Золотое сечение - гармония математики

Учитель математики МОУ СОШ № 4 с углубленным изучением отдельных предметов Прийма Т.Б.

Содержание:

Вступление

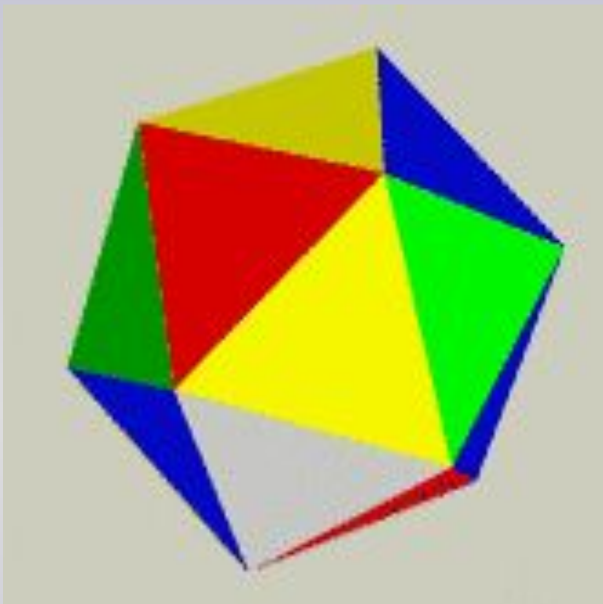
- В дошедшей до нас античной литературе золотое деление впервые упоминается в «Началах» Евклида. Во 2-й книге «Начал» дается геометрическое построение золотого деления. После Евклида исследованием золотого деления занимались многие ученые. Секреты золотого деления ревностно оберегались, хранились в строгой тайне. Они были известны только посвященным.
- Что же такое «золотое сечение»?

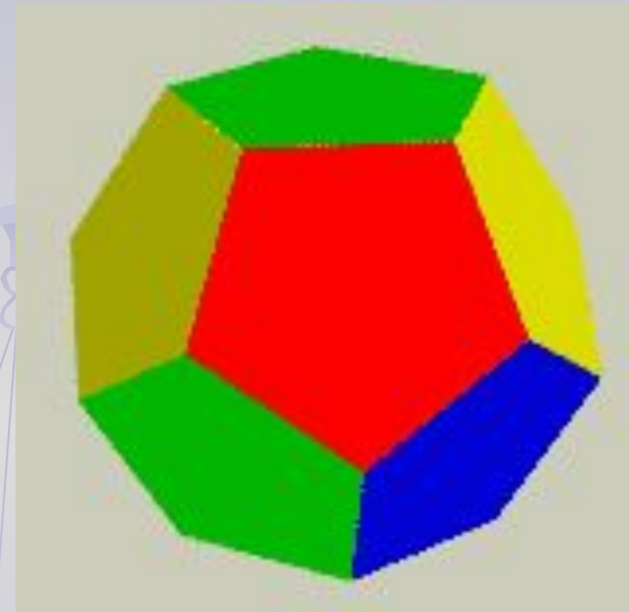
История «Золотого сечения»

Теория гармонии Древних

- В **Древнем Египте** существовала «система правил гармонии», основанная на Золотом Сечении.
- В **Древней Греции** Золотое Сечение было своеобразным каноном культуры, который пронизывает все сферы науки и искусства. Красота и гармония стали важнейшими категориями познания.
- В толковании древних греков **понятие золотого сечения, и понятие гармонии идентичны.**
- Согласно **Пифагору** **гармония имеет численное выражение**, то есть, она связана с концепцией числа.
- **Евклид** излагает теорию Платоновых тел, которая является существенным разделом геометрической теории Золотого Сечения.

Икосаэдр и додекаэдр





Два главных Платоновых тела, додекаэдр и икосаэдр, основаны на Золотом Сечении.

