



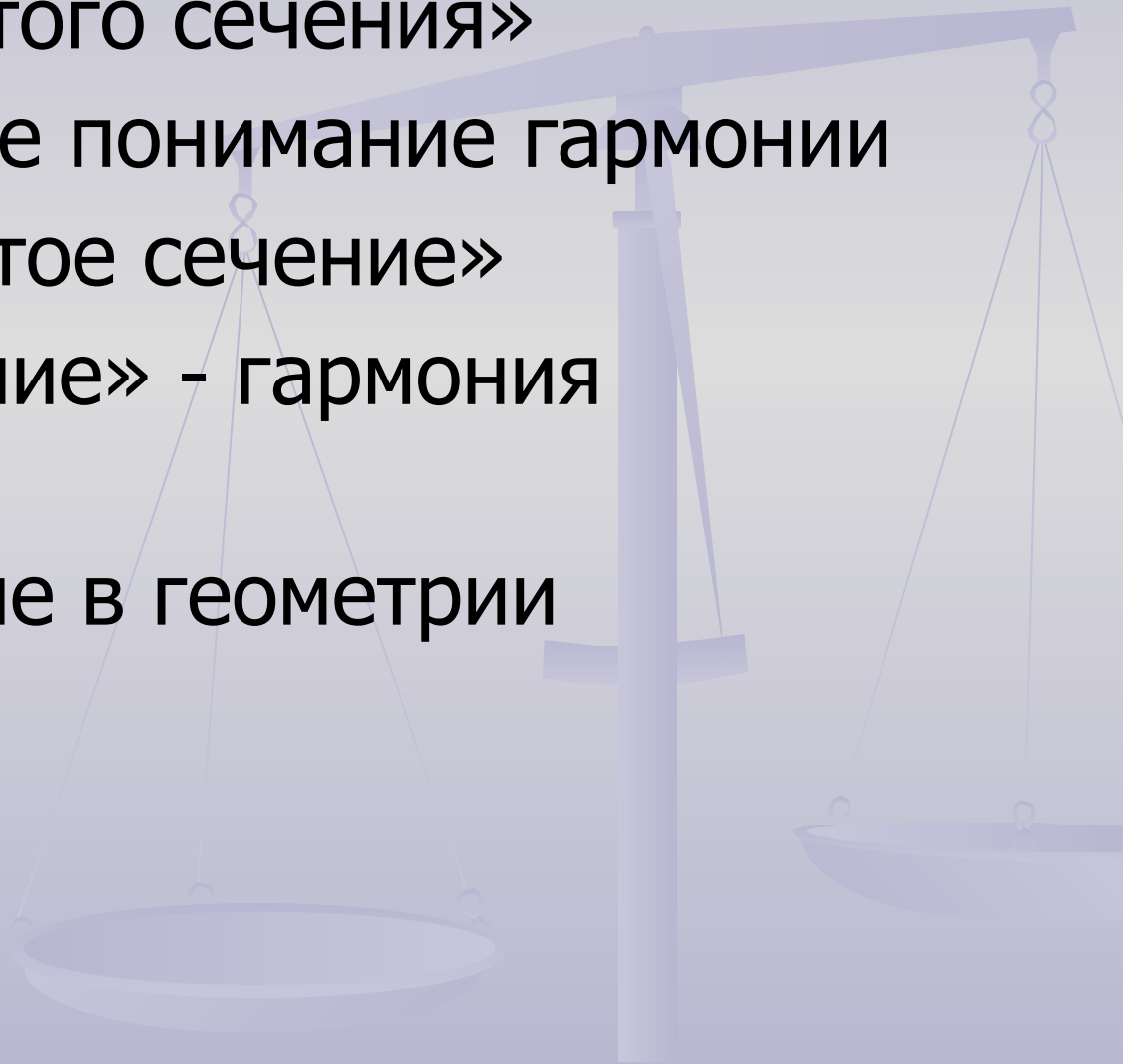
The background features a golden rectangle with a Fibonacci spiral drawn inside. The spiral starts from a small square in the top right and grows counter-clockwise. The numbers 55, 89, and 144 are placed at various points along the spiral. The number 55 is in the top left, 89 is in the bottom left, and 144 is in the top right. A glowing yellow arc highlights the spiral's path.

