

Методы решения иррациональных уравнений

Учитель: Гавриленко Л.М.

МОУ г.Мурманска гимназия №2



Метод возведения в степень

Пример 1.

$$\sqrt{5x-1} = 2x-1$$

$$5x-1 = 4x^2-4x+1$$

$$4x^2-9x+2=0$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm 7}{8}$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = \frac{1}{4}$$

Проверка: $x = \frac{1}{4}$ посторонний корень

Ответ: 2.

Пример

2.

$$\sqrt{8x+1} + \sqrt{3x-5} = \sqrt{7x+4} + \sqrt{2x-2}$$

$$\sqrt{8x+1} - \sqrt{2x-2} = \sqrt{7x+4} - \sqrt{3x-5}$$

$$8x + 1 + 2x - 2 - 2\sqrt{(8x+1)(2x-2)} = 7x + 4 + 3x - 5 - 2\sqrt{(7x+4)(3x-5)}$$

$$(8x+1)(2x-2) = (7x+4)(3x-5)$$

$$x = 3; \quad x = -\frac{6}{5}$$

Проверка: $x = \frac{6}{5}$ — посторонний
- $\frac{6}{5}$ — корень

Ответ: 3.

Метод составления смешанной

СИСТЕМЫ

Решение уравнений

Решение уравнений вида

Пример

$$x - \sqrt{x + 2} = 4,$$

$$\sqrt{x - 4} + 2 = \sqrt{x + 2};$$

$$\sqrt{f(x)} = \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) \geq 0, \\ f(x) = \varphi^2(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \varphi(x), \\ f(x) \geq 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \varphi(x), \\ f(x) \geq 0, \end{cases}$$

$$(\text{либо } \varphi(x) \geq 0),$$

$$\begin{cases} x - 4 \geq 0, \\ x + 2 = (x - 4)^2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 4, \\ x^2 - 9x + 14 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 7, \Leftrightarrow x = 7. \\ x = 2; \end{cases}$$

Ответ:

7.

Метод введения новой переменной

Пример

$$1. \sqrt{x+32} - 2\sqrt[4]{x+32} = 3$$

Пусть $\sqrt[4]{x+32} = a ; a \geq 0$

$$a^2 - 2a - 3 = 0$$

$a_1 = -1$ не удовлетворяет

$$a \geq 0$$

условию

$a_2 =$

$$\sqrt[4]{x+32} = 3$$

$$x + 32 = 81$$

$$x = 49$$

Ответ: 49.

Пример


2.
$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 1$$

Пусть $\sqrt{x - 1} = y, \quad y \geq 0$

$$x = y^2 + 1$$
$$\sqrt{y^2 - 4y + 4} + \sqrt{y^2 - 6y + 9} = 1$$

$$\sqrt{(y - 2)^2} + \sqrt{(y - 3)^2} = 1$$

$$|y - 2| + |y - 3| = 1$$



1)
$$\begin{cases} y < 2 \\ 2 - y + 3 - y = 1 \end{cases}$$

$$y = 2$$

Решений нет

2)
$$\begin{cases} 2 \leq y \leq 3 \\ y - 2 + 3 - y = 1 \end{cases}$$

$$1 = 1$$

$$2 \leq y \leq 3$$

$$2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$$

$$4 \leq x-1 \leq 9$$


$$5 \leq x \leq 10$$

3)
$$\begin{cases} y > 3 \\ y - 2 + y - 3 = 1 \end{cases}$$

$$y = 3$$

Решений нет

Ответ: [5; 10]



Метод разложения подкоренного выражения на множители

Пример $\sqrt{2x^2 + 21x - 11} - \sqrt{2x^2 - 9x + 4} = \sqrt{18x - 9}$

$$\sqrt{(2x-1)(x-11)} - \sqrt{(2x-1)(x-4)} - 3\sqrt{2x-1} = 0$$

$$\sqrt{2x-1}(\sqrt{x-11} - \sqrt{x-4} - 3) = 0$$

$$2x-1=0 \quad \text{или} \quad \sqrt{x-11} = \sqrt{x-4} + 3$$

$$x=0,5 \quad x-11 = x-4 + 6\sqrt{x-4} + 9$$

$$6\sqrt{x-4} = -16$$

решений

Проверка: $\sqrt{2 \cdot \frac{1}{4} + 21 \cdot \frac{1}{2} - 11} - \sqrt{2 \cdot \frac{1}{4} - 9 \cdot \frac{1}{2} + 4} = \sqrt{18 \cdot \frac{1}{2} - 9}$

$$\sqrt{11-11} - \sqrt{-4+4} = 0$$

Ответ: 0,5.

