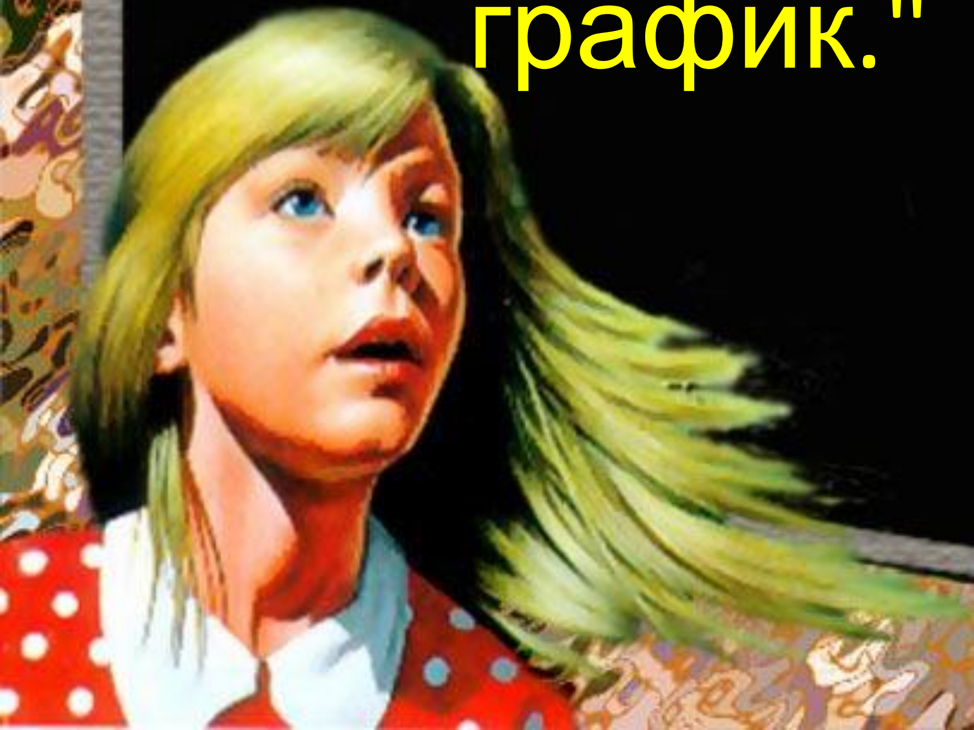
Урок алгебры в 8 классе

по теме: ""Квадратичная функция, её свойства и график."



Цели:

- ввести понятие квадратичной функции;
- научится строить график функции $y=ax^2 + ax + c$ и описывать свойства данной функции по графику;
- установить закономерность между графиком функции $y=ax^2$ и значением коэффициента а.

Рассмотрим многочлен $ax^2 + bx + c$, где a, b, c — числа (коэффициенты), причем $a \neq 0$. Его обычно называют **квадратным трехчленом;** при этом одночлен ax^2 называют **старшим членом квадратного трехчлена**, а коэффициент a — **старшим коэффициентом.**

Заметим, что квадратный трехчлен не обязательно состоит из трех слагаемых, например, $3x^2 + 2x$ тоже считают квадратным трехчленом: здесь $a = 3$, $b = 2$, $c = 0$.

Функцию $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — произвольные числа, причем $a \neq 0$, называют **квадратичной функцией.** Это название можно объяснить тем, что старший член трехчлена $ax^2 + bx + c$ содержит x в квадрате.

Определение.

Квадратичной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида $y=ax^2+bx+c$, где x – независимая переменная, a, b и c – некоторые числа, причем $a \neq 0$.

Из приведенных примеров укажите те функции, которые являются квадратичными. Для квадратичных функций назовите коэффициенты.