Золотое сечение - гармония математики

*Учитель математики МОУ СОШ № 4 с углубленным
изучением отдельных предметов Прийма Т.Б.*

Содержание:

- Вступление
- История «Золотого сечения»
- Математическое понимание гармонии
- Понятие «Золотое сечение»
- «Золотое сечение» - гармония математики
- Золотое сечение в геометрии
- Вывод



Вступление

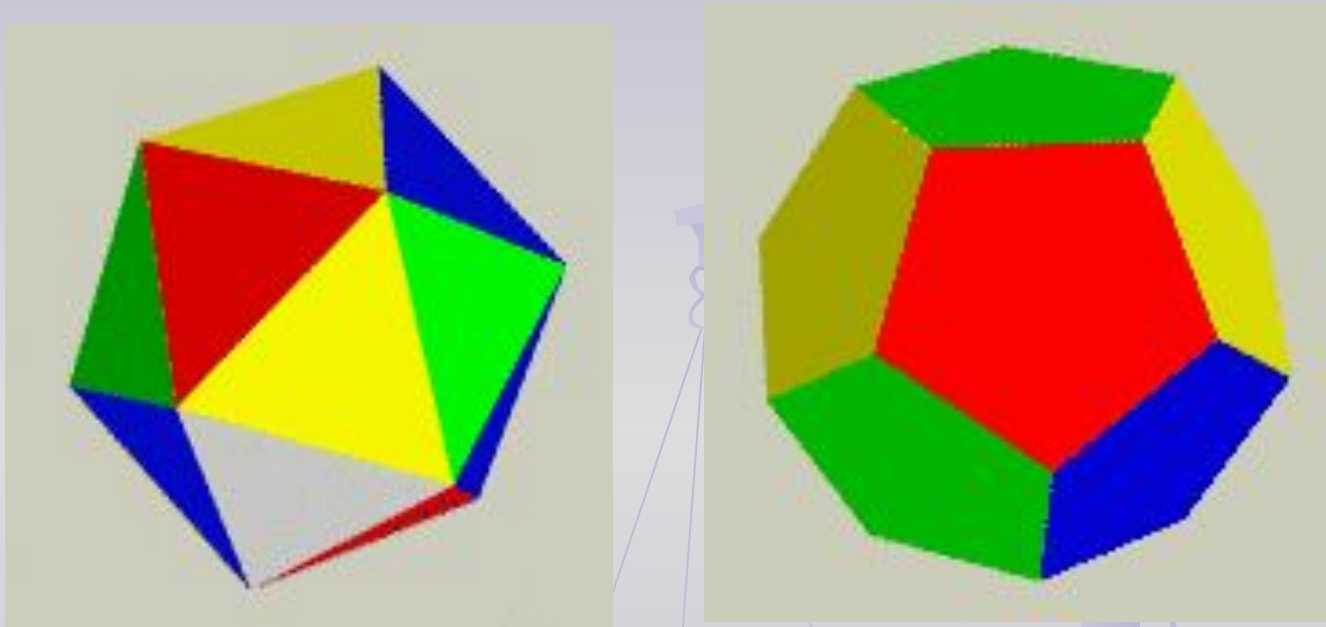
- В дошедшей до нас античной литературе золотое деление впервые упоминается в «Началах» Евклида. Во 2-й книге «Начал» дается геометрическое построение золотого деления. После Евклида исследованием золотого деления занимались многие ученые. Секреты золотого деления ревностно оберегались, хранились в строгой тайне. Они были известны только посвященным.
- Что же такое «золотое сечение»?