Ряд Фибоначчи

- С историей золотого сечения связано имя итальянского математика Леонардо Фибоначчи.
- Ряд чисел **0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55** и т.д. известен как ряд Фибоначчи.
- **Каждый член последовательности, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих, а отношение смежных чисел ряда приближается к отношению золотого деления.**
- Все исследователи золотого деления в растительном и в животном мире, искусстве, неизменно приходили к ряду Фибоначчи как арифметическому выражению закона

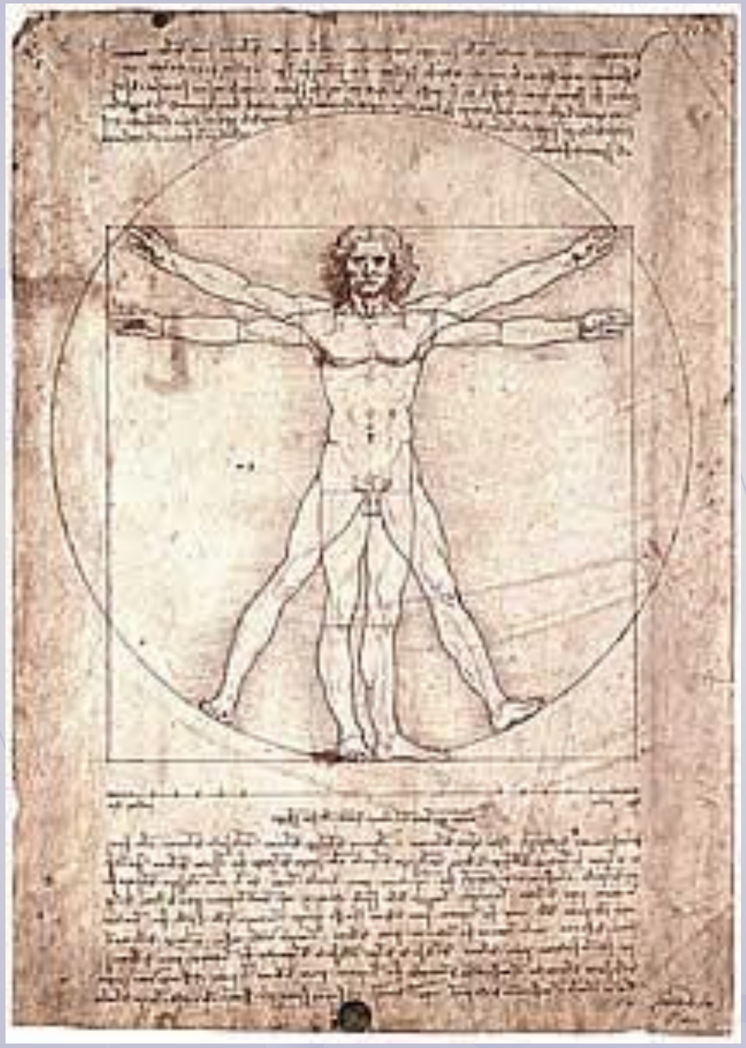
«Золотая Пропорция» - главный эстетический принцип эпохи Средневековья

Эпоха Возрождения ассоциируется с именами таких «титанов», как Леонардо да Винчи, Микеланджело, Рафаэль, Николай Коперник, Альберт Дюрер, Лука Пачоли.

Имеется много авторитетных свидетельств о том, что именно **Леонардо да Винчи(1452-1519) был одним из первых, кто ввел сам термин «Золотое Сечение».**

Доказано, что во многих своих произведениях Леонардо да Винчи использовал пропорции золотого сечения, в частности, в своей всемирно известной фреске **«Тайная вечеря»** и непревзойденной «**Джоконде.**

«Витрувийский человек» Леонардо да Винчи



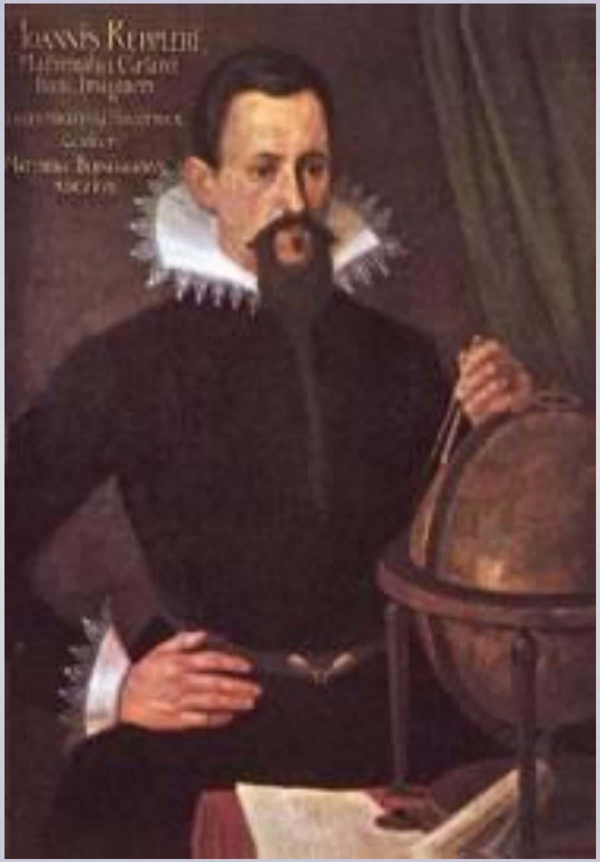
Разрабатывая правила изображения человеческой фигуры, Леонардо да Винчи пытался на основе литературных сведений древности восстановить так называемый **«квадрат древних».**