$$y = 5x + 1$$

$$y = 3x^2 - 1$$

$$y = \frac{2}{x^2} + 1$$

$$y = 4x^2$$

$$y = \frac{x^2}{4} - 1$$

$$y = 2x^2 + x$$

$$y = 2x^2 + x + 3$$

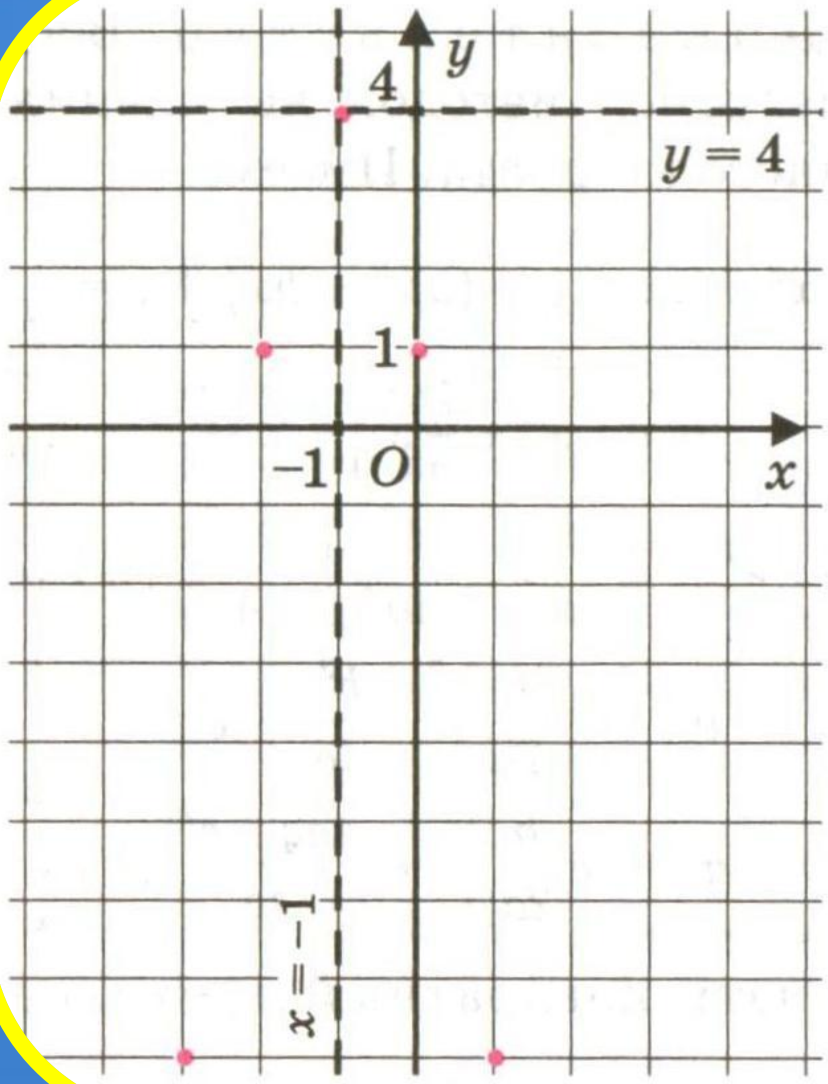
$$y = x^3 + 7x - 1$$

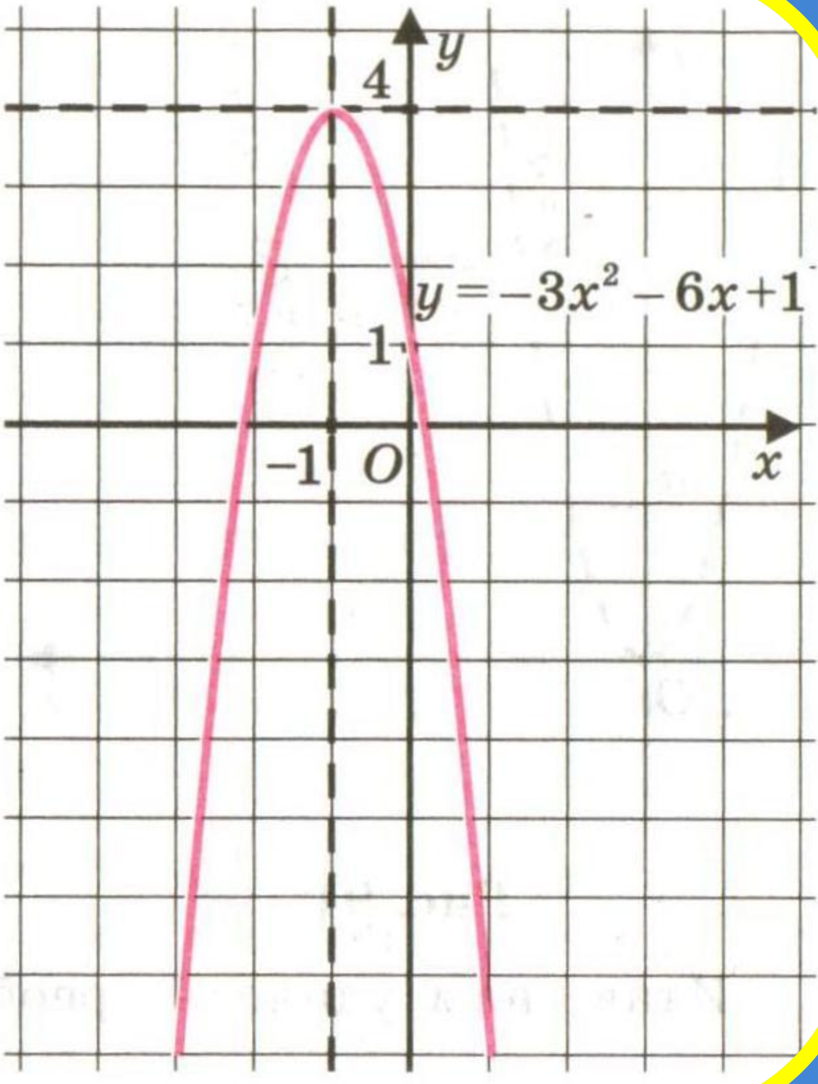
Пример 1. Построить график функции $y = -3x^2 - 6x + 1$.

Решение. Выделим полный квадрат в квадратном трехчлене $-3x^2 - 6x + 1$. Имеем:

$$-3x^2 - 6x + 1 = -3(x^2 + 2x) + 1 = -3((x^2 + 2x + 1) - 1) + 1 =$$
$$= -3((x + 1)^2 - 1) + 1 = -3(x + 1)^2 + 3 + 1 = -3(x + 1)^2 + 4.$$

Для построения графика функции $y = -3(x + 1)^2 + 4$ перейдем к вспомогательной системе координат с началом в точке $(-1; 4)$ (пунктирные прямые $x = -1$ и $y = 4$ на рис. 89). Привяжем функцию $y = -3x^2$ к новой системе координат. С этой целью выберем контрольные точки для функции $y = -3x^2$, например $(0; 0)$, $(1; -3)$, $(-1; -3)$, $(2; -12)$, $(-2; -12)$, но строить их будем *не в старой, а в новой системе координат* (эти точки отмечены на рис. 89). По этим точкам построим параболу — получим требуемый график (рис. 90).