верно

Метод умножения на сопряженное

Пример

выражение

$$(1) \quad \sqrt{3x^2 + 5x + 8} - \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1 \quad | \cdot (\sqrt{3x^2 + 5x + 8} + \sqrt{3x^2 + 5x + 1})$$

$$\left(\sqrt{3x^2 + 5x + 8}\right)^2 - \left(\sqrt{3x^2 + 5x + 1}\right)^2 = \sqrt{3x^2 + 5x + 8} + \sqrt{3x^2 + 5x + 1}$$

$$\sqrt{3x^2 + 5x + 8} + \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 7$$

Сложим данное уравнение с уравнением (1), получим:

$$2\sqrt{3x^2 + 5x + 8} = 8 \quad | : 2$$

$$\sqrt{3x^2 + 5x + 8} = 4$$

$$3x^2 + 5x + 8 = 16$$

$$3x^2 + 5x - 8 = 0$$

$$x_1 = -\frac{8}{3} \quad x_2 = 1$$

Проверкой убеждаемся, что x_1, x_2 - корни уравнения.

Ответ: $-\frac{8}{3}; 1.$

Метод замены иррациональных уравнений системой рациональных уравнений

Пример

$$\sqrt[3]{-x-1} = 1 - \sqrt{x+2}$$

1.

$$\begin{cases} \sqrt[3]{-x-1} = a, \\ \sqrt{x+2} = b, b \geq 0, \\ a + b = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} -x-1 = a^3, \\ x+2 = b^2, \\ a + b = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = a^3 + b^2, \\ a + b = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = a^3 + b^2, \\ b = 1 - a; \end{cases}$$

$$a^3 + 1 - 2a + a^2 = 1$$

$$a^3 + a^2 - 2a = 0$$

$$a_1 = 0$$

$$\sqrt[3]{-x-1} = 0$$

$$x = -1$$

$$a_2 = 1$$

$$\sqrt[3]{-x-1} = 1$$

$$x = -2$$

$$a_3 = -$$

$$\sqrt[3]{-x-1} = -2$$

$$x =$$

7

Ответ: -2; -1; 7.

Использование монотонности

Теорема. Если функция $y = f(x)$ строго возрастает (убывает) на некотором промежутке I , то уравнение $f(x) = C$, где C – некоторое действительное число, имеет не более

одного

решения на промежутке I .

Пример.

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{5x+5} = 8$$

$$f(x) = \sqrt{2x+1} + \sqrt{5x+5} = \left[\begin{array}{l} \text{возрастает на } D(f) \\ -\frac{1}{2}; +\infty \end{array} \right)$$

$$f(x) = 8$$

$$x = 4$$

Ответ: 4.

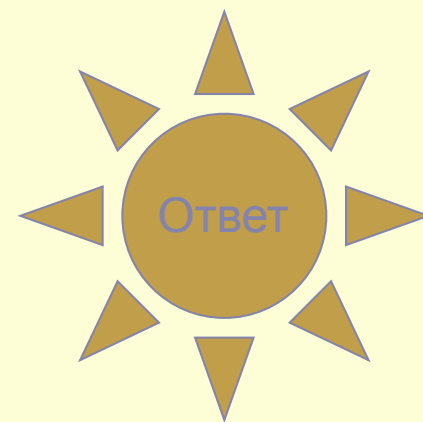
Самостоятельная работа

Задание: решите уравнение.