История «Золотого сечения»

Теория гармонии Древних

- В **Древнем Египте** существовала «система правил гармонии», основанная на Золотом Сечении.
- В **Древней Греции** Золотое Сечение было своеобразным каноном культуры, который пронизывает все сферы науки и искусства. Красота и гармония стали важнейшими категориями познания.
- В толковании древних греков **понятие золотого сечения, и понятие гармонии идентичны.**
- Согласно **Пифагору гармония имеет численное выражение**, то есть, она связана с концепцией числа.
- **Евклид** излагает теорию Платоновых тел, которая является существенным разделом геометрической теории Золотого Сечения.

Икосаэдр и додекаэдр



Два главных Платоновых тела,
додекаэдр и икосаэдр, основаны на
Золотом Сечении.

Ряд Фибоначчи

- С историей золотого сечения связано имя итальянского математика Леонардо Фибоначчи.
- Ряд чисел **0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55** и т.д. известен как ряд Фибоначчи.
- **Каждый член последовательности, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих, а отношение смежных чисел ряда приближается к отношению золотого деления.**
- Все исследователи золотого деления в растительном и в животном мире, искусстве, неизменно приходили к ряду Фибоначчи как арифметическому выражению закона



«Золотая Пропорция» - главный эстетический принцип эпохи Средневековья

Эпоха Возрождения ассоциируется с именами таких «титанов», как Леонардо да Винчи, Микеланджело, Рафаэль, Николай Коперник, Альберт Дюрер, Лука Пачоли.

Имеется много авторитетных свидетельств о том, что именно **Леонардо да Винчи(1452-1519)** был одним из первых, кто ввел сам термин «**Золотое Сечение**».

Доказано, что во многих своих произведениях Леонардо да Винчи использовал пропорции золотого сечения, в частности, в своей всемирно известной фреске «**Тайная вечеря**» и непревзойденной «**Джоконде**».



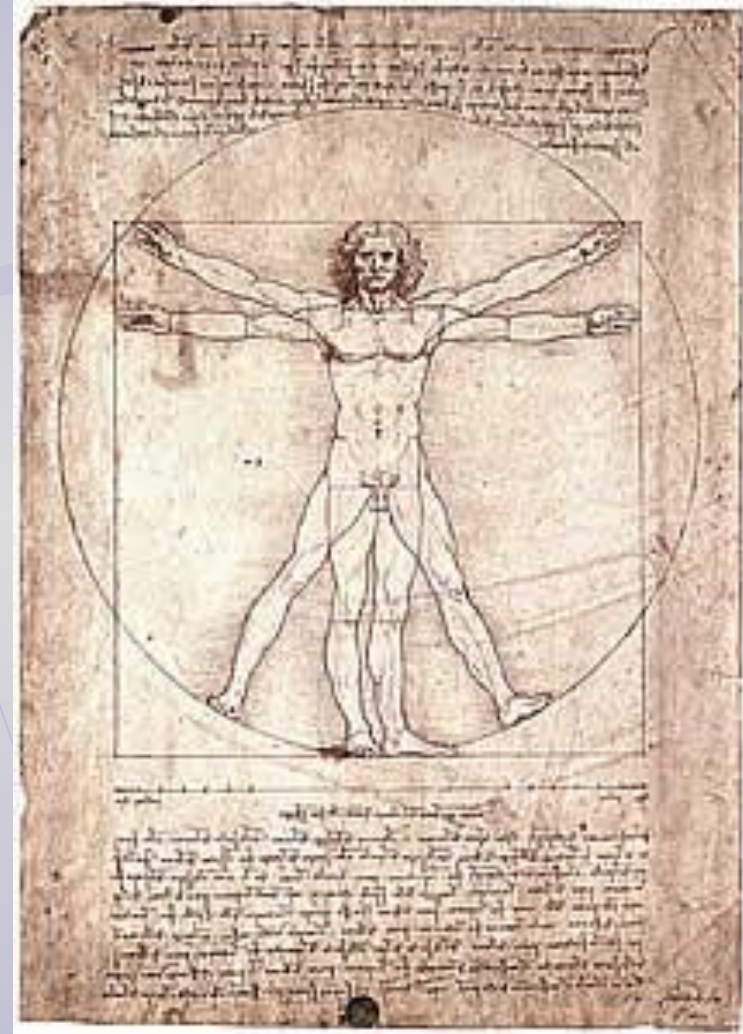
«Витрувийский человек» Леонардо да Винчи

