Методы решения иррациональных уравнений

Учитель: Гавриленко Л.М.

МОУ г.Мурманска гимназия №2

Метод возведения в степень

Пример 1.

$$\sqrt{5x-1} = 2x-1$$

$5x – 1 = 4x^2 – 4x + 1$

$4x^2 – 9x + 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm 7}{8}$$

$x_1 = 2$ $x_2 = \frac{1}{4}$

Проверка: $x = \frac{1}{4}$ посторонний корень

Ответ: 2.

Пример 2.

$$\sqrt{8x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{7x+4}+\sqrt{2x-2}$$

$$\sqrt{8x+1}-\sqrt{2x-2}=\sqrt{7x+4}-\sqrt{3x-5}$$

$$8x + 1 + 2x - 2 - 2\sqrt{(8x+1)(2x-2)} = 7x + 4 + 3x - 5 - 2\sqrt{(7x+4)(3x-5)}$$

$$(8x + 1)(2x - 2) = (7x + 4)(3x - 5)$$

$x = 3$; $x = -\frac{6}{5}$

Проверка: $x= -\frac{6}{5}$ посторонний корень

Ответ: 3.

Пример 3.

$$\sqrt{x\sqrt{3\sqrt{x\sqrt{3\ldots}}}} = \sqrt[3]{2}$$

$$x\sqrt{3\sqrt{x\sqrt{3\sqrt{x\ldots}}}} = \sqrt[3]{4}$$

$3x^2\sqrt{x\sqrt{3\sqrt{x\ldots}}} = \sqrt[3]{16}$ т.к. $\sqrt{x\sqrt{3\sqrt{x\sqrt{3\ldots}}}} = \sqrt[3]{2}$, то

$3x^2 \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{16}$

$3x^2 = 2$

$x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ $x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Проверка: $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ посторонний корень

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{3}}$

Метод составления смешанной системы

Решение уравнений вида

Решение уравнений вида

$$\sqrt{f(x)} = \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) \ge 0, \\ f(x) = \varphi^2(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{\varphi(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \varphi(x), \\ f(x) \ge 0, \\ (\text{либо}\ \varphi(x) \ge 0). \end{cases}$$

Пример.

$$x - \sqrt{x+2} = 4,$$

$$\sqrt{x+2} = x - 4;$$

$$\begin{cases} x - 4 \ge 0, \\ x + 2 = (x-4)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4, \\ x^2 - 9x + 14 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4, \\ \left[\begin{array}{l} x = 7, \\ x = 2; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 7.$$

Ответ: 7.

Метод введения новой переменной

Пример 1.

$$\sqrt{x+32} - 2\sqrt[4]{x+32} = 3$$

Пусть $\sqrt[4]{x+32} = a$; $a \geq 0$

$a^2 - 2a - 3 = 0$

$a_1 = -1$ не удовлетворяет условию $a \geq 0$

$a_2 = 3$

$\sqrt[4]{x+32} = 3$

x + 32 = 81

x = 49

Ответ: 49.

Пример 2.

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$$

Пусть $\sqrt{x-1}=y,\qquad y\geq 0$

x = y^2 + 1

$$\sqrt{y^2-4y+4}+\sqrt{y^2-6y+9}=1$$

$$\sqrt{(y-2)^2}+\sqrt{(y-3)^2}=1$$

|y – 2| + |y – 3| = 1

1) $\begin{cases} y < 2 \\ 2 - y + 3 - y = 1 \end{cases}$

y = 2

Решений нет

2) $\begin{cases} 2 \le y \le 3 \\ y - 2 + 3 - y = 1 \end{cases}$

1 = 1

$2 \le y \le 3$

3) $\begin{cases} y > 3 \\ y - 2 + y - 3 = 1 \end{cases}$

y = 3

Решений нет

$$2 \le \sqrt{x-1} \le 3$$

$$4 \le x - 1 \le 9$$

$$5 \le x \le 10$$

Ответ: [5; 10]

Метод разложения подкоренного выражения на множители

Пример.