Он выполнил рисунок, в котором показано, что размах вытянутых в сторону рук человека примерно равен его росту, вследствие чего фигура человека вписывается в квадрат и в круг.

При исследовании рисунка можно заметить, что комбинация рук и ног в действительности составляет четыре различных позы.

Рисунок и текст иногда называют каноническими пропорциями.

Вклад Кеплера в теорию Золотого Сечения



- Гениальный астроном Иоганн Кеплер (1571-1630) был последовательным приверженцем Золотого Сечения, Платоновых тел и Пифагорейской доктрины о числовой гармонии Мироздания.
- Считается, что именно Кеплер обратил внимание на ботаническую закономерность **филлотаксиса** и установил **связь между числами Фибоначчи и золотой пропорцией**, доказав, что последовательность отношений соседних чисел Фибоначчи:

  1/1; 2/1; 3/2; 5/3 ;8/5; 13/8;…в пределе стремится к золотой пропорции

Математическое понимание гармонии

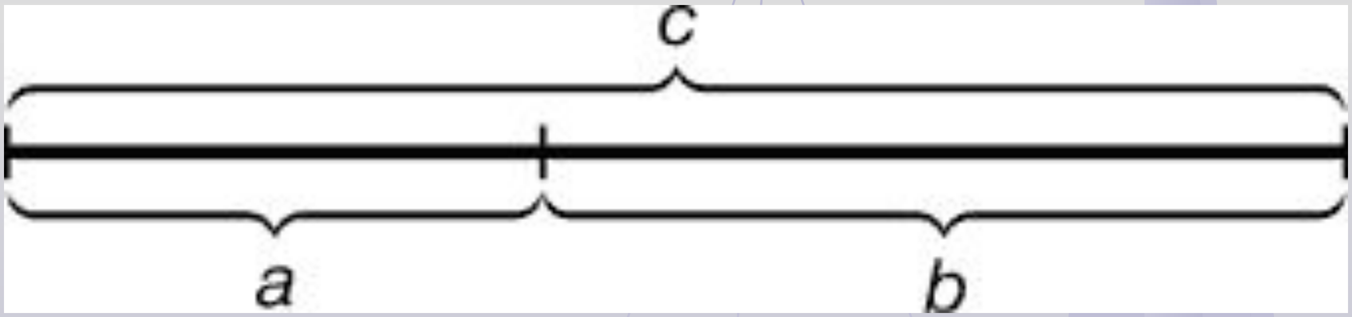
- «**Гармония** – соразмерность частей и целого, слияние различных компонентов объекта в единое органическое целое. В гармонии получают внешнее выявление внутренняя упорядоченность и мера бытия» -*Большая Советская Энциклопедия*

- **Математическая гармония** - это равенство или соразмерность частей с друг другом и части с целым.

Понятие математической гармонии тесно связано с понятиями **пропорции** и **симметрии**.

Понятие «Золотое сечение»

Золотое сечение - деление непрерывной величины на две части в таком отношении, при котором меньшая часть так относится к большей, как большая ко всей величине.