Разрабатывая правила изображения человеческой фигуры, Леонардо да Винчи пытался на основе литературных сведений древности восстановить так называемый **«квадрат древних»**.

Он выполнил рисунок, в котором показано, что размах вытянутых в сторону рук человека примерно равен его росту, вследствие чего **фигура человека вписывается в квадрат и в круг**.

При исследовании рисунка можно заметить, что комбинация рук и ног в действительности составляет четыре различных позы.

Рисунок и текст иногда называют **каноническими пропорциями**.



Вклад Кеплера в теорию Золотого Сечения



- Гениальный астроном Иоганн Кеплер (1571-1630) был последовательным приверженцем Золотого Сечения, Платоновых тел и Пифагорейской доктрины о числовой гармонии Мироздания.
- Считается, что именно Кеплер обратил внимание на ботаническую закономерность **филлотаксиса** и установил **связь между числами Фибоначчи и золотой пропорцией**, доказав, что последовательность отношений соседних чисел Фибоначчи:
 $1/1; 2/1; 3/2; 5/3; 8/5; 13/8; \dots$ в пределе стремится к золотой пропорции

Математическое понимание гармонии

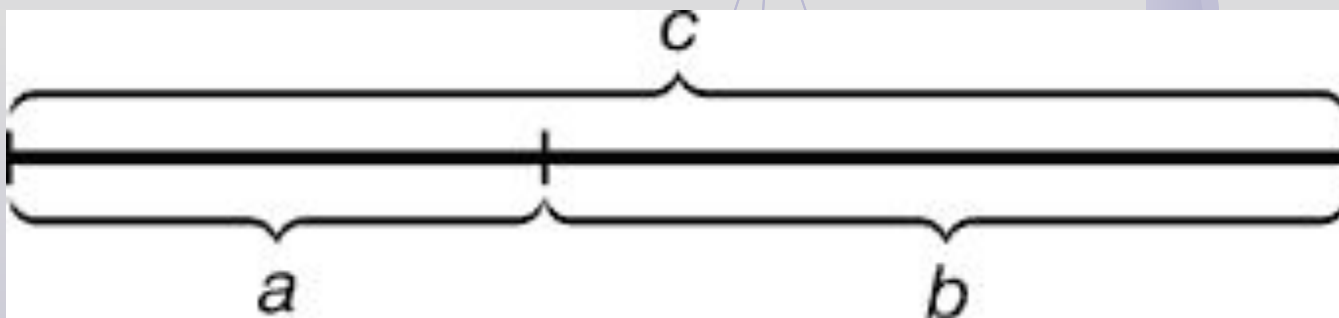
- «**Гармония** – соразмерность частей и целого, слияние различных компонентов объекта в единое органическое целое. В гармонии получают внешнее выявление внутренняя упорядоченность и мера бытия» - *Большая Советская Энциклопедия*

- **Математическая гармония** - это равенство или соразмерность частей с друг другом и части с целым.

Понятие математической гармонии тесно связано с понятиями **пропорции** и **симметрии**.

Понятие «Золотое сечение»

Золотое сечение - деление непрерывной величины на две части в таком отношении, при котором меньшая часть так относится к большей, как большая ко всей величине.