y
4
y = 4
1
−1
O
x
x = −1


y
4
y = −3x² − 6x + 1
1
−1
O
x

Итак, применив метод выделения полного квадрата, мы преобразовали квадратный трехчлен к виду $a(x + l)^2 + m$ и использовали алгоритм 2 из § 21 (заметим еще раз, что с равным успехом мы могли бы использовать и алгоритм 1 — кому что нравится). Оказалось, что графиком функции $y = -3x^2 - 6x + 1$ является парабола, которая получается из параболы $y = -3x^2$ параллельным переносом. А в конце предыдущего параграфа мы установили, что графиком функции $y = x^2 - 4x + 5$ также является парабола; она получается из параболы $y = x^2$ параллельным переносом. Оказывается, *график любой квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ можно получить из параболы $y = ax^2$ параллельным переносом*, причем для доказательства этого факта используется та же идея — *выделение полного квадрата*.

Теорема

Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, которая получается из параболы $y = ax^2$ параллельным переносом.

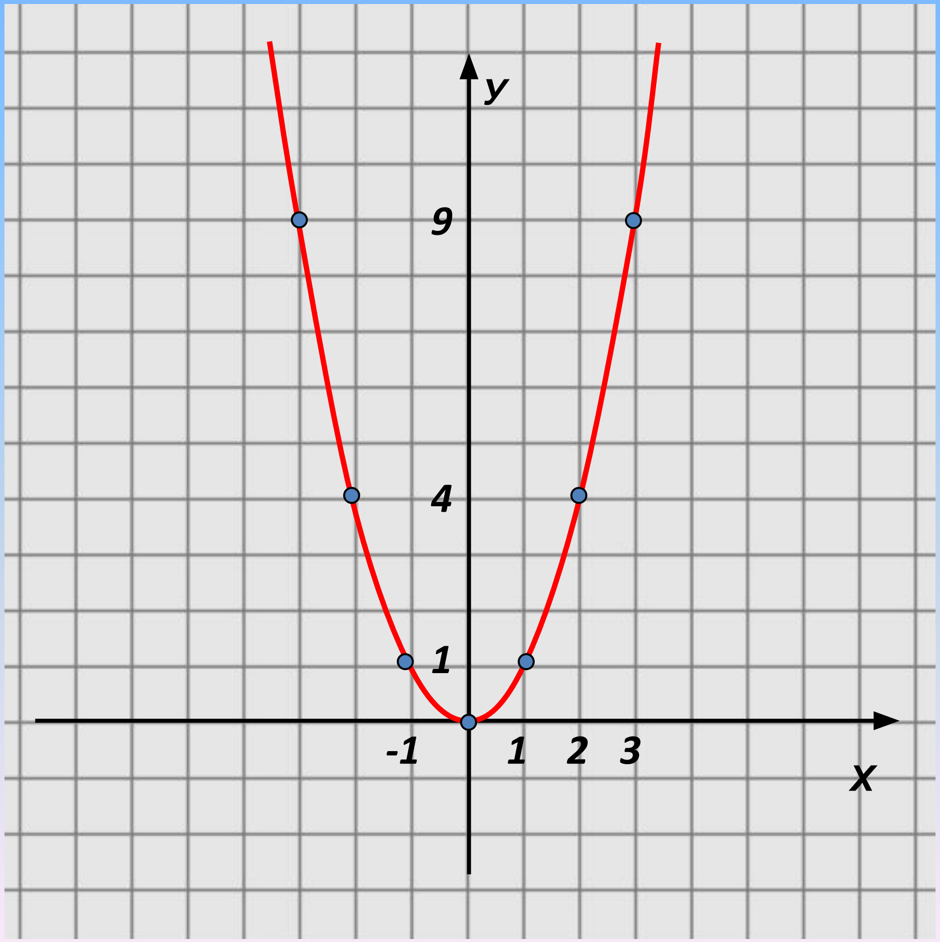
Функция $y=ax^2$, ее график и свойства.

Построим графики функций $y = x^2$ $y = 2x^2$ $y = \frac{1}{2}x^2$ $y = -\frac{1}{2}x^2$

и исследуем их свойства.

1) $y = x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9



Построим графики функций $y = x^2$ $y = 2x^2$ $y = \frac{1}{2}x^2$ $y = -\frac{1}{2}x^2$

и исследуем их свойства.

