

*МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ*

ЦЕЛЬ:

Систематизировать, обобщить,
расширить знания и умения,
связанные с применением методов
решения тригонометрических
уравнений

№	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	2	4	4	4	1	2	2
2	3	1	1	2	2	2	2	3
3	1	2	2	1	3	1	3	4
4	1	3	2	2	2	3	3	1
5	4	1	2	2	1	1	2	3
6	4	4	4	2	2	4	4	3
7	1	4	4	4	4	2	2	3
8	2	2	4	2	3	1	1	2
9	1	4	2	1	1	4	2	2
10	3	4	1	2	1	1	3	4

№	Уравнения	№ метода	Методы
1	$\sin x/3 - \cos 6x = 2$	4(б)	1.Разложение на множители. 2.Введение новой переменной: а) сведение к квадратному; б) универсальная подстановка; в) введение вспомогательного аргумента. 3. Сведение к однородному уравнению. 4. Использование свойств функций, входящих в уравнение: а) обращение к условию равенства тригонометрических функций; б) использование свойства ограниченности функции.
2			
3			
4	$5 \sin x - 2 \cos x = 1$	3, 2(б,в)	
5	$\sin 3x \cos 2x = 1$	4(б)	
6	$\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x)$	1,2(б,в),3	
7	$1 - \sin 2x = \cos x - \sin x$	1,2(б,в)3	
8	$\cos 3x = \sin x$	4(а)	
9	$4 - \cos^2 x = 4 \sin x$	2(а)	
10	$\sin 3x - \sin 5x = 0$	4(б)	
11	$\operatorname{tg} 3x \operatorname{tg}(5x + \pi/3) = 1$	4(а)	
12	$2 \operatorname{tg} x/2 - \cos x = 2$	1,2(а,б,в),3,4(а)	

1. Какие методы решения тригонометрических уравнений вы знаете?

2. Определите и ответьте, какими методами нужно решать данные тригонометрические уравнения?

а) $\sin 2x - \cos x = 0$

б) $2\sin^2 x - 5\sin x = -3$

в) $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x - \cos x$

г) $\sin 2x - 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$

3. Решите простейшие тригонометрические уравнения:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$

б) $\cos(\pi - x) - 1 = 0;$

в) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\right) = 1;$

г) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) + 2 = 0;$

д) $\operatorname{tg} 3x - 2 = 0.$

Некоторые типы тригонометрических уравнений.

1. Уравнения, сводящиеся к квадратным,
относительно
 $\cos x = t, \sin x = t.$

$$A \sin^2 x + B \cos x + C = 0$$

$$A \cos^2 x + B \sin x + C = 0$$

Решаются методом введения новой переменной.

2. Однородные уравнения первой и второй степени.

I степени. $A \sin x + B \cos x = 0$: $\cos x$

$$A \operatorname{tg} x + B = 0$$

II степени. $A \sin^2 x + B \sin x \cos x + A \cos^2 x = 0$: $\cos^2 x$

$$A \operatorname{tg}^2 x + B \operatorname{tg} x + C = 0$$

Решаются методом разложения на множители и методом введения новой переменной.

3. Уравнение вида:

$$A \sin x + B \cos x = C. \quad A, B, C \neq 0$$

Применимы все методы.

4. Понижение степени.

$$A \cos 2x + B \cos^2 x = C.$$

$$A \cos 2x + B \sin^2 x = C.$$

Решаются методом разложения на множители.

$$A \sin 2x + B \sin^2 x = C.$$

$$A \sin 2x + B \cos^2 x = C.$$

Сводятся к однородным уравнениям $C = C(\sin^2 x + \cos^2 x)$.

Формулы.

Универсальная подстановка.

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}};$$

$x \neq \pi + 2\pi n$;
Проверка
обязательна!

Понижение степени.

$$\cos^2 x = (1 + \cos 2x) : 2$$

$$\sin^2 x = (1 - \cos 2x) : 2$$

Метод вспомогательного аргумента.

$a \cos x + b \sin x$ заменим на $C \sin(x+\phi)$, где $C = \sqrt{a^2 + b^2}$;

$$\sin \phi = \frac{a}{C}; \quad \cos \phi = \frac{b}{C}; \quad \phi - \text{вспомогательный аргумент.}$$

Сведение к однородному.

Уравнения вида $A \sin 2x + B \sin^2 x = C$, $A \sin 2x + B \cos^2 x = C$.

Пример. $5 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x + 6 \cos^2 x = 5$.

Разложение на множители.

Пример. $\cos^2 x - 2 \cos x = 4 \sin x - \sin 2x$

Проблемы ,возникающие при решении тригонометрических уравнений

1. Потеря корней:

□ делим на $g(x)$.

□ опасные формулы (универсальная подстановка).

Этими операциями мы сужаем область определения.

2. Лишние корни:

□ возводим в четную степень.

□ умножаем на $g(x)$ (избавляемся от знаменателя).

Этими операциями мы расширяем область определения.

Уравнение $2\sin x - 3\cos x = 0$.

Уравнение $2\sin x - 3\cos x = 0$.
Поделив уравнение на $\cos x$, получим $2\operatorname{tg}x - 3 = 0$, $\operatorname{tg}x = \frac{3}{2}$, $x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

При решении этой задачи обе части уравнения $2\sin x - 3\cos x = 0$ были поделены на $\cos x$.

