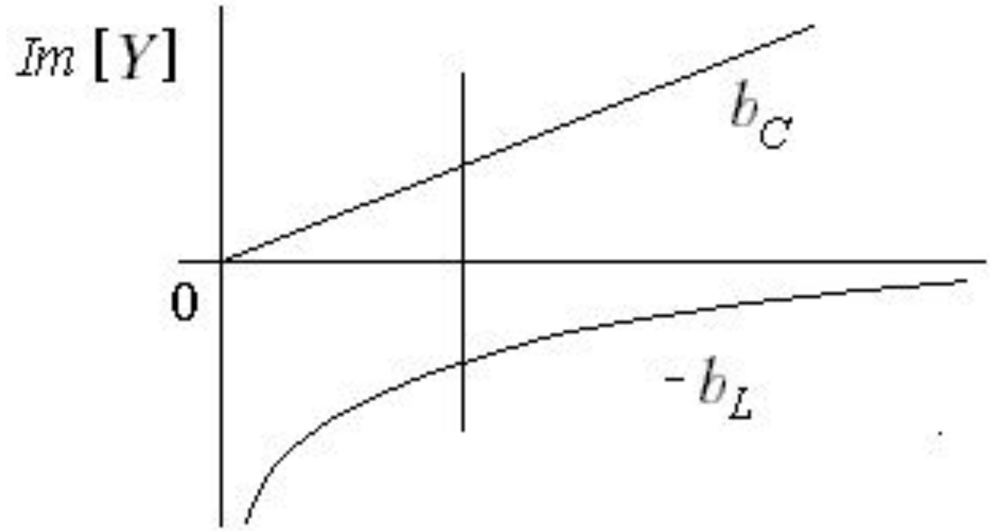
Резонанс в параллельном колебательном контуре



$$Y_{вх} = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} =$$

$$= G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L}) = \quad G + j(b_C - b_L)$$

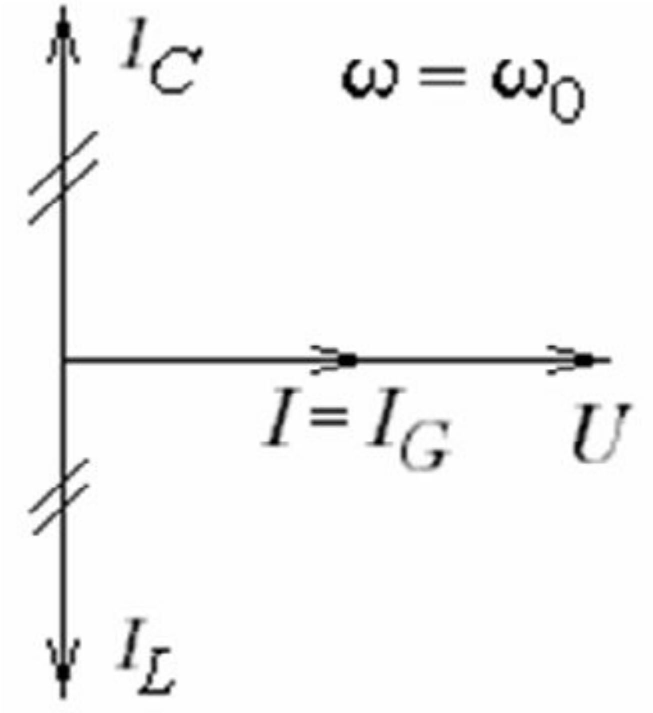
$$b_C - b_L = 0;$$



$$\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0;$$

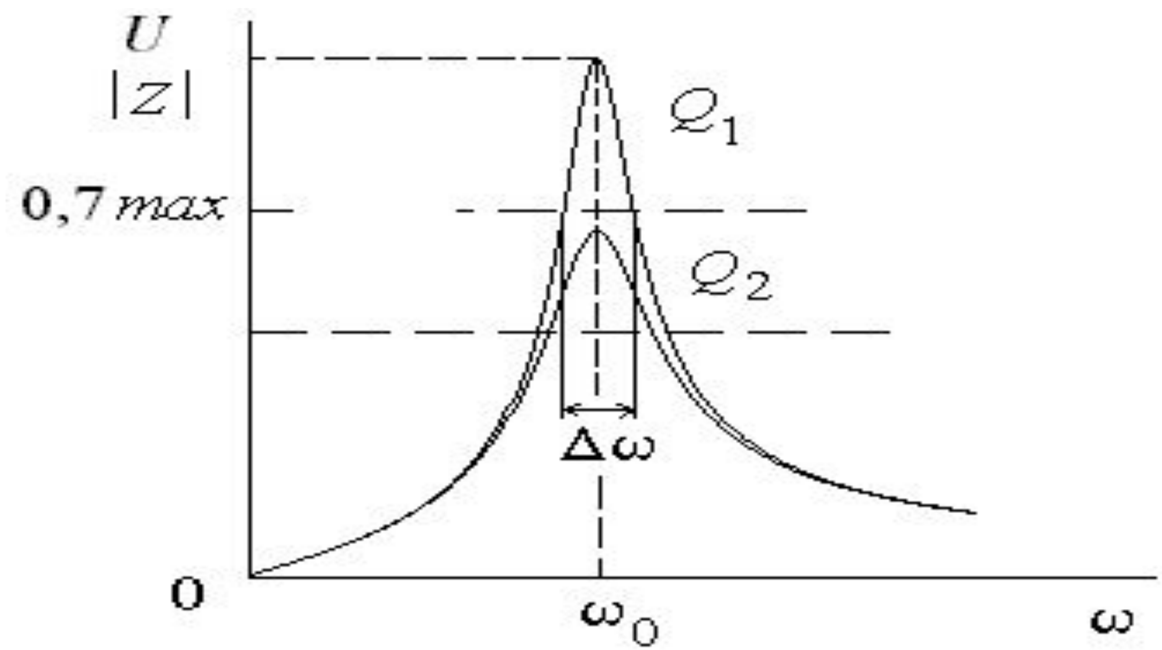
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ - резонансная частота контура.