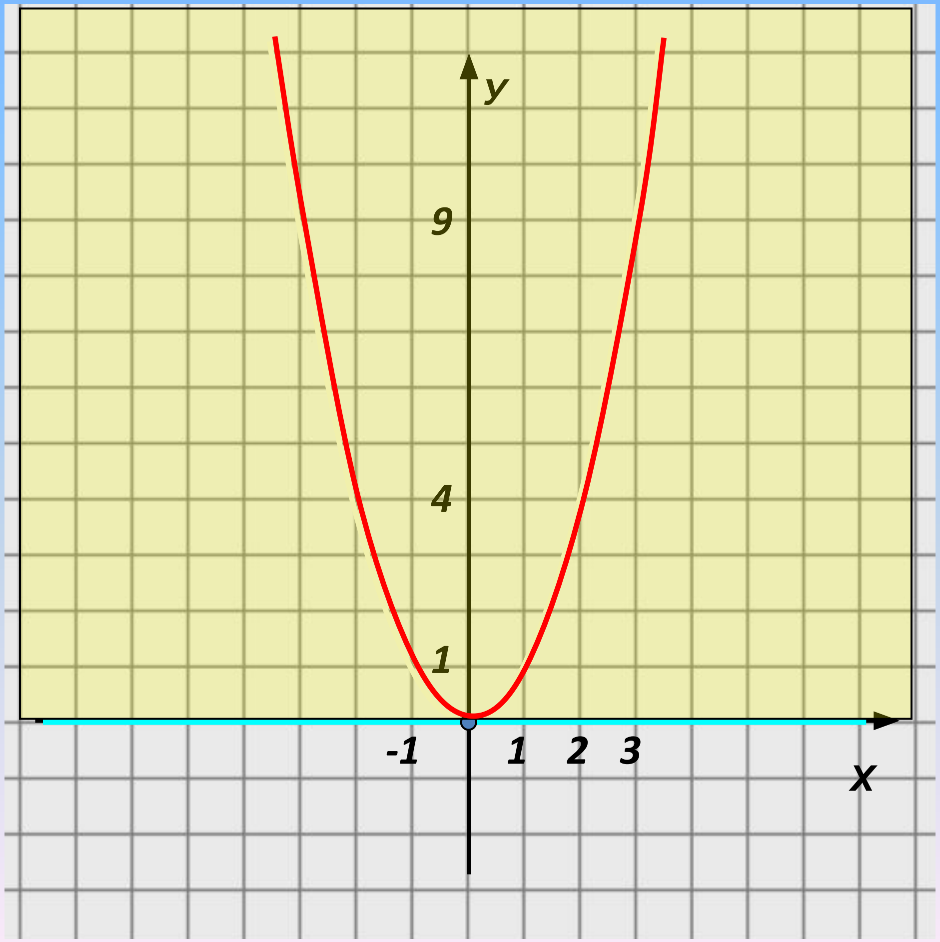
1) $y = x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

1. D(y): R

2. y=0, если x=0

3. y>0, если x $\in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$

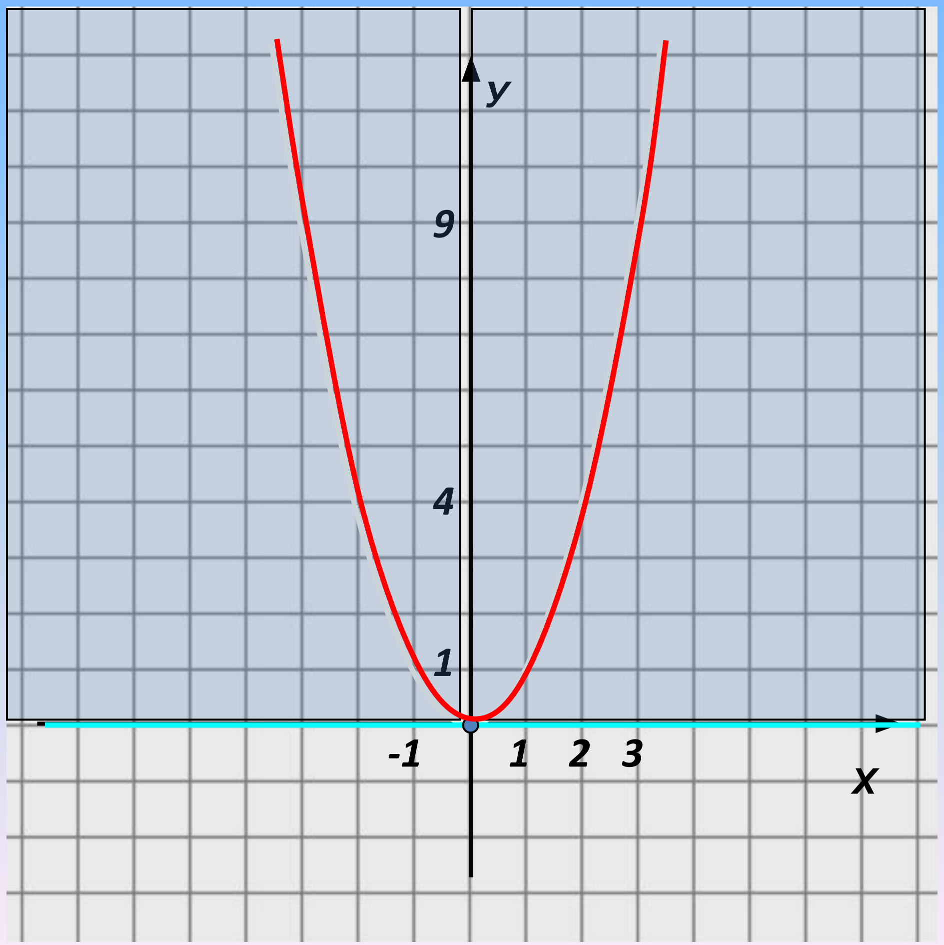


Построим графики функций $y = x^2$ $y = 2x^2$ $y = \frac{1}{2}x^2$ $y = -\frac{1}{2}x^2$

и исследуем их свойства.

