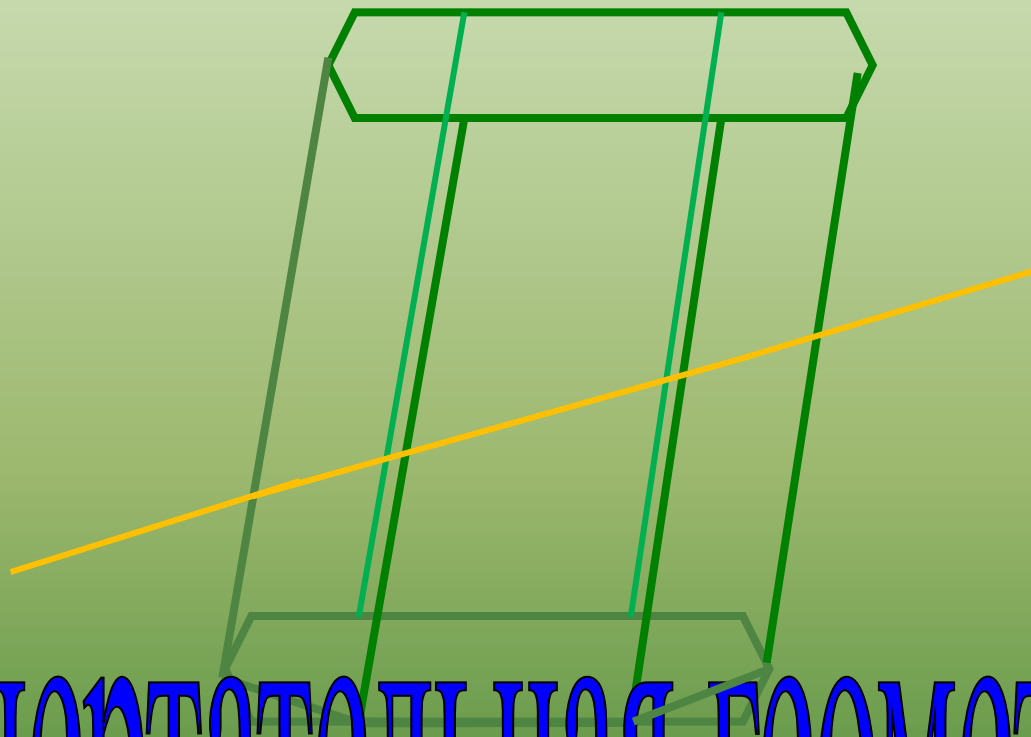


*Демонстративно – методическое пособие  
по решению типовых задач из курса*



# « начертательная геометрия »

МКОУ «СОШ№3»г.Лодейное Поле  
Автор учитель технологии и черчения  
Василий Владимирович Потников

# Оглавление

## 1.1 ТОЧКА

- Проецирование точки на плоскости проекций
- Точка на комплексном чертеже



## 1.2 ПРЯМАЯ

- Следы прямой
- Определение истинной величины отрезка прямой и углов наклона прямой к плоскостям проекций



## 1.3 ПЛОСКОСТЬ

- Следы плоскости
- Пересечение двух плоскостей
- ✓ Плоскости общего положения



## ✓ Геометрические фигуры

- Точка встречи прямой с плоскостью общего положения , определение видимости прямой относительно плоскости