При решении уравнений вы
можете воспользоваться
подсказкой метода решения

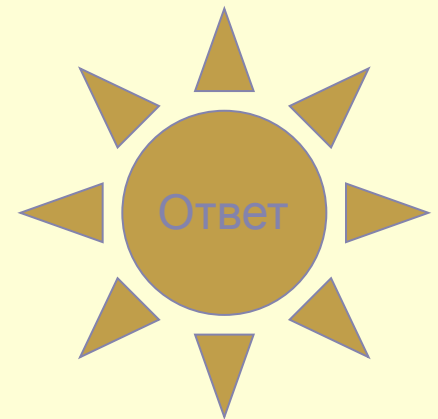


или, решив уравнение,
проверить ответ



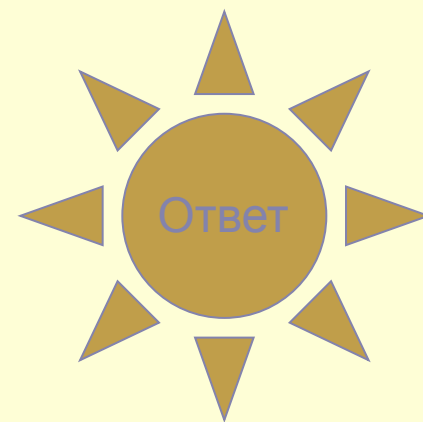
Пример 1.

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\dots}}} = 2$$



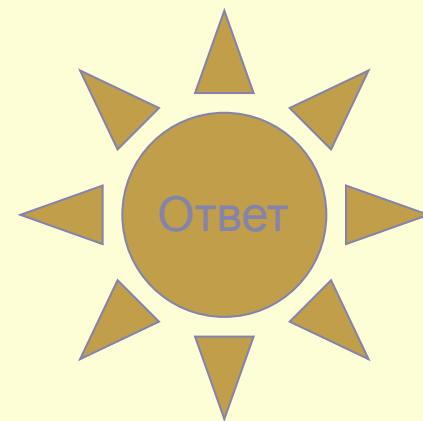
Пример 2.

$$\sqrt{\frac{2-x}{2+x}} - 4\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} = -3$$



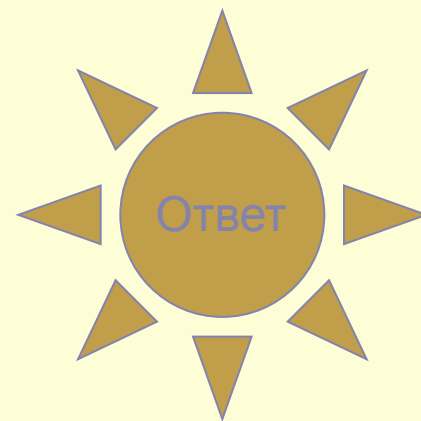
Пример 3.

$$\sqrt{x-3} = \sqrt{x^2 - 2x - 7}$$



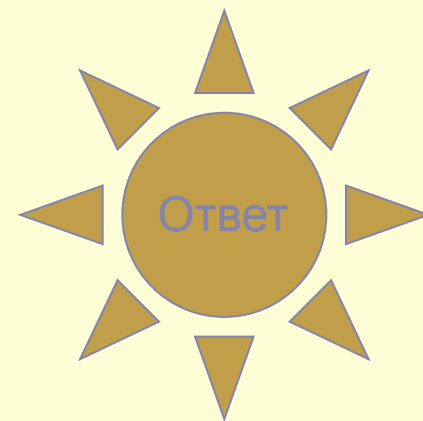
Пример 4.

$$\sqrt{2x^2 + 8x + 7} - \sqrt{2x^2 - 8x + 7} = 2x$$



Пример 5.

$$\sqrt[3]{x + 34} - \sqrt[3]{x - 3} = 1$$



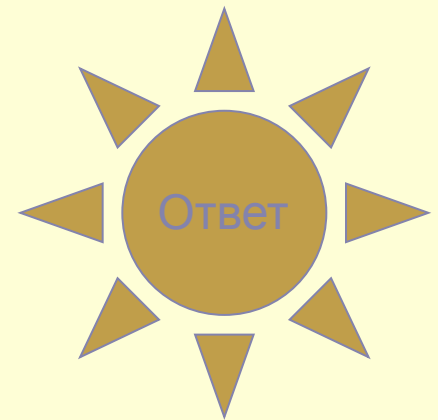
Пример 6.