1) $y = x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9



1. D(y): R

2. y=0, если x=0

3. y>0, если x $\in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$

4. y↓, если x $\in (-\infty;0]$

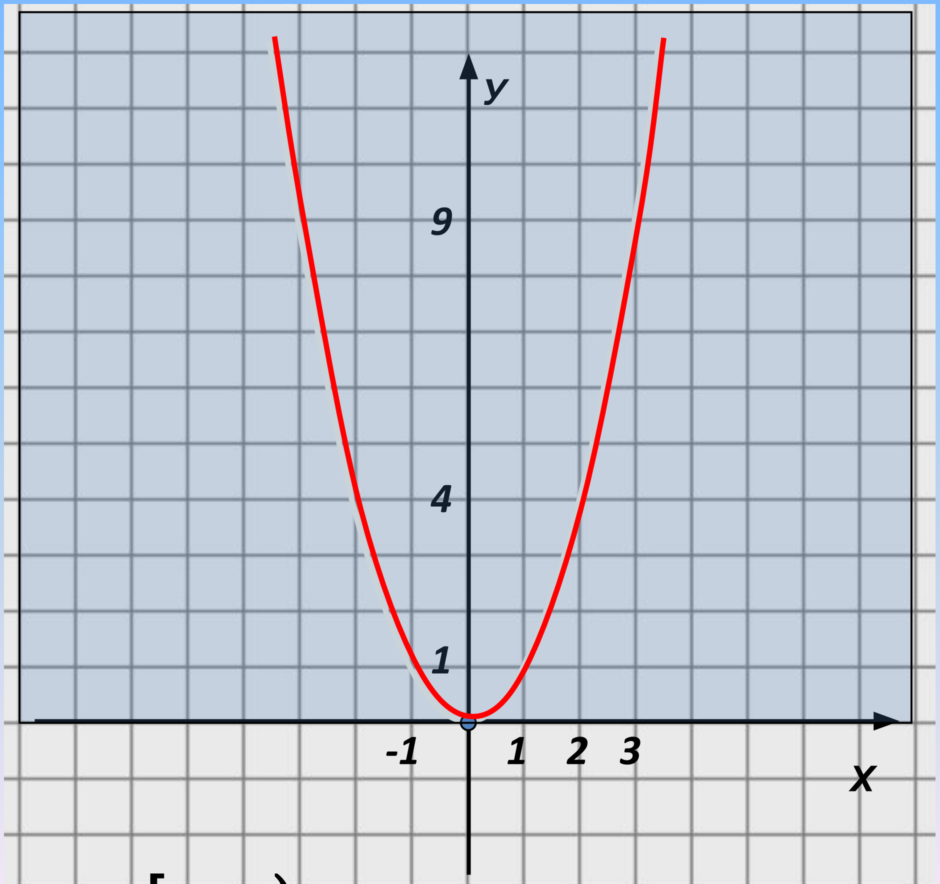
y↑, если x $\in [0;+\infty)$

Построим графики функций $y = x^2$ $y = 2x^2$ $y = \frac{1}{2}x^2$ $y = -\frac{1}{2}x^2$

и исследуем их свойства.

1) $y = x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9



1. D(y): R

2. y=0, если x=0

3. y>0, если x $\in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

4. y↓, если x $\in (-\infty; 0]$

y↑, если x $\in [0; +\infty)$

5. $y_{наим}$=0, если x=0

$y_{наиб}$ – не существует.

6. E(y): $[0; +\infty)$

Построим графики функций $y = x^2$ $y = 2x^2$ $y = \frac{1}{2}x^2$ $y = -\frac{1}{2}x^2$

и исследуем их свойства.

2) $y = 2x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	18	8	2	0	2	8	18

Есть ли различия в свойствах по сравнению с предыдущей функцией?

Чем отличается график?