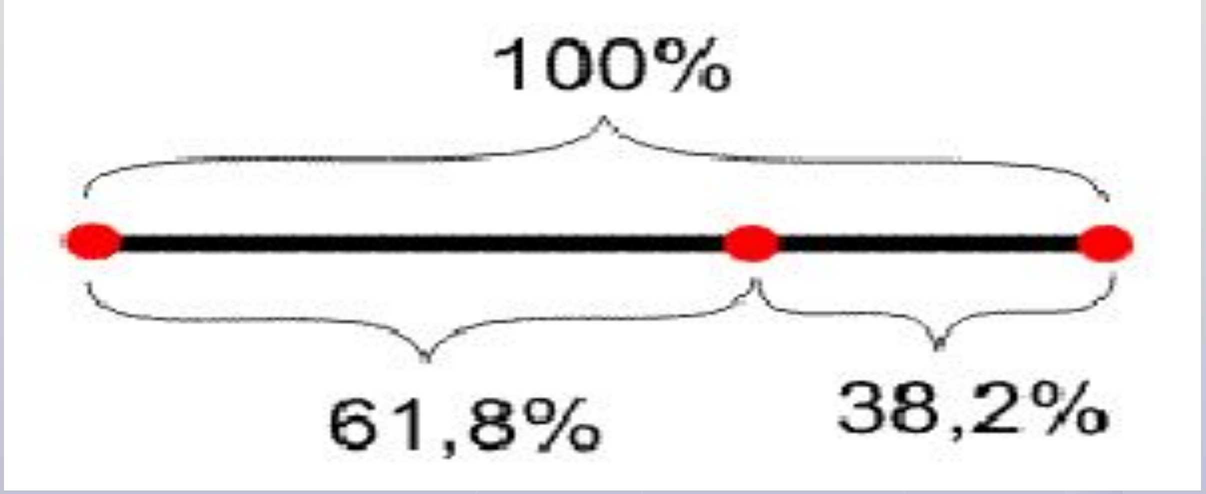


a : b = b : c или **c : b = b : a**

Эта пропорция равна:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887498948\ldots$$

Золотое сечение в процентах



«Золотое сечение» - гармония математики

Число ϕ является положительным корнем квадратного уравнения:

$$x^2 = x + 1 \qquad (1)$$

подставим корень ϕ вместо *x* и разделим на ϕ *:*

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \qquad (2)$$

Если продолжить такую подстановку бесконечное число раз, то получим **цепную дробь:**

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}} \qquad (3)$$

Аналогично, если взять корень квадратный из правой и левой частей тождества (1) то получим **представление золотой пропорции в «радикалах»**:

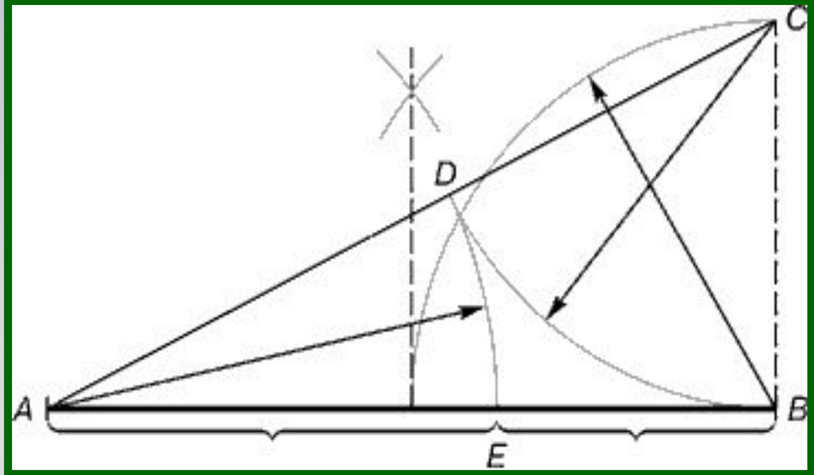
$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}} \qquad (4)$$

Эти формулы (3) и (4) доставляют «эстетическое наслаждение» и вызывают неосознанное чувство ритма и гармонии…