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2}$$



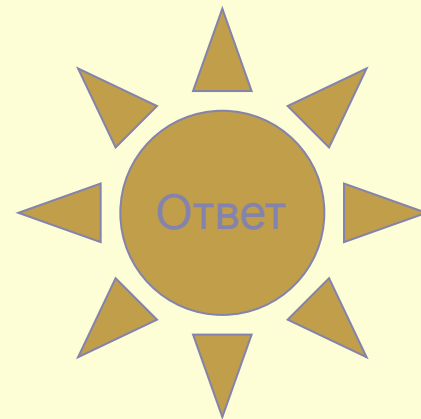
Пример 7.

$$\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[8]{7x-6} = 2$$



Пример 8.

$$\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{-x^2 + 3x - 2} = \sqrt{x^2 - x}$$



Пример

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\dots}}} = 2$$

1.

$$x \sqrt{x\sqrt{x\dots}} = 4$$

Т.к. $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\dots}}} = 2$, то

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

Проверка: $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{8}} \cdot \dots = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^1 = 2$

Показатели степени образуют бесконечную убывающую геометрическую прогрессию, сумму которой можно найти по формуле

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

next

Пример

2.

$$\sqrt{\frac{2-x}{2+x}} - 4\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} = -3$$

next

Пусть $\sqrt{\frac{2-x}{2+x}} = y$, $y > 0$. Получим уравнение

$$y - \frac{4}{y} = -3$$

$$\text{Тогда } y^2 + 3y - 4 = 0$$

$y_1 = 1$, $y_2 = -4$ (не удовлетворяет условию $y >$

$$\begin{aligned} 0) \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} &= 1 \\ \sqrt{2-x} &= \sqrt{2+x} \end{aligned}$$

$$x = 0$$

Проверка показывает, что 0 является корнем уравнения.

Ответ: 0.

Пример 3.

$$\sqrt{x-3} = \sqrt{x^2 - 2x - 7}$$

$$\begin{cases} x-3 = x^2 - 2x - 7, \\ x-3 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0, \\ x \geq 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ x = -1, \\ x \geq 3; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x = 4$$

Ответ: 4.

next

Пример 4.

$$(1) \sqrt{2x^2 + 8x + 7} - \sqrt{2x^2 - 8x + 7} = 2x \quad | \cdot (\sqrt{2x^2 + 8x + 7} + \sqrt{2x^2 - 8x + 7})$$

$$\left(\sqrt{2x^2 + 8x + 7}\right)^2 - \left(\sqrt{2x^2 - 8x + 7}\right)^2 = 2x\left(\sqrt{2x^2 + 8x + 7} + \sqrt{2x^2 - 8x + 7}\right)$$

$$2x\left(\sqrt{2x^2 + 8x + 7} + \sqrt{2x^2 - 8x + 7}\right) = 16x$$

$$x=0 \quad \text{или} \quad \left(\sqrt{2x^2 + 8x + 7} + \sqrt{2x^2 - 8x + 7}\right) = 8$$

Сложим данное уравнение с уравнением (1),

получим

$$2\sqrt{2x^2 + 8x + 7} = 2x + 8$$

$$\sqrt{2x^2 + 8x + 7} = x + 4$$

$$\begin{cases} x + 4 \geq 0, \\ 2x^2 + 8x + 7 = (x + 4)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4, \\ \begin{cases} x = -3, \\ x = 3; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, \\ x = 3. \end{cases}$$

Ответ: -3; 0;
3.

next

Пример
5.

$$\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$$

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+34} = a, \\ \sqrt[3]{x-3} = b, \\ a - b = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 = x+34, \\ b^3 = x-3, \\ a = b+1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - b^3 = 37, \\ a - b = 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)(a^2 + ab + b^2) = 37, \\ a - b = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 37, \\ a = b+1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b+1, \\ 3b^2 + 3b - 36 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b+1, \\ b^2 + b - 12 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b+1, \\ b = 3, \\ b = -4. \end{cases}$$

$$1) \sqrt[3]{x-3} = 3$$

$$x - 3 = 27$$

$$-64$$

$$x = 30$$

$$2) \sqrt[3]{x-3} = -4$$

$$x - 3 =$$

$$x = -61$$

Ответ: -61; 30.

next

Пример

6.