$$\sqrt{2x^2+21x-11}-\sqrt{2x^2-9x+4}=\sqrt{18x-9}$$

$$\sqrt{(2x-1)(x-11)}-\sqrt{(2x-1)(x-4)}-3\sqrt{2x-1}=0$$

$$\sqrt{2x-1}\left(\sqrt{x-11}-\sqrt{x-4}-3\right)=0$$

2x – 1 = 0 или $\sqrt{x-11}=\sqrt{x-4}+3$

x = 0,5 $\quad x-11=x-4+6\sqrt{x-4}+9$

$$6\sqrt{x-4}=-16$$

решений

нет

Проверка: $\sqrt{2\cdot\frac{1}{4}+21\cdot\frac{1}{2}-11}-\sqrt{2\cdot\frac{1}{4}-9\cdot\frac{1}{2}+4}=\sqrt{18\cdot\frac{1}{2}-9}$

$$\sqrt{11-11}-\sqrt{-4+4}=0$$

верно

Ответ: 0,5.

Метод умножения на сопряженное выражение

Пример

(1) : $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1 \quad \Big| \cdot \left(\sqrt{3x^2+5x+8}+\sqrt{3x^2+5x+1}\right)$

$$\frac{\left(\sqrt{3x^2+5x+8}\right)^2-\left(\sqrt{3x^2+5x+1}\right)^2}{} = \sqrt{3x^2+5x+8}+\sqrt{3x^2+5x+1}$$

$$\sqrt{3x^2+5x+8}+\sqrt{3x^2+5x+1} = 7$$

Сложим данное уравнение с уравнением (1), получим:

$$2\sqrt{3x^2+5x+8}=8 \quad \Big| : 2$$

$$\sqrt{3x^2+5x+8}=4$$

$3x^2 + 5x + 8 = 16$

$3x^2 + 5x – 8 = 0$

$x_1 = -\frac{8}{3}$ $\quad x_2 = 1$

Проверкой убеждаемся, что x_1, x_2 - корни уравнения.

Ответ: $-\frac{8}{3}$; 1.

Метод замены иррациональных уравнений системой рациональных уравнений

Пример 1.

$$\sqrt[3]{-x-1} = 1 - \sqrt{x+2}$$

$$\begin{cases} \sqrt[3]{-x-1} = a, \\ \sqrt{x+2} = b, b \ge 0, \\ a + b = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} -x-1 = a^3, \\ x+2 = b^2, \\ a+b = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = a^3 + b^2, \\ a+b = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = a^3 + b^2, \\ b = 1-a; \end{cases}$$

$a^3 + 1 – 2a + a^2 = 1$

$a^3 + a^2 – 2a = 0$

$a_1 = 0$ $\qquad a_2 = 1$ $\qquad a_3 = -2$

$$\sqrt[3]{-x-1} = 0 \qquad \sqrt[3]{-x-1} = 1 \qquad \sqrt[3]{-x-1} = -2$$

x = - 1 $\qquad$ x = - 2 $\qquad$ x = 7

Ответ: -2; -1; 7.

Использование монотонности

Теорема. Если функция y = f(x) строго возрастает (убывает) на некотором промежутке I, то уравнение f(x) = C, где C – некоторое действительное число, имеет не более одного решения на промежутке I.

Пример.

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{5x+5}=8$$

f(x) = $\sqrt{2x+1}+\sqrt{5x+5}$ возрастает на D(f) = [$-\frac{1}{2};+\infty$)

f(x) = 8

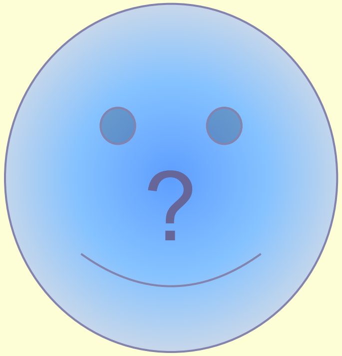
x = 4

Ответ: 4.