Векторная диаграмма



Свойства параллельного колебательного контура.

$$U = \frac{I}{|Y|} = \frac{I}{\sqrt{g^2 + b^2}} = \frac{I}{\sqrt{G^2 + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}}.$$



Максимальное напряжение в момент резонанса:

$$U = \frac{I}{G}.$$

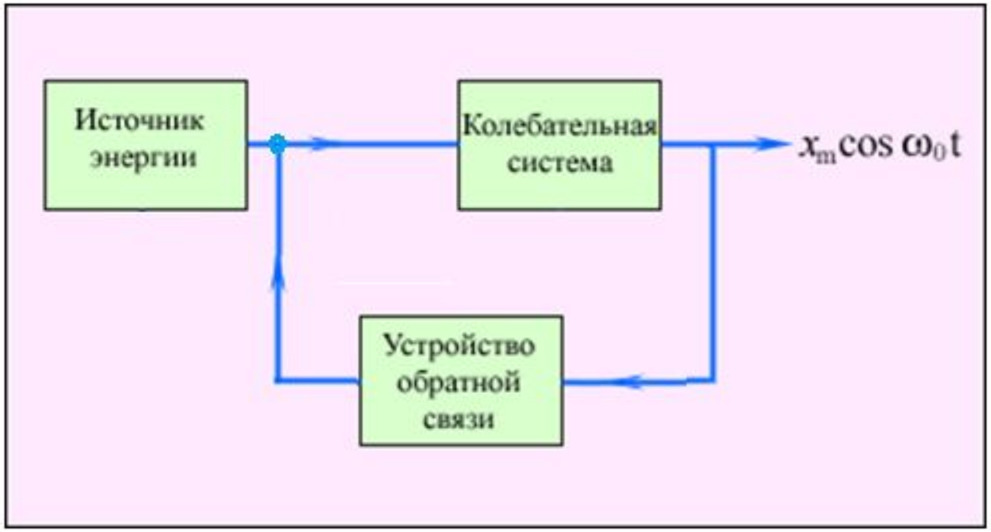
Добротность контура:

$$Q = \frac{I_{C0}}{I} = \frac{U \cdot \omega_0 C}{U \cdot G} = \frac{1}{\rho \cdot G}.$$

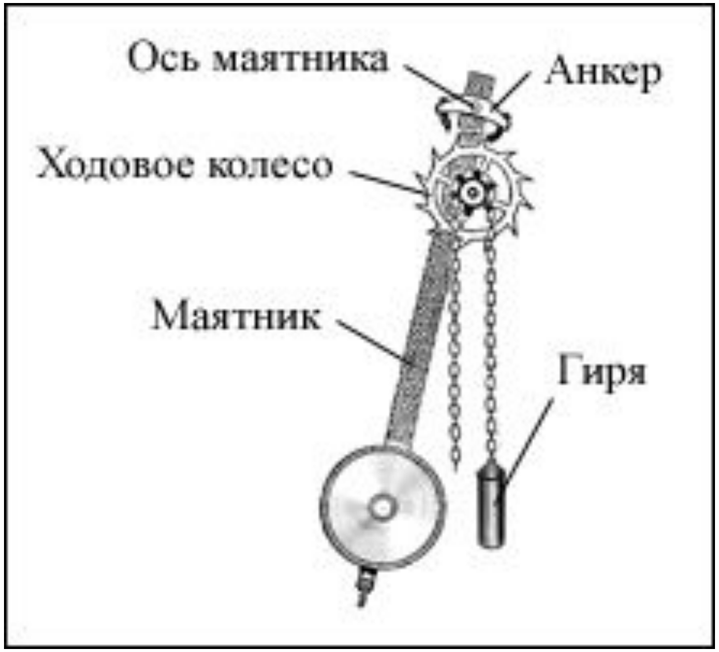
5.9. Автоколебания

Струны смычковых музыкальных инструментов, воздушные столбы в трубах духовых инструментов, голосовые связки при разговоре или пении и другие системы могут образовывать автоколебания.

Автоколебания происходят за счет способности таких систем регулировать поступление энергии от постоянного источника.



Пример механической автоколебательной системы – часовой механизм с анкерным ходом.



Источник энергии – поднятая вверх гиря или заведенная пружина.

Колебательная система – маятник на подвесе.

Обратная связь – взаимодействие анкера с ходовым колесом. Анкер позволяет ходовому колесу повернуться на один зубец за один полупериод.