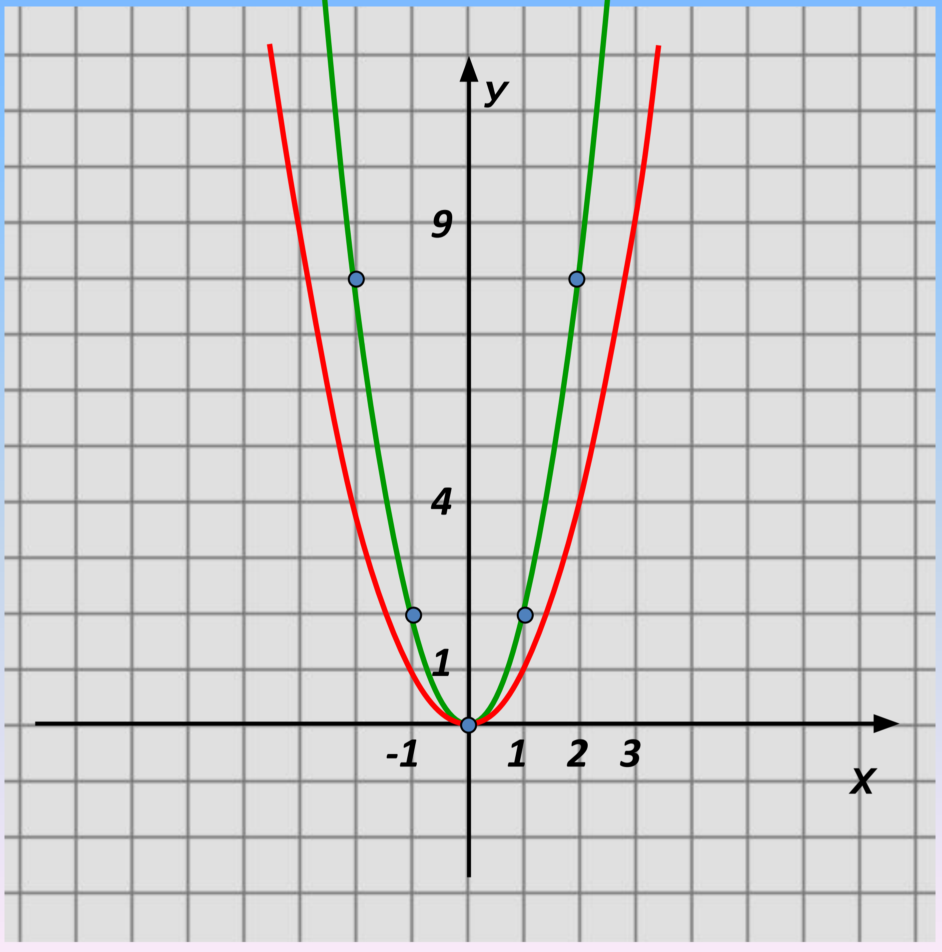


График функции $y=kx^2$ может быть получен из графика функции $y=x^2$ путем растяжения его вдоль оси Oy в k раз (k-натуральное число).

Построим графики функций $y = x^2$ $y = 2x^2$ $y = \frac{1}{2}x^2$ $y = -\frac{1}{2}x^2$

и исследуем их свойства.

3) $y = \frac{1}{2}x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5

Есть ли различия в свойствах по сравнению с первой функцией?

Чем отличается график?

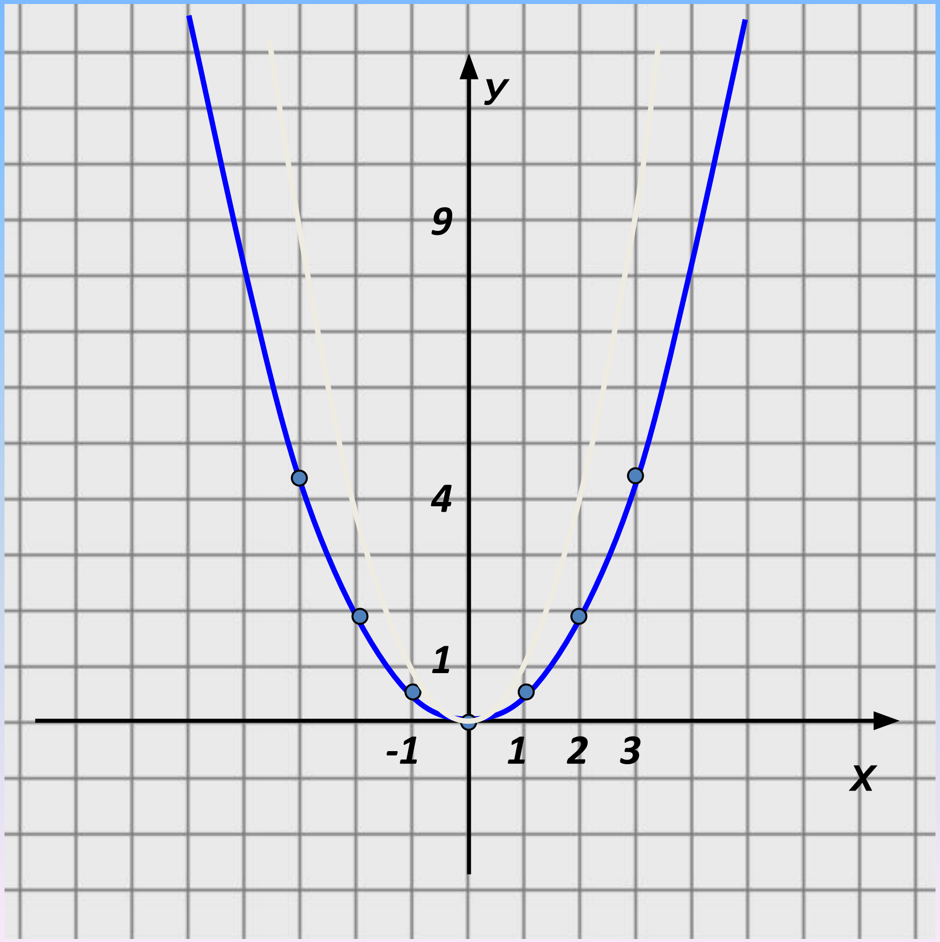


График функции $y=\frac{1}{k} \cdot x^2$ может быть получен из графика функции $y=x^2$ путем сжатия его вдоль оси Оу в k раз (k-натуральное число).