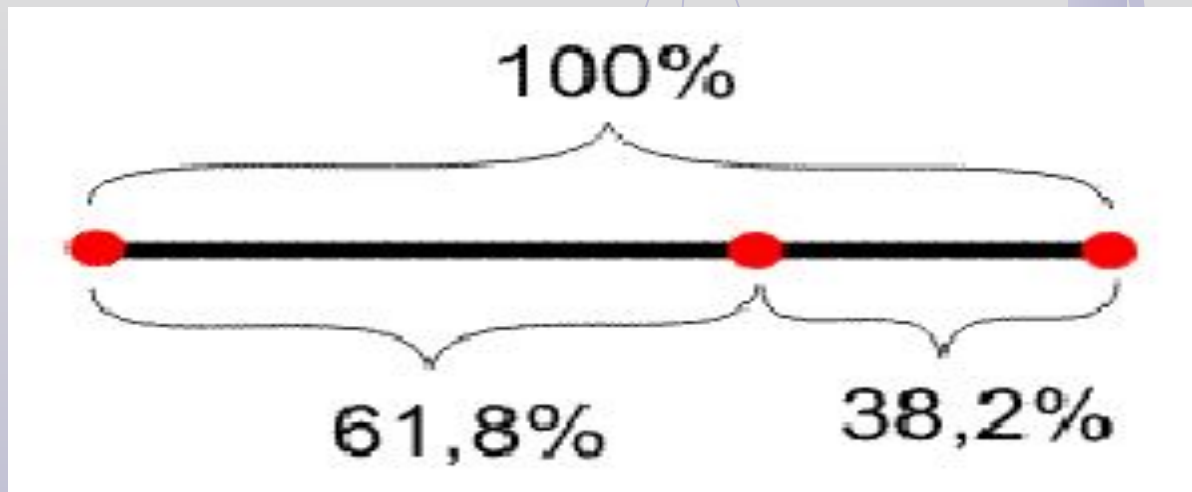


$$a : b = b : c \quad \text{или} \quad c : b = b : a$$

Эта пропорция равна:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61803398874989484 \dots$$

Золотое сечение в процентах



«Золотое сечение» - гармония математики

Число ϕ является положительным корнем квадратного уравнения:

$$x^2 = x + 1 \quad (1)$$

подставим корень ϕ вместо x и разделим на ϕ :

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} \quad (2)$$

Если продолжить такую подстановку бесконечное число раз, то получим

цепную дробь:

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \quad (3)$$

Аналогично, если взять корень квадратный из правой и левой частей тождества (1) то получим

представление золотой пропорции в «радикалах»:

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} \quad (4)$$

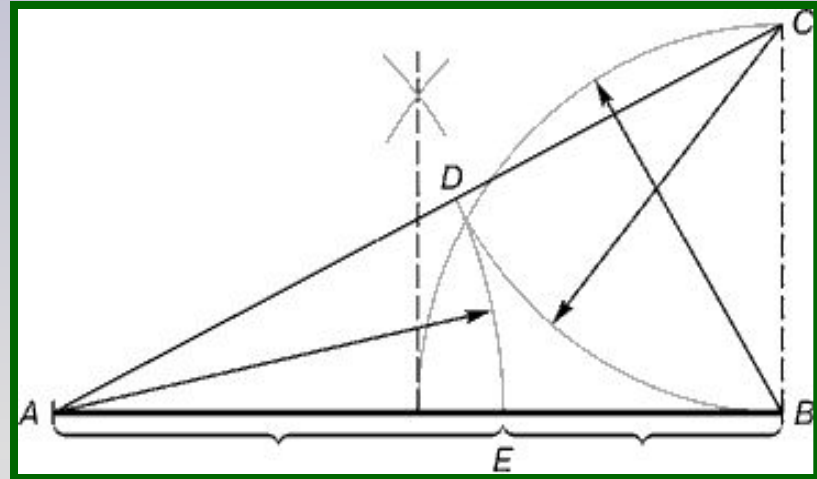
Эти формулы (3) и (4) доставляют «эстетическое наслаждение» и вызывают неосознанное чувство ритма и гармонии...