Золотое сечение в геометрии

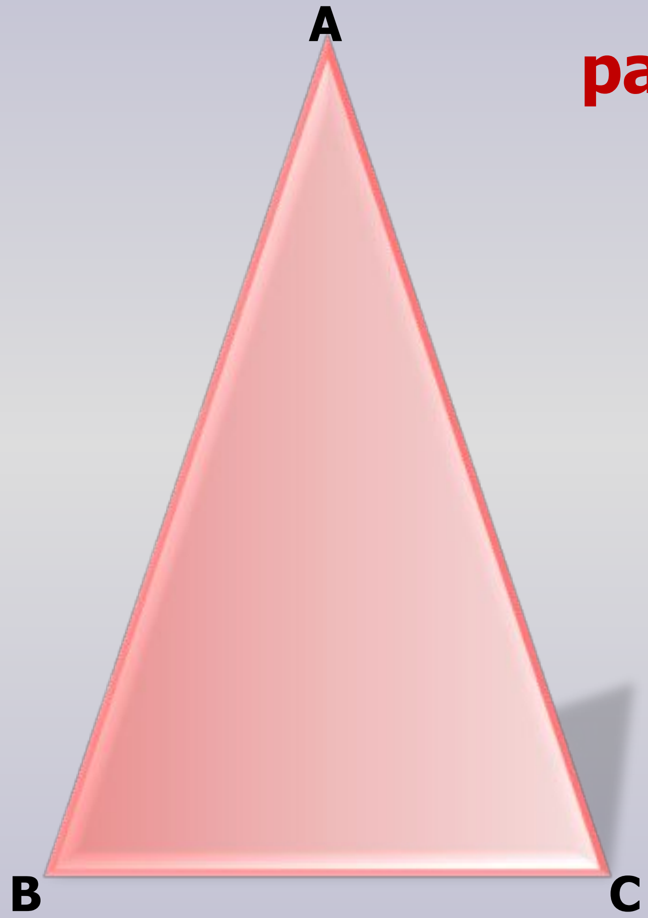
Деление отрезка в золотом отношении

Дано: отрезок АВ.
Построить: золотое сечение отрезка АВ, т.е. точку Е так, чтобы $\frac{BE}{AE} = \frac{AE}{AB}$.



Построение.
Построим прямоугольный треугольник, у которого один катет в два раза больше другого. Для этого восстановим в точке В перпендикуляр к прямой АВ и на нем отложим отрезок ВС= $\frac{1}{2}AB$.
Далее, соединим точки А и С, отложим отрезок CD=CB, и наконец AE=AD.
Точка Е является искомой, она производит золотое сечение отрезка АВ.

Золотой треугольник

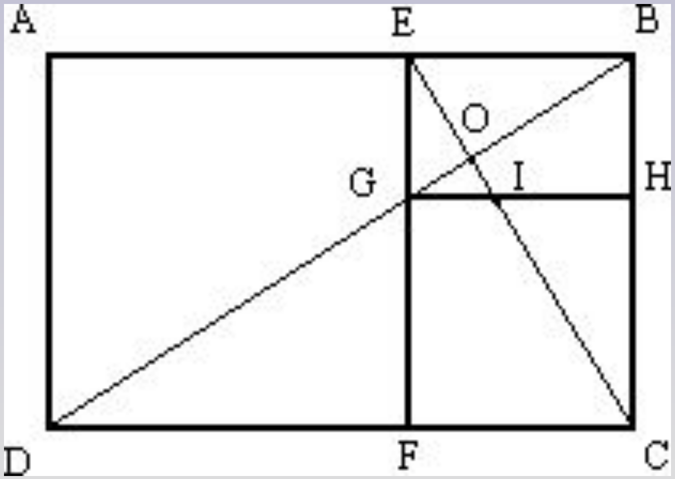


Золотым называется такой **равнобедренный треугольник**, основание и боковая сторона которого находятся в золотом отношении:

$$\frac{AB}{BC} = \varphi$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887\ldots$$