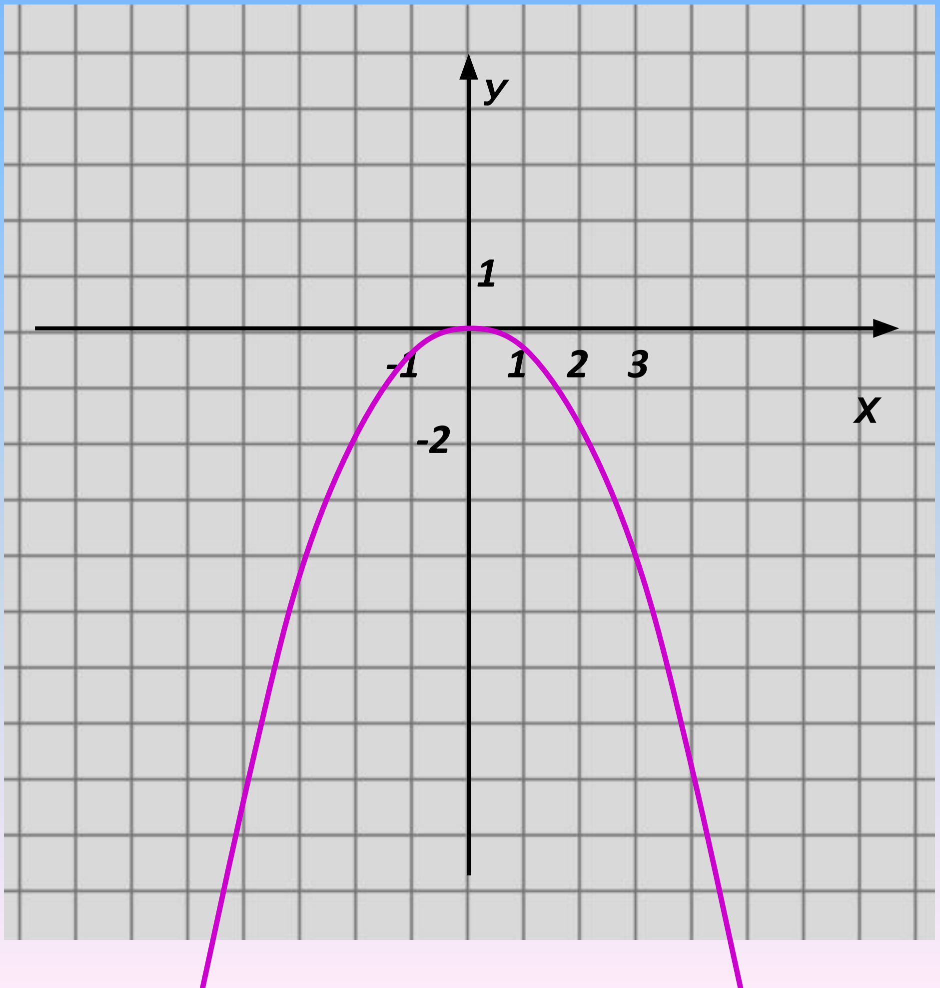
Построим графики функций $y = x^2$ $y = 2x^2$ $y = \frac{1}{2}x^2$ $y = -\frac{1}{2}x^2$

и исследуем их свойства.

4) $y = -\frac{1}{2}x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-4,5	-2	-0,5	0	-0,5	-2	-4,5

Есть ли различия в свойствах по сравнению с предыдущей функцией?

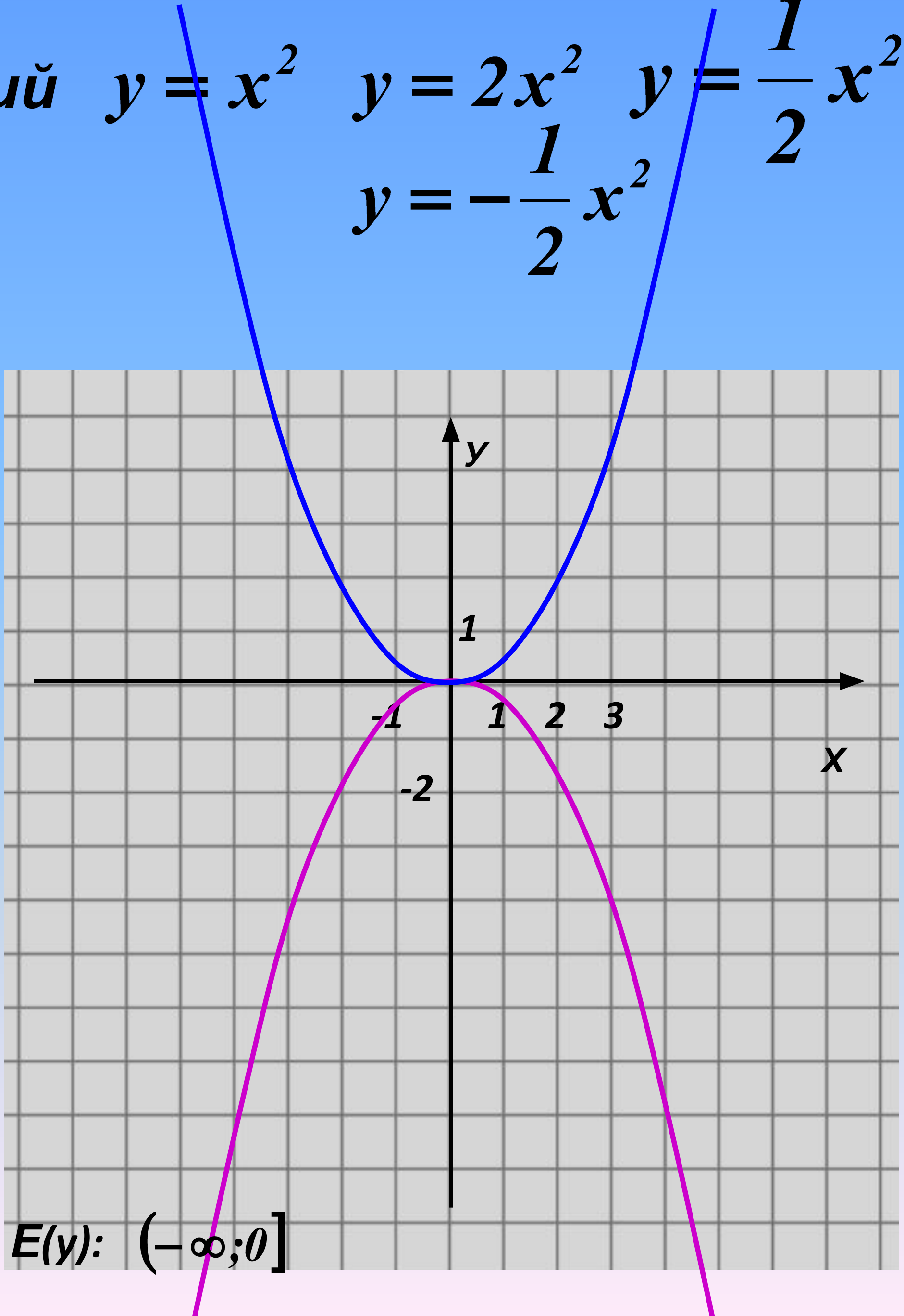


Построим графики функций $y = x^2$ $y = 2x^2$ $y = \frac{1}{2}x^2$ $y = -\frac{1}{2}x^2$

и исследуем их свойства.