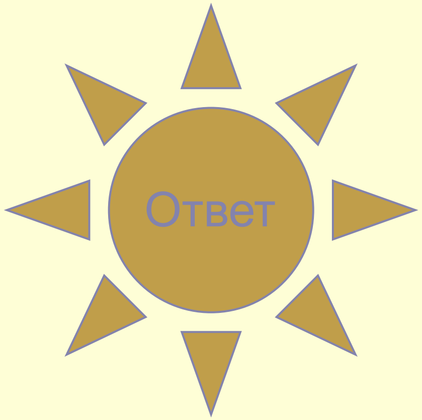
Самостоятельная работа

Задание: решите уравнение.

При решении уравнений вы можете воспользоваться подсказкой метода решения

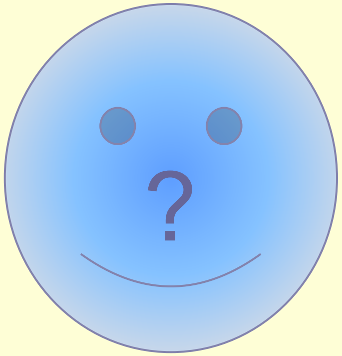


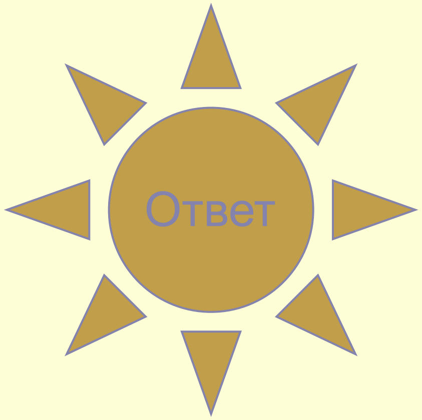
или, решив уравнение, проверить ответ



Пример 1.

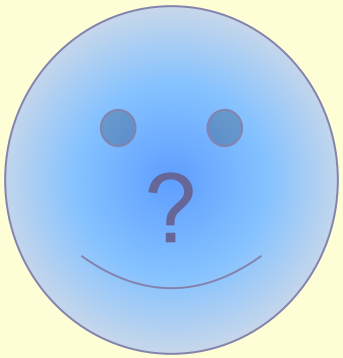
$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}} = 2$$

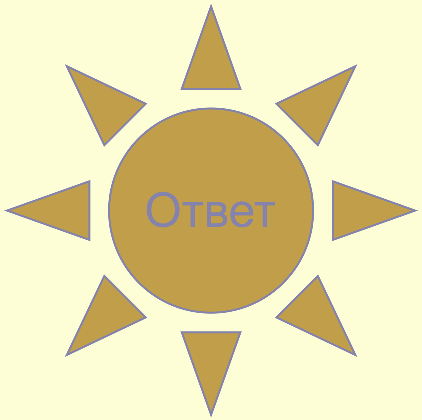




Пример 2.

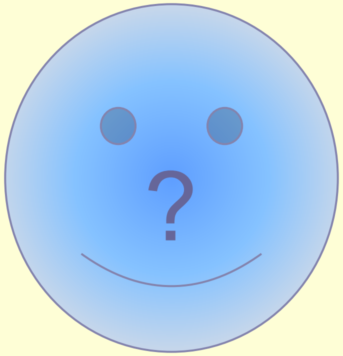
$$\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}-4\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}=-3$$

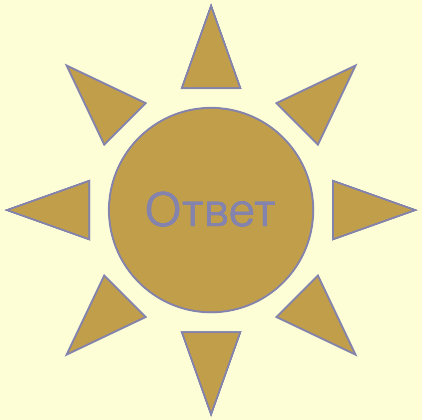




Пример 3.