## 2 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ТЕЛА

- Пересечение прямой с геометрическими телами



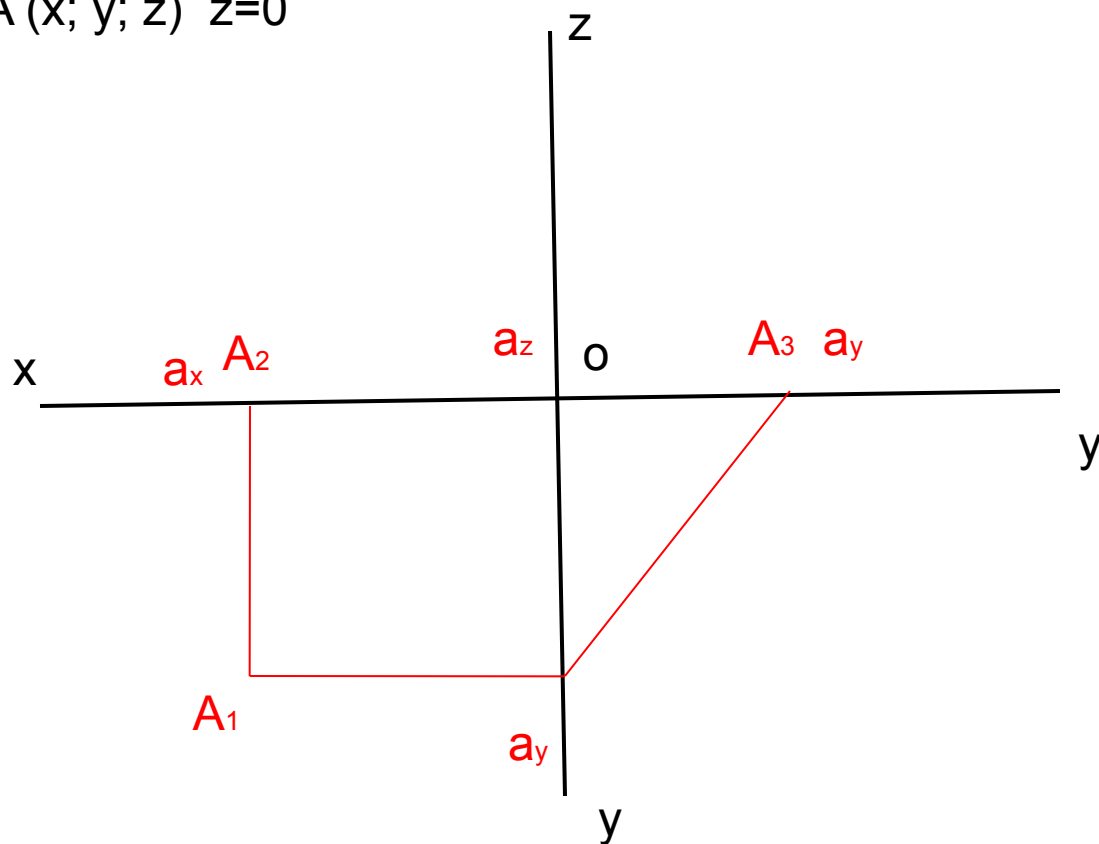
## 3 ЗАДАЧИ



Точка на плоскости

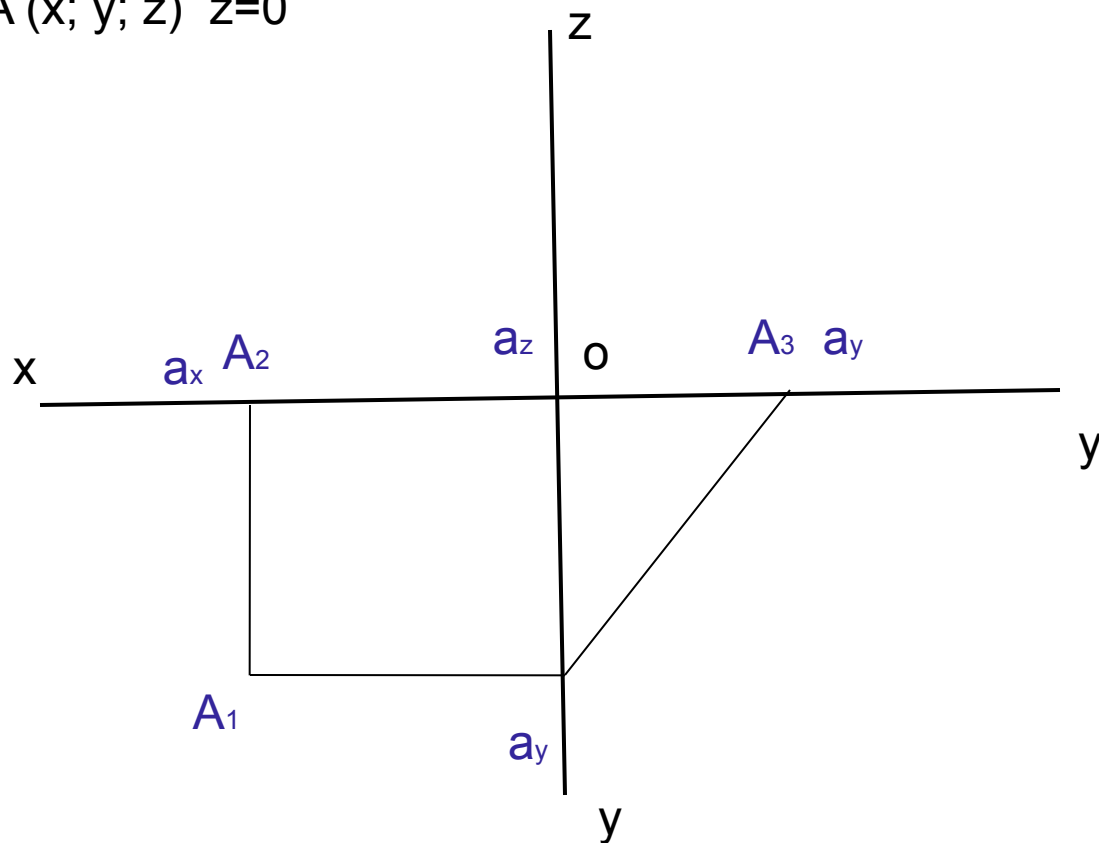
**Построить проекции точек с координатами:**