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{2x-5} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2}$$

Пусть $\sqrt{2x-5} = y, \quad y \geq 0$

$$2x - 5 = y^2 \quad x = \frac{y^2 + 5}{2}$$

$$\sqrt{\frac{y^2 + 5}{2} - 2 + y} + \sqrt{\frac{y^2 + 5}{2} + 2 + 3y} = 7\sqrt{2}$$

$$\sqrt{\frac{(y+1)^2}{2}} + \sqrt{\frac{(y+3)^2}{2}} = 7\sqrt{2} \quad | \quad \sqrt{2}$$

$$|y + 1| + |y + 3| = 14,$$

т.к. $y \geq 0$, то $|y + 1| = y + 1, \quad |y + 3| = y + 3$

$$y + 1 + y + 3 = 14$$

$$2y = 10$$

$$y = 5$$

Тогда $x = 15$.

Ответ: 15.

next

Пример

$$\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[8]{7x-6} = 2$$

Пусть $f(x) = \sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[8]{7x-6}$

$$D(f) = \left[\frac{6}{7}; +\infty \right)$$

Т.к. данная функция строго возрастает на $D(f)$, то уравнение $f(x) = 2$ имеет не более одного корня на указанном промежутке.

Подбором определяем: $x = 1$.

Ответ: 1.

next

Метод введения новой переменной

$$\sqrt{x + 32} - 2\sqrt[4]{x + 32} = 3$$

Пусть $\sqrt[4]{x + 32} = a ; a \geq 0$

$$a^2 - 2a - 3 = 0$$

$a_1 = -1$ не удовлетворяет

$$a \geq 0$$

условию

$a_2 =$

$$\sqrt[3]{x + 32} = 3$$

$$x + 32 = 81$$

$$x = 49$$

Ответ: 49.

назад

Метод составления смешанной СИСТЕМЫ

Решение уравнений
вида

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{\varphi(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \varphi(x), \\ f(x) \geq 0, \\ (\text{либо } \varphi(x) \geq 0). \end{cases}$$

назад

Метод умножения на сопряженное выражение

$$(1) \sqrt{3x^2 + 5x + 8} - \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1 \quad | \cdot (\sqrt{3x^2 + 5x + 8} + \sqrt{3x^2 + 5x + 1})$$

$$\left(\sqrt{3x^2 + 5x + 8}\right)^2 - \left(\sqrt{3x^2 + 5x + 1}\right)^2 = \sqrt{3x^2 + 5x + 8} + \sqrt{3x^2 + 5x + 1}$$

$$\sqrt{3x^2 + 5x + 8} + \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 7$$

$$\sqrt{3x^2 + 5x + 8} = 4$$

$$3x^2 + 5x + 8 = 16$$

$$3x^2 + 5x - 8 = 0$$

$$x_1 = -\frac{8}{3} \quad x_2 = 1$$

Проверкой убеждаемся, что x_1 , x_2 - корни уравнения.

Ответ: $-\frac{8}{3}$; 1.

назад

Метод замены иррациональных уравнений системой рациональных уравнений

$$\sqrt[3]{-x-1} = 1 - \sqrt{x+2}$$

$$\begin{cases} \sqrt[3]{-x-1} = a, \\ \sqrt{x+2} = b, b \geq 0, \\ a + b = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} -x-1 = a^3, \\ x+2 = b^2, \\ a + b = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = a^3 + b^3, \\ a + b = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = a^3 + b^3, \\ b = 1 - a; \end{cases}$$

$$a^3 + 1 - 2a + a^2 = 1$$

$$a^3 + a^2 - 2a = 0$$

$$a_1 = 0$$

$$\sqrt[3]{-x-1} = 0$$
$$x = -1$$

$$a_2 = 1$$

$$\sqrt[3]{-x-1} = 1$$
$$x = -2$$

$$a_3 = -$$

$$\sqrt[3]{-x-1} = -2$$
$$x =$$

7

назад

Ответ: -2; -1; 7.