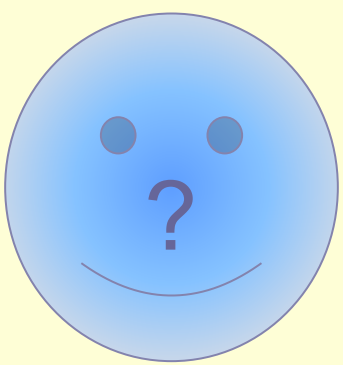
$$\sqrt{x-3}=\sqrt{x^2-2x-7}$$

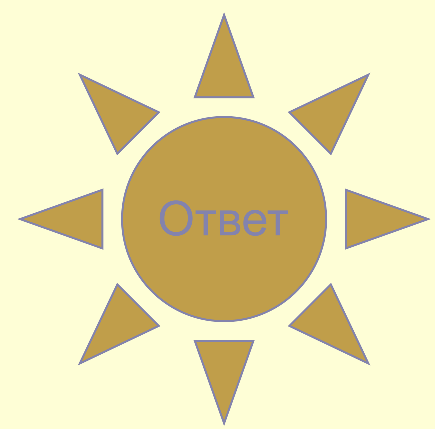




Пример 4.

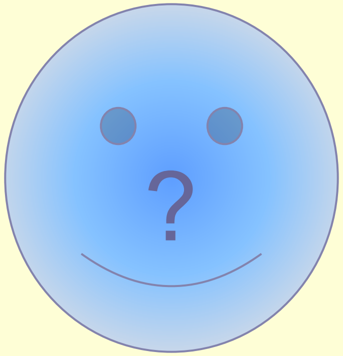
$$\sqrt{2x^2+8x+7}-\sqrt{2x^2-8x+7}=2x$$

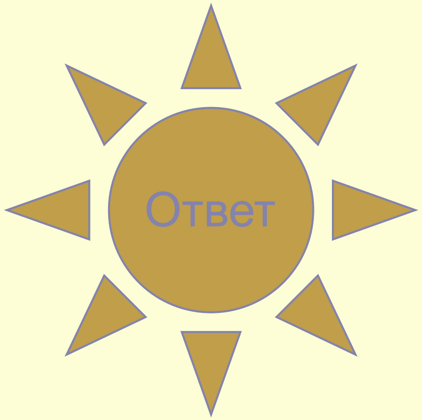




Пример 5.

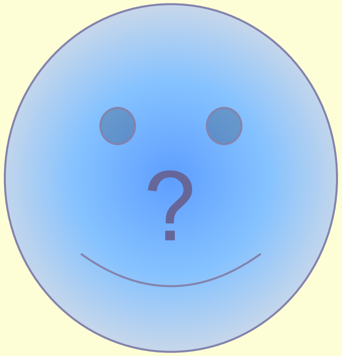
$$\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$$

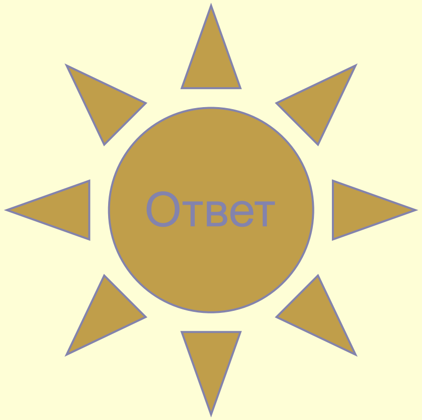




Пример 6.