4) $y = -\frac{1}{2}x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-4,5	-2	-0,5	0	-0,5	-2	-4,5



1. D(y): R

2. y=0, если x=0

3. y<0, если x $\in (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

4. y↑, если x $\in (-\infty;0]$

y↓, если x $\in [0;+\infty)$

5. $y_{наиб}$=0, если x=0

$y_{наим}$ – не существует.

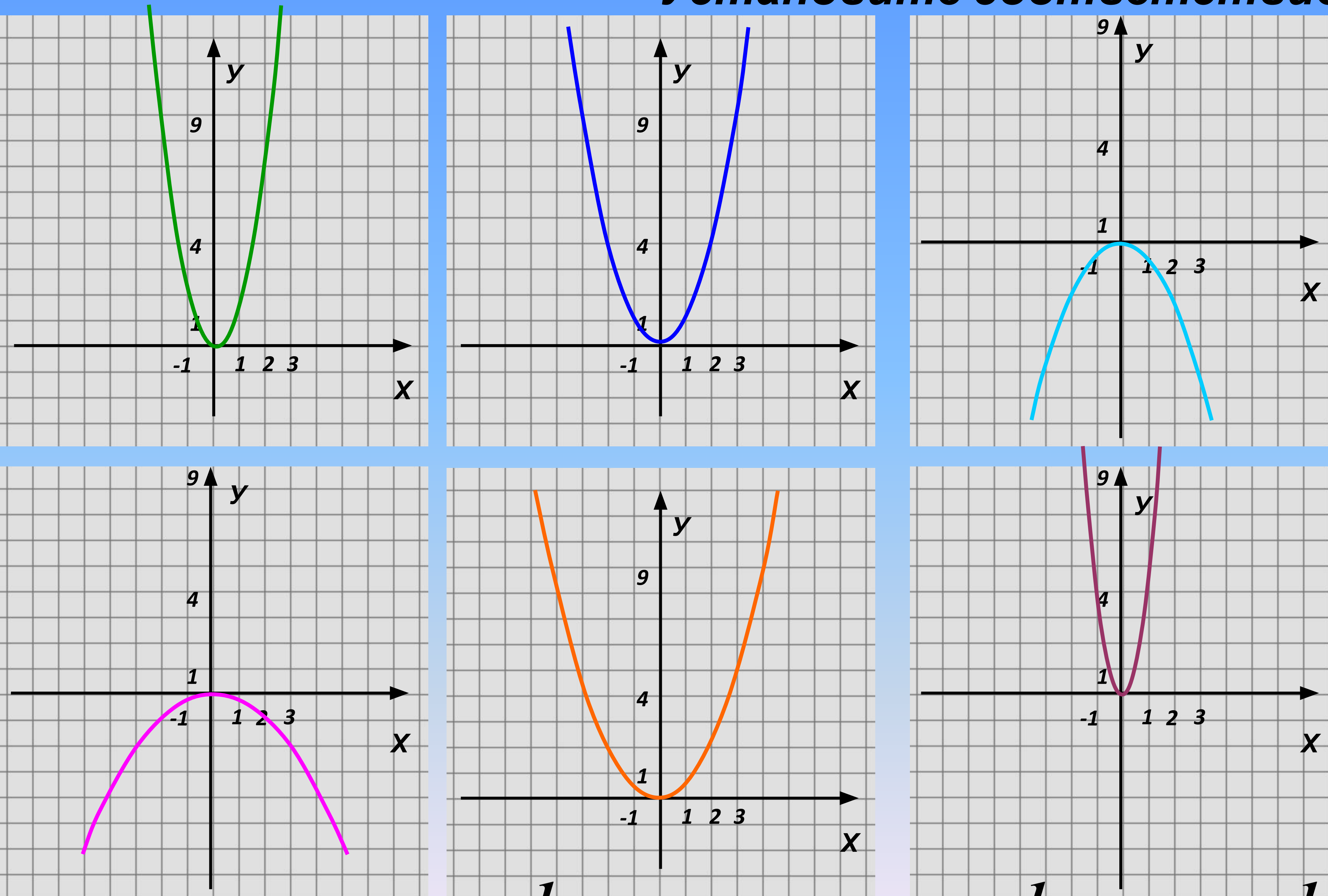
6. E(y): $(-\infty;0]$

График функции $y=ax^2$ симметричен графику функции $y=-ax^2$ относительно оси Ох.

Если $a>0$, то ветви параболы направлены…

Если $a<0$, то ветви параболы направлены…

Установите соответствие:



$y = x^2$ $\quad y = 2x^2$ $\quad y = -\dfrac{1}{4}x^2$ $\quad y = 4x^2$ $\quad y = \dfrac{1}{2}x^2$ $\quad y = -\dfrac{1}{2}x^2$