

Методы решения

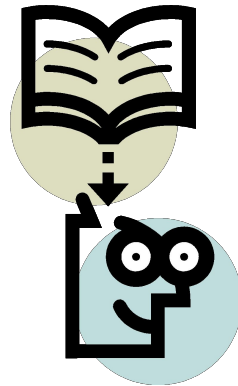
логарифмических

уравнений



МОУ лицей №1
г. Комсомольск –на - Амуре

Учитель математики: О.С. Чупрова



2007 г.

1. Уравнения, решаемые по определению

$$\log_a b = c,$$

$$a^c = b, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0$$

Пример:

$$\log_3(2-x)=2$$

$$2-x=3^2$$

$$2-x=9$$

$$-x=6$$

$$x=-6$$

Ответ: $x=-6$

$$\underline{\text{ОДЗ:}} \quad 2-x > 0$$

$$x < 2$$



2. Уравнения, решаемые с

ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОСНОВНЫХ СВОЙСТВ

$$\log_a(bc) = \log_a |b| + \log_a |c|$$

$$\log_a(b/c) = \log_a |b| - \log_a |c|$$

$$\log_a b^p = p \log_a |b|$$

Пример:

$$\log_2(x+1) + \log_2(x+2) = 1$$

$$\log_2(x+1)(x+2) = 1$$

$$(x+1)(x+2) = 2^1$$

$$x^2 + 3x = 0$$

$$x(x+3) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -3 \text{ (не уд. ОДЗ)}$$

Ответ: $x = 0$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \begin{cases} x > -1 \\ x > -2 \end{cases} \\ x > -1$$



3. Метод потенцирования

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$



$$f(x) > 0$$

$$g(x) > 0$$

$$f(x) = g(x)$$

Пример:

$$\lg(x-4) + \lg(x-6) = \lg 8$$

$$\lg(x-4)(x-6) = \lg 8$$

$$(x-4)(x-6) = 8$$

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$x_1 = 8$$

$$x_2 = 2 \text{ (не уд. ОДЗ)}$$

Ответ: $x = 8$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x-4 > 0 \\ x-6 > 0 \end{cases} \begin{cases} x > 4 \\ x > 6 \end{cases} \Rightarrow x > 6$$



4. Метод подстановки

а) Уравнения, сводящиеся к квадратным

Пример 1:

$$\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$$

$$\underline{\text{ОДЗ:}} \quad x > 0$$

пусть $\lg x = t$, $t \in \mathbb{R}$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t_1 = 1 \quad t_2 = 2$$

если $t_1 = 1$, то

если $t_2 = 2$, то

$$\lg x = 1$$

$$\lg x = 2$$

$$x = 10$$

$$x = 100$$

Ответ: $x_1 = 10$, $x_2 = 100$

Пример 2:

$$\lg^2(10x) = 5 - \lg x \quad \text{ОДЗ: } x > 0$$

$$(\lg 10 + \lg x)^2 = 5 - \lg x$$

$$1 + 2\lg x + \lg^2 x - 5 + \lg x = 0$$

$$\lg^2 x + 3\lg x - 4 = 0$$

пусть $\lg x = t$

$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$t_1 = 1; \quad t_2 = -4$$

если $t_1 = 1$, то

$$\lg x = 1$$

$$x = 10$$

если $t_2 = -4$, то

$$\lg x = -4$$

$$x = 0,0001$$

Ответ: $x_1 = 10, \quad x_2 = 0,0001$



б) Использование формулы

$$\log_a b = 1 / \log_b a$$

Пример:

$$\log_x(9x^2)\log^2_3 x=4$$

$$(\log_x 9 + \log_x x^2)\log^2_3 x=4$$

$$(2\log_x 3 + 2)\log^2_3 x=4$$

$$(2/\log_3 x + 2)\log^2_3 x=4$$

пусть $\log_3 x = t$ $(2/t + 2)t^2 = 4$

$$2t^2 + 2t - 4 = 0$$

$$t_1 = 1; \quad t_2 = -2$$

если $t_1 = 1$, то

$$\log_3 x = 1; \quad x_1 = 3;$$

$$x_2 = 1/9.$$

Ответ: $x_1 = 3, x_2 = 1/9$

ОДЗ:

$$x > 0$$

$$x \neq 1$$

если $t_2 = -2$, то
 $\log_3 x = -2.$

5. Метод приведения к одному основанию

$$\log_a b = \log_c b / \log_c a$$

$a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1, c \neq 1$

Пример:

$$\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11 \quad \text{ОДЗ: } x > 0$$

$$\log_2 x + \log_{2^2} x + \log_{2^3} x = 11$$

$$\log_2 x + 1/2 \log_2 x + 1/3 \log_2 x = 11$$

$$11/6 \log_2 x = 11$$

$$\log_2 x = 6$$

$$x = 2^6$$

$$x = 64$$

Ответ: $x = 64$



6. Метод логарифмирования

$$\log_a b^p = p \log_a b$$

$b > 0; a > 0; a \neq 1$

Пример:

$$x^{(\lg x + 5)/3} = 10^{5 + \lg x}$$

$$\text{ОДЗ: } x > 0$$

прологарифмируем уравнение по основанию 10

$$\lg x^{(\lg x + 5)/3} = \lg 10^{5 + \lg x}$$

$$((\lg x + 5)/3) \lg x = (5 + \lg x) \lg 10$$

$$1/3(\lg x + 5) \lg x = 5 + \lg x \quad | *3$$

$$(\lg x + 5) \lg x = 15 + 3 \lg x$$

$$\lg^2 x + 5 \lg x = 15 + 3 \lg x$$

$$\lg^2 x + 2 \lg x - 15 = 0$$

пусть $\lg x = t$

$$t^2 + 2t - 15 = 0$$

$$t_1 = -5; \quad t_2 = 3$$

если $t_1 = -5$, то $\lg x = -5$

$$x_1 = 0,00001$$

если $t_2 = 3$, то $\lg x = 3$

$$x_2 = 1000$$

Ответ: $x_1 = 0,00001$, $x_2 = 1000$

7.Использование специальной формулы

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

$$b > 0; b \neq 1 \quad a > 0; a \neq 1;$$

$$c > 0; c \neq 1$$

Пример:

$$3x^{\log_5 2} + 2^{\log_5 x} = 64$$

$$3 \cdot 2^{\log_5 x} + 2^{\log_5 x} = 64$$

$$4 \cdot 2^{\log_5 x} = 64 \quad | :4$$

$$2^{\log_5 x} = 16$$

$$2^{\log_5 x} = 2^4$$

$$\log_5 x = 4$$

$$x = 5^4$$

$$x = 625$$

Ответ: $x = 625$

ОДЗ: $x > 0$



8. Использование свойств монотонности функции

Пример:

$$\log_3(x+1) + \log_4(5x+6) = 3 \quad \text{ОДЗ: } x > -1,2$$

$y = \log_3(x+1)$ - возрастающая функция

$y = \log_4(5x+6)$ - возрастающая функция

3 - const

Сумма двух возрастающих функций равна возрастающей функции.

Используем утверждение: если возр. функция равна const или убыв. функции, тогда уравнение имеет один корень, который находится с помощью метода подбора.

Ответ: $x=2$

9. Использование свойств ограниченности функции

Пример:

$$\log_2(17 - |\sin 0,5\pi x|) = \sqrt{2x+15} - x^2$$

1) рассмотрим левую часть

т.к. $0 \leq |\sin 0,5\pi x| \leq 1$, то

$$\log_2(17 - |\sin 0,5\pi x|) \geq \log_2(17 - 1) = \log_2 16 = 4 \text{ т.е.}$$

$$0 \leq |\sin 0,5\pi x| \leq 4$$

при $x=1$ - достигается равенство

2) рассмотрим правую часть

$$\sqrt{2x+15} - x^2 = \sqrt{16 - (x-1)^2} \leq \sqrt{16} = 4 = 16 - (x-1)^2$$

$$\sqrt{2x+15} - x^2 \leq 4$$

при $x=1$ - достигается равенство

Ответ: $x=1$



10. Однородные уравнения

II степени

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0 \quad | : y^2 \neq 0$$

$$a(x/y)^2 + b(x/y) + c = 0$$

$$at^2 + bt + c = 0$$

Пример:



$$3\log_2^2(x+1) - 4\log_2(2x+1)\log_2(x+1) + \log_2^2(2x+1)$$

Делим на $\log_2^2(2x+1)$

ОДЗ: $x > -1/2$

$$3(\log_2(x+1)/\log_2(2x+1))^2 - 4\log_2(2x+1)\log_2(x+1)/\log_2^2(2x+1) + 1 = 0$$