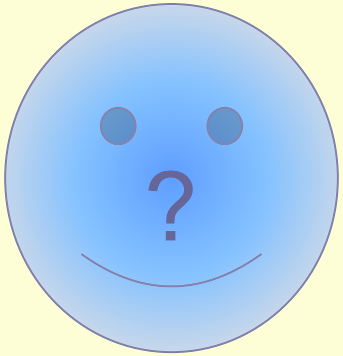
$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$$

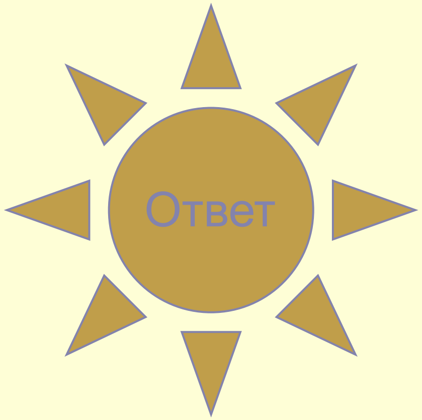




Пример 7.

$$\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[8]{7x-6}=2$$





Пример 8.

$$\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{-x^2+3x-2}=\sqrt{x^2-x}$$

?

Ответ

Пример 1.

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}} = 2$$

x $\sqrt{x\sqrt{x\ldots}} = 4$

Т.к. $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}} = 2$, то

2x = 4

x = 2

Проверка: $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{8}} \cdot \ldots = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots} = 2^{\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}} = 2^1 = 2$

Показатели степени образуют бесконечную убывающую геометрическую
прогрессию, сумму которой можно найти по формуле

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

next

Пример 2.

$$\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}-4\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}=-3$$

next

Пусть $\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}=y,$ y > 0. Получим уравнение

$$y-\frac{4}{y}=-3$$

Тогда $y^2 + 3y - 4 = 0$

$y_1 = 1$, $y_2 = -4$ (не удовлетворяет условию y > 0)

$$\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}=1$$

2 – x = 2 + x

x = 0

Проверка показывает, что 0 является корнем уравнения.

Ответ: 0.

Пример 3.

$$\sqrt{x-3}=\sqrt{x^2-2x-7}$$

$$\begin{cases} x-3=x^2-2x-7, \\ x-3\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-4=0, \\ x\geq 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=-1, \end{array}\right. \\ x\geq 3; \end{cases} \Leftrightarrow$$

x = 4

Ответ: 4.

next

Пример 4.

(1) $\sqrt{2x^2+8x+7}-\sqrt{2x^2-8x+7}=2x \quad \Big| \cdot \; (\sqrt{2x^2+8x+7}+\sqrt{2x^2-8x+7})$

$$\left(\sqrt{2x^2+8x+7}\right)^2-\left(\sqrt{2x^2-8x+7}\right)^2=2x\left(\sqrt{2x^2+8x+7}+\sqrt{2x^2-8x+7}\right)$$

$$2x\left(\sqrt{2x^2+8x+7}+\sqrt{2x^2-8x+7}\right)=16x$$

x=0 или $\left(\sqrt{2x^2+8x+7}+\sqrt{2x^2-8x+7}\right)=8$

Сложим данное уравнение с уравнением (1), получим

$$2\sqrt{2x^2+8x+7}=2x+8$$

$$\sqrt{2x^2+8x+7}=x+4$$

$$\begin{cases} x+4\geq 0, \\ 2x^2+8x+7=(x+4)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -4, \\ \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=3; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=3. \end{array}\right.$$

Ответ: -3; 0; 3.

next

Пример 5.

$$\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$$

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x+34}=a,\\ \sqrt[3]{x-3}=b,\\ a-b=1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^3=x+34,\\ b^3=x-3,\\ a=b+1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^3-b^3=37,\\ a-b=1;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(a-b)(a^2+ab+b^2)=37,\\ a-b=1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+ab+b^2=37,\\ a=b+1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1,\\ 3b^2+3b-36=0;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1,\\ b^2+b-12=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1,\\ \left[\begin{array}{l}b=3,\\ b=-4.\end{array}\right.\end{cases}$$

1) $\sqrt[3]{x-3}=3$

x – 3 = 27

x = 30

2) $\sqrt[3]{x-3}=-4$

x – 3 = -64

x = -61

Ответ: -61; 30.

next

Пример 6.