Использование монотонности

Теорема. Если функция $y = f(x)$ строго возрастает (убывает) на некотором промежутке I , то уравнение $f(x) = C$, где C – некоторое действительное число, имеет не более

одного

решения на промежутке I .

Пример.

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{5x+5} = 8$$

$$f(x) = \sqrt{2x+1} + \sqrt{5x+5} = \left[\begin{array}{l} \text{возрастает на } D(f) \\ -\frac{1}{2}; +\infty \end{array} \right)$$

$$f(x) = 8$$

$$x = 4$$

Ответ: 4.

назад

Метод введения новой

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$$


Пусть $\sqrt{x-1} = y, \quad y \geq 0$

$$x = y^2 + 1$$

$$\sqrt{y^2 - 4y + 4} + \sqrt{y^2 - 6y + 9} = 1$$

$$\sqrt{(y-2)^2} + \sqrt{(y-3)^2} = 1$$

$$|y-2| + |y-3| = 1$$



1)
$$\begin{cases} y < 2 \\ 2 - y + 3 - y = 1 \end{cases}$$

$$y = 2$$

Решений нет

2)
$$\begin{cases} 2 \leq y \leq 3 \\ y - 2 + 3 - y = 1 \end{cases}$$

$$1 = 1$$

$$2 \leq y \leq 3$$

3)
$$\begin{cases} y > 3 \\ y - 2 + y - 3 = 1 \end{cases}$$

$$y = 3$$

Решений нет

$$2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$$

$$4 \leq x-1 \leq 9$$

$$5 \leq x \leq 10$$

Ответ: [5; 10]



назад



Метод разложения подкоренного выражения на множители

Пример $\sqrt{2x^2 + 21x - 11} - \sqrt{2x^2 - 9x + 4} = \sqrt{18x - 9}$

$$\sqrt{(2x-1)(x-11)} - \sqrt{(2x-1)(x-4)} - 3\sqrt{2x-1} = 0$$

$$\sqrt{2x-1}(\sqrt{x-11} - \sqrt{x-4} - 3) = 0$$

$$2x-1=0 \quad \text{или} \quad \sqrt{x-11} = \sqrt{x-4} + 3$$

$$x=0,5 \quad x-11 = x-4 + 6\sqrt{x-4} + 9$$

$$6\sqrt{x-4} = -16$$

решений

Проверка: $\sqrt{2 \cdot \frac{1}{4} + 21 \cdot \frac{1}{2} - 11} - \sqrt{2 \cdot \frac{1}{4} - 9 \cdot \frac{1}{2} + 4} = \sqrt{18 \cdot \frac{1}{2} - 9}$

$$\sqrt{11-11} - \sqrt{-4+4} = 0$$

Ответ: 0,5.

верно

назад

$$\sqrt{(x-1)(x-3)} + \sqrt{-(x-1)(x-2)} = \sqrt{x(x-1)}$$

$$\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{-x^2 + 3x - 2} = \sqrt{x^2 - x}$$

$$\sqrt{x-1}(\sqrt{x-3} + \sqrt{2-x} - \sqrt{x}) = 0$$

$$\sqrt{x-1} = 0 \quad \text{или} \quad \sqrt{x-3} + \sqrt{2-x} - \sqrt{x} = 0$$

$x = 1$

$$\sqrt{x-3} = \sqrt{x} - \sqrt{2-x}$$

$$x-3 = x - 2\sqrt{x(2-x)} + 2-x$$

$$2\sqrt{x(2-x)} = 5-x$$


$$4(2x-x^2) = 25-10x+x^2$$

$$5x^2 - 18x + 25 = 0$$

$D < 0$, решений нет

Ответ: 1.

next



Проверка: $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ $\sqrt{x\sqrt{3\sqrt{x\sqrt{3\dots}}}} = \sqrt[3]{2}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{16}} \cdot 3^{\frac{1}{16}} \cdot \dots = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots} \cdot 3^{\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots} =$$
$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{3} \cdot 3\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}.$$

Показатели степени образуют бесконечную убывающую геометрическую прогрессию, сумму которой можно найти по формуле

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$



[назад](#)

Молодец!