Напомним, что при делении уравнения на выражение, содержащее неизвестное, могут быть потеряны корни. Поэтому нужно проверить, не являются ли корни уравнения $\cos x = 0$ корнями данного уравнения. Если $\cos x = 0$, то из уравнения $2\sin x - 3\cos x = 0$ следует, что $\sin x = 0$. Однако $\sin x$ и $\cos x$ не могут одновременно равняться нулю, так как они связаны равенством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Следовательно, при делении уравнения $a\sin x + b\cos x = 0$ где $a \neq 0$, $b \neq 0$, на $\cos x$ (или $\sin x$) получаем уравнение, равносильное данному.

Решить уравнение $\cos^2 x + \sin x \cos x = 0$

1) Делить на $\cos x$ нельзя, так как в условии не указано, что $\cos x$ не равен нулю. Но можно утверждать, что $\sin x$ не равен нулю, так как в противном случае $\cos x$ равен 0, что невозможно, так как $\sin^2 x - \cos^2 x = 1$. Значит можно разделить на $\sin^2 x$.

2) Решим уравнение разложением на множители:

$$\cos^2 x + \sin x \cos x = 0,$$

$$\cos x (\cos x + \sin x) = 0,$$

$$\cos x = 0 \quad \text{или} \quad \cos x + \sin x = 0,$$
$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$
$$x = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

Уравнения, линейные относительно $\sin x$ и $\cos x$

$$a \sin x + b \cos x = c.$$

Если $a=b=0$, а c не равно 0, то уравнение теряет смысл;

Если $a=b=c=0$, то x – любое действительное число, то есть уравнение обращается в тождество.

Рассмотрим случаи, когда a, b, c не равны 0

$$2 \sin x + \cos x = 2$$

Примеры:

$$3 \sin 5x - 4 \cos 5x = 2$$

$$a^2 + b^2 \geq c^2$$

$$2 \sin 3x + 5 \cos 3x = 8.$$

Последнее уравнение не имеет решений, так как левая часть его не превосходит 7.

Уравнения, этого вида можно решить многими способами: с помощью

универсальной подстановки, выразив $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg} x$; сведением уравнения

$$2 \sin x + \cos x = 2$$

Данное уравнение является уравнением вида $a \sin x + b \cos x = c$,

(1)

где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, которое можно решить другим способом. Разделим обе части этого уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (2)$$

Введем вспомогательный аргумент φ , такой, что

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Такое число существует, так как

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$$

Таким образом, уравнение можно записать в виде

$$\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Последнее уравнение является простейшим тригонометрическим уравнением.

Уравнение $2 \sin x + \cos x = 2$.

Используя формулы $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$ и

записывая правую часть уравнения в виде $2 = 2 \cdot 1 = 2(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2})$

получаем $4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \cos^2 \frac{x}{2}$,

$3 \sin^2 \frac{x}{2} - 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 0$. Поделив это уравнение на $\cos^2 \frac{x}{2}$

получим равносильное уравнение $3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 = 0$.

Обозначая $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = y$, получаем $3y^2 - 4y + 1 = 0$, откуда $y_1 = 1, y_2 = \frac{1}{3}$.

1) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{3}, \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n, x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

2) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1, \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ

□ $4\sin^2 x - 4\sin x - 3 = 0$

□ $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$

ОТВЕТЫ.

$$\square 4\sin^2 x - 4\sin x - 3 = 0$$

$$\square (-1)^{n+1} \pi/6 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\square 2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$\square \pm\pi/6 + \pi n; -\pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

∈

РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ

$$4 \sin x + 3 \cos x = 5.$$

Решить уравнение $4 \sin x + 3 \cos x = 5$.

Здесь $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$, $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$

Поделим обе части уравнения на 5:

$$\frac{4}{5} \sin x + \frac{3}{5} \cos x = 1.$$

Введем вспомогательный аргумент φ , такой, что $\cos \varphi = \frac{4}{5}$ $\sin \varphi = \frac{3}{5}$

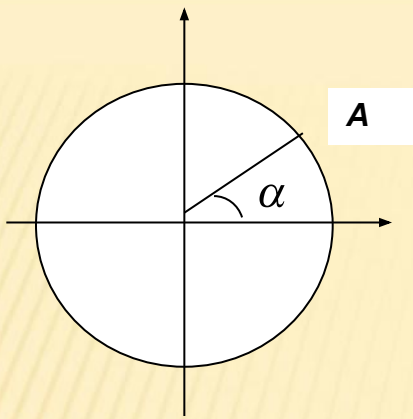
Исходное уравнение можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi &= 1 \\ \sin(x + \varphi) &= 1 \end{aligned}$$

откуда $x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $\varphi = \arccos \frac{4}{5}$, $x = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{4}{5} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{4}{5} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

	$\frac{\pi}{6}=30^\circ$	$\frac{\pi}{4}=45^\circ$	$\frac{\pi}{3}=60^\circ$
<i>sin</i> x	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
<i>cos</i> x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
<i>tg</i> x	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
<i>ctg</i> x	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$



	0°	$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$	$\pi = 180^\circ$	$\frac{3\pi}{2} = 270^\circ$	$2\pi = 360^\circ$
<i>sin</i> x	0	1	0	-1	0
<i>cos</i> x	1	0	-1	0	1
<i>tg</i> x	0	-	0	-	0
<i>ctg</i> x	-	0	-	0	-