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$$

Пусть $\sqrt{2x-5}=y, \quad y\geq 0$

2x – 5 = y^2 $\qquad x=\dfrac{y^2+5}{2}$

$$\sqrt{\frac{y^2+5}{2}-2+y}+\sqrt{\frac{y^2+5}{2}+2+3y}=7\sqrt{2}$$

$$\sqrt{\frac{(y+1)^2}{2}}+\sqrt{\frac{(y+3)^2}{2}}=7\sqrt{2} \quad \Big| \cdot \sqrt{2}$$

|y + 1| + |y + 3| = 14,

т.к. y $\geq$ 0, то $|y+1|=y+1, \quad |y+3|=y+3$

y + 1 + y + 3 = 14

2y = 10

y = 5

Тогда x = 15.

Ответ: 15.

next

Пример 7.

$$\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[8]{7x-6}=2$$

Пусть f(x) = $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[8]{7x-6}$

D(f) = $\left[\frac{6}{7};+\infty\right)$

Т.к. данная функция строго возрастает на D(f), то уравнение f(x) = 2 имеет не более одного корня на указанном промежутке.

Подбором определяем: x = 1.

Ответ: 1.

next

Метод возведения в степень

$$\sqrt{x\sqrt{3\sqrt{x\sqrt{3\ldots}}}} = \sqrt[3]{2}$$

$$x\sqrt{3\sqrt{x\sqrt{3\sqrt{x\ldots}}}} = \sqrt[3]{4}$$

$3x^2\sqrt{x\sqrt{3\sqrt{x\ldots}}} = \sqrt[3]{16}$ т.к. $\sqrt{x\sqrt{3\sqrt{x\sqrt{3\ldots}}}} = \sqrt[3]{2}$, то

$$3x^2 \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{16}$$

$$3x^2 = 2$$

$x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ $x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Проверка: $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ посторонний корень

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{3}}$

назад

Метод введения новой переменной

$$\sqrt{x+32} - 2\sqrt[4]{x+32} = 3$$

Пусть $\sqrt[4]{x+32} = a$; $a \geq 0$

a^2 -2a – 3 =0

a_1 = -1 не удовлетворяет условию $a \geq 0$

a_2 = 3

$$\sqrt[4]{x+32} = 3$$

x + 32 = 81

x = 49

Ответ: 49.

назад

Метод составления смешанной системы

Решение уравнений вида

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{\varphi(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \varphi(x), \\ f(x) \geq 0, \\ (\text{либо}\, \varphi(x) \geq 0). \end{cases}$$

назад

Метод умножения на сопряженное выражение

(1) $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1 \;\Big|\; \cdot\ (\sqrt{3x^2+5x+8}+\sqrt{3x^2+5x+1}\ )$

$$\left(\sqrt{3x^2+5x+8}\right)^2-\left(\sqrt{3x^2+5x+1}\right)^2=\sqrt{3x^2+5x+8}+\sqrt{3x^2+5x+1}$$

$$\sqrt{3x^2+5x+8}+\sqrt{3x^2+5x+1}=7$$

$$\sqrt{3x^2+5x+8}=4$$

$3x^2 + 5x + 8 = 16$

$3x^2 + 5x - 8 = 0$

$x_1 = -\frac{8}{3}$ $\quad x_2 = 1$

Проверкой убеждаемся, что x_1 , x_2 - корни уравнения.

Ответ: $-\frac{8}{3}$; 1.

назад

Метод замены иррациональных уравнений системой рациональных уравнений

$$\sqrt[3]{-x-1} = 1 - \sqrt{x+2}$$

$$\begin{cases} \sqrt[3]{-x-1} = a, \\ \sqrt{x+2} = b, b \geq 0, \\ a + b = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} -x-1 = a^3, \\ x+2 = b^2, \\ a + b = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = a^3 + b^3, \\ a + b = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = a^3 + b^3, \\ b = 1 - a; \end{cases}$$

$a^3 + 1 - 2a + a^2 = 1$

$a^3 + a^2 - 2a = 0$

$a_1 = 0$ $\quad a_2 = 1$ $\quad a_3 = -$

2

$$\sqrt[3]{-x-1} = 0 \qquad \sqrt[3]{-x-1} = 1 \qquad \sqrt[3]{-x-1} = -2$$

x = - 1 $\quad$ x = - 2 $\quad$ x =

7

Ответ: -2; -1; 7.