Золотое сечение в геометрии

Деление отрезка в золотом отношении

Дано: отрезок AB .

Построить: золотое сечение отрезка AB , т.е. точку E так, чтобы $\frac{BE}{AE} = \frac{AE}{AB}$.



Построение.

Построим прямоугольный треугольник, у которого один катет в два раза больше другого. Для этого восстановим в точке B перпендикуляр к прямой AB и на нем отложим отрезок $BC = \frac{1}{2}AB$. Далее, соединим точки A и C , отложим отрезок $CD = CB$, и наконец $AE = AD$.

Точка E является искомой, она производит золотое сечение отрезка AB .

Золотой треугольник

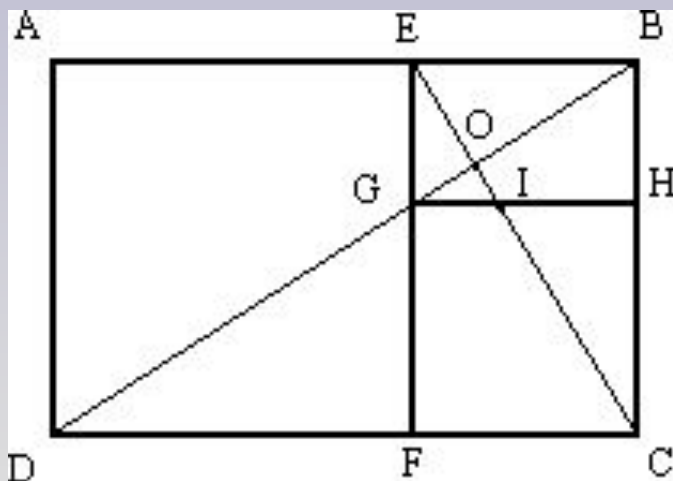
Золотым называется такой **равнобедренный треугольник**, основание и боковая сторона которого находятся в золотом отношении:

$$\frac{AB}{BC} = \varphi$$

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887\dots$$



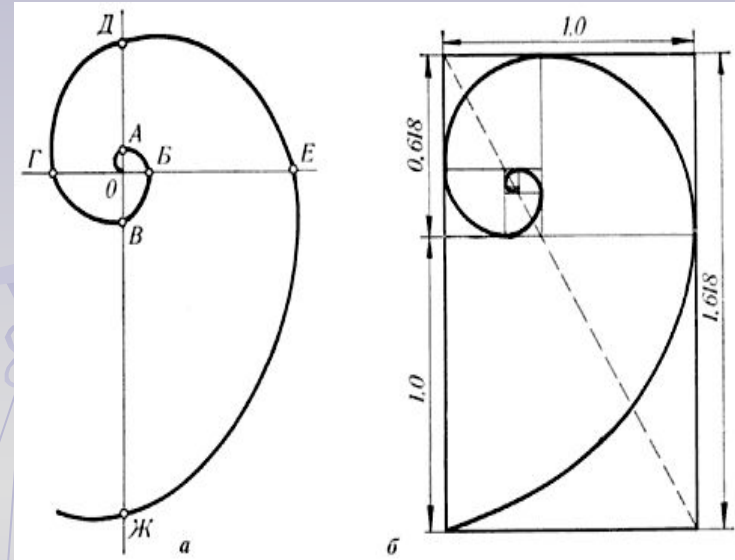
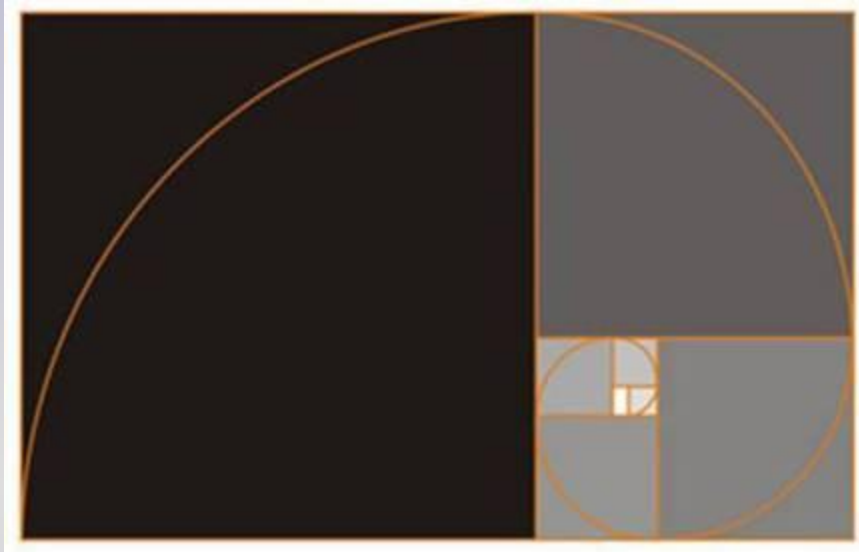
Золотой прямоугольник