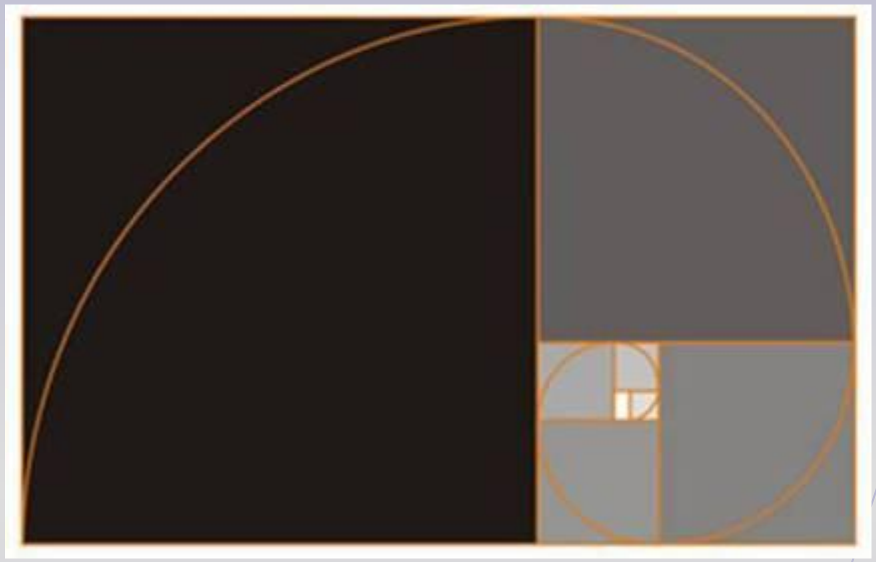
Золотой прямоугольник

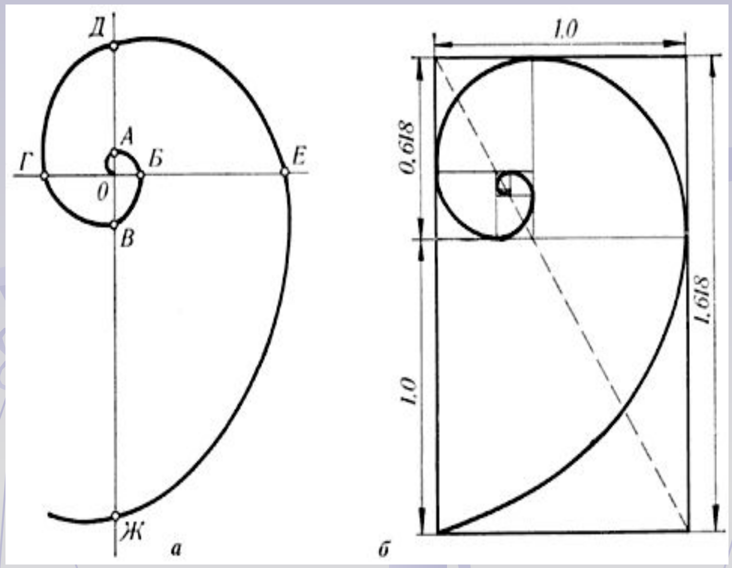


$$\frac{AB}{BC} = \varphi$$

Прямоугольник, стороны которого находятся в золотом отношении, т.е. отношение длины к ширине даёт число **φ**, называется **золотым прямоугольником.**

Золотая спираль

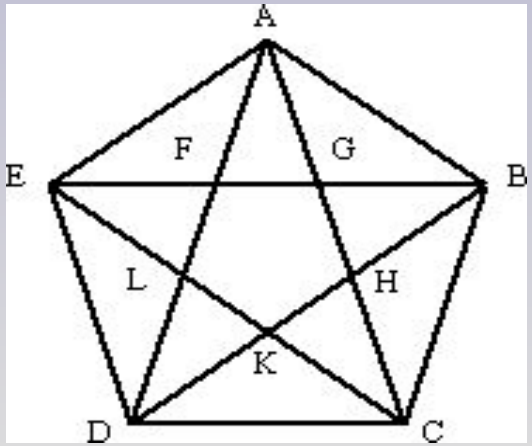


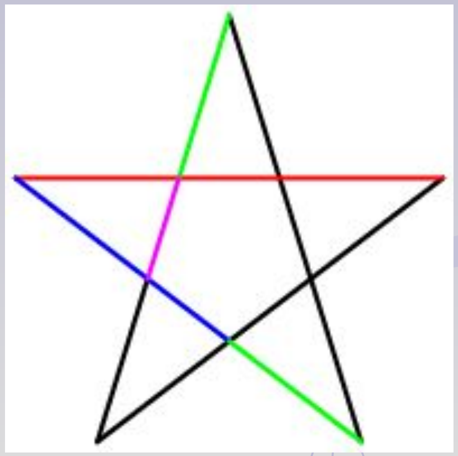


Последовательно отрезая от золотого прямоугольника квадраты и вписывая в каждый по четверти окружности, получаем **золотую логарифмическую спираль.**

Форма спирально завитой раковины привлекла внимание Архимеда. Он изучал ее и вывел уравнение спирали. Спираль, вычерченная по этому уравнению, называется **спираль Архимеда.**

Пентаграмма





Если в пентаграмме провести все диагонали, то в результате получим **пятиугольную звезду**.

Точки пересечения диагоналей в пентаграмме являются **точками золотого сечения диагоналей** (отношение синего отрезка к зелёному, красного к синему, зелёного к фиолетовому, равны **1.618**). При этом эти точки образуют **новую пентаграмму** *FGHKL* и **пять правильных треугольников** (*ADC, ADB,EBD, AEC,EBC*)

Здание военного ведомства США имеет форму пентаграммы и получило название **«Пентагон»,** что значит правильный пятиугольник.

Вывод

- Целое всегда состоит из частей, части разной величины находятся в определенном отношении друг к другу и к целому. Принцип золотого сечения – одно из замечательных проявлений структурного и функционального совершенства целого и его частей в искусстве, науке, технике и природе.