†

$$3t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$t_1 = 1 \quad t_2 = 1/3$$

если $t_1 = 1$ то,

$$\log_2(x+1)/\log_2(2x+1) = 1$$

$$\log_2(x+1) = \log_2(2x+1)$$

$$x+1 = 2x+1$$

$$x = 0$$

$$x_3 = (-3 - \sqrt{5})/2$$

Ответ: $x_1 = 0, x_2 = (-3 + \sqrt{5})/2$

если $t_2 = 1/3$ то,

$$\log_2(x+1)/\log_2(2x+1) = 1/3$$

$$3\log_2(x+1) = \log_2(2x+1)$$

$$\log_2(x+1)^3 = 2x+1$$

$$x(x^2 + 3x + 1) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = (-3 + \sqrt{5})/2$$

не уд.

11. Уравнения, содержащие неизвестное в основании и показателе степени

Пример:

$$x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$$

$$\log_x x^{\sqrt{x}} = \log_x \sqrt{x^x}$$

$$\log_x x^{x^{0,5}} = \log_x (x^{0,5})^x$$

$$\sqrt{x} \log_x x = 0,5 \log_x x$$

$$\sqrt{x} = 0,5x$$

$$\sqrt{x}(1 - 0,5\sqrt{x}) = 0$$

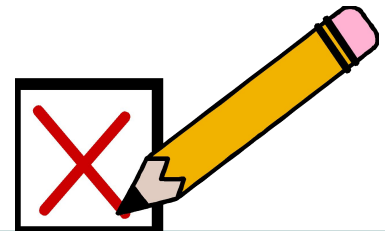
$$\sqrt{x} = 0 \text{ (не уд. ОДЗ)}$$

$$x = 4$$

Ответ: $x = 4$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1 - 0,5\sqrt{x}) &= 0 \\ \sqrt{x} &= 2 \end{aligned}$$

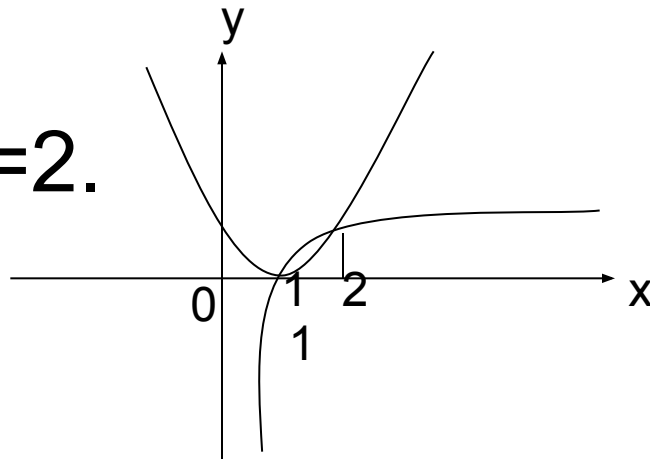


12. Функционально - графический метод

$$(x - 1) = \log_2 x$$

Строим графики функций $y = (x - 1)$ и $y = \log_2 x$.

Ответ: $x = 1$, $x=2$.



Решить самостоятельно

- $\lg(x^2 - 2x) = \lg 30 - 1$;
- $\lg(x^2 + 2x - 3) = \lg(6x - 2)$;
- $\log_3 x \cdot \log_2 x = 4 \log_3 2$;
- $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 1/12$;
- $\log_5(x - 10) - \log_5(x + 2) = -1$;
- $3 + 2\log_{x+1} 3 = 2\log_3(x + 1)$.

Литература:

- Математика. Тренировочные тематические задания ЕГЭ повышенной сложности. Сост. Г.И. Ковалева и др. «Учитель». Волгоград. 2005.
- Математика. ЕГЭ. Эффективная подготовка. Л.Д. Лаппо, М.А. Попов. «Экзамен». Москва. 2007.