назад

Использование монотонности

Теорема. Если функция y = f(x) строго возрастает (убывает) на некотором промежутке I, то уравнение f(x) = C, где C – некоторое действительное число, имеет не более одного решения на промежутке I.

Пример.

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{5x+5}=8$$

f(x) = $\sqrt{2x+1}+\sqrt{5x+5}$ возрастает на D(f) = [$-\frac{1}{2};+\infty$)

f(x) = 8

x = 4

Ответ: 4.

назад

Метод введения новой переменной.

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$$

Пусть $\sqrt{x-1}=y,\qquad y\geq 0$

x = y^2 + 1

$$\sqrt{y^2-4y+4}+\sqrt{y^2-6y+9}=1$$

$$\sqrt{(y-2)^2}+\sqrt{(y-3)^2}=1$$

|y – 2| + |y – 3| = 1

1) $\begin{cases} y < 2 \\ 2 - y + 3 - y = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2 \le y \le 3 \\ y - 2 + 3 - y = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y > 3 \\ y - 2 + y - 3 = 1 \end{cases}$

y = 2

Решений нет

1 = 1

$2 \le y \le 3$

y = 3

Решений нет

$$2 \le \sqrt{x-1} \le 3$$

$$4 \le x - 1 \le 9$$

$$5 \le x \le 10$$

Ответ: [5; 10]

назад

Метод разложения подкоренного выражения на множители

Пример.

$$\sqrt{2x^2+21x-11}-\sqrt{2x^2-9x+4}=\sqrt{18x-9}$$

$$\sqrt{(2x-1)(x-11)}-\sqrt{(2x-1)(x-4)}-3\sqrt{2x-1}=0$$

$$\sqrt{2x-1}\left(\sqrt{x-11}-\sqrt{x-4}-3\right)=0$$

2x – 1 = 0 или $\sqrt{x-11}=\sqrt{x-4}+3$

x = 0,5

$$x-11=x-4+6\sqrt{x-4}+9$$

$$6\sqrt{x-4}=-16$$

решений нет

Проверка: $\sqrt{2\cdot\frac{1}{4}+21\cdot\frac{1}{2}-11}-\sqrt{2\cdot\frac{1}{4}-9\cdot\frac{1}{2}+4}=\sqrt{18\cdot\frac{1}{2}-9}$

$$\sqrt{11-11}-\sqrt{-4+4}=0$$

верно

Ответ: 0,5.

назад

$$\sqrt{(x-1)(x-3)}+\sqrt{-(x-1)(x-2)}=\sqrt{x(x-1)}$$

$$\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{-x^2+3x-2}=\sqrt{x^2-x}$$

$$\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{2-x}-\sqrt{x}\right)=0$$

$\sqrt{x-1}=0$ или $\sqrt{x-3}+\sqrt{2-x}-\sqrt{x}=0$

x = 1

$$\sqrt{x-3}=\sqrt{x}-\sqrt{2-x}$$

$$x-3=x-2\sqrt{x(2-x)}+2-x$$

$$2\sqrt{x(2-x)}=5-x$$

$$4(2x-x^2)=25-10x+x^2$$

$$5x^2-18x+25=0$$

D < 0, решений нет

Ответ: 1.

next

Проверка: x = $\sqrt{\frac{2}{3}}$

$$\sqrt{x\sqrt{3\sqrt{x\sqrt{3\ldots}}}} = \sqrt[3]{2}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{16}} \cdot 3^{\frac{1}{16}} \cdot \ldots = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots} \cdot 3^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots} =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{3} \cdot 3\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}.$$

Показатели степени образуют бесконечную убывающую геометрическую прогрессию, сумму которой можно найти по формуле

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

назад

М о л о д е ц !