$$\frac{AB}{BC} = \varphi$$

Прямоугольник, стороны которого находятся в золотом отношении, т.е. отношение длины к ширине даёт число **φ** , называется **золотым прямоугольником.**

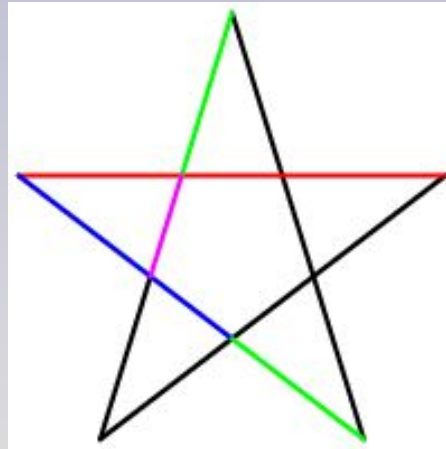
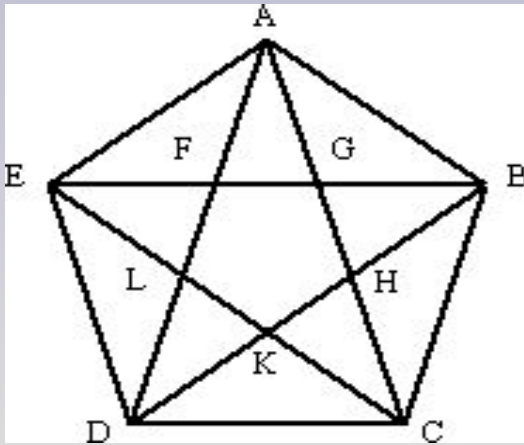
Золотая спираль



Последовательно отрезая от золотого прямоугольника квадраты и вписывая в каждый по четверти окружности, получаем **золотую логарифмическую спираль**.

Форма спирально завитой раковины привлекла внимание Архимеда. Он изучал ее и вывел уравнение спирали. Спираль, вычерченная по этому уравнению, называется **спираль Архимеда**.

Пентаграмма



Если в пентаграмме провести все диагонали, то в результате получим **пятиугольную звезду**.

Точки пересечения диагоналей в пентаграмме являются **точками золотого сечения диагоналей** (отношение синего отрезка к зелёному, красного к синему, зелёного к фиолетовому, равны **1.618**). При этом эти точки образуют **новую пентаграмму** $FGHKL$ и **пять правильных треугольников** (ADC, ADB, EBD, AEC, EBC)

Здание военного ведомства США имеет форму пентаграммы и получило название «**Пентагон**», что значит правильный пятиугольник.

Вывод

- Целое всегда состоит из частей, части разной величины находятся в определенном отношении друг к другу и к целому. Принцип золотого сечения – одно из замечательных проявлений структурного и функционального совершенства целого и его частей в искусстве, науке, технике и природе.