$$A(x; y; z) \quad z=0$$



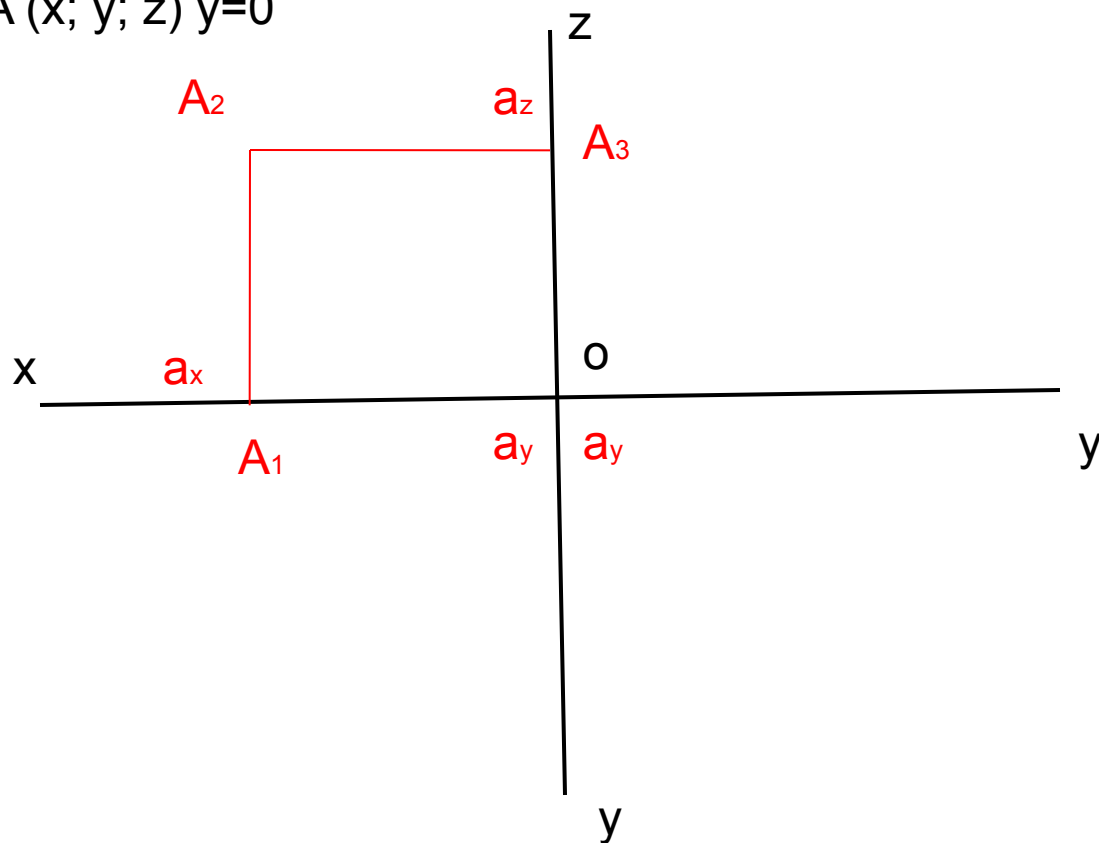
**Построить проекции точек с координатами:**

$$A(x; y; z) \quad z=0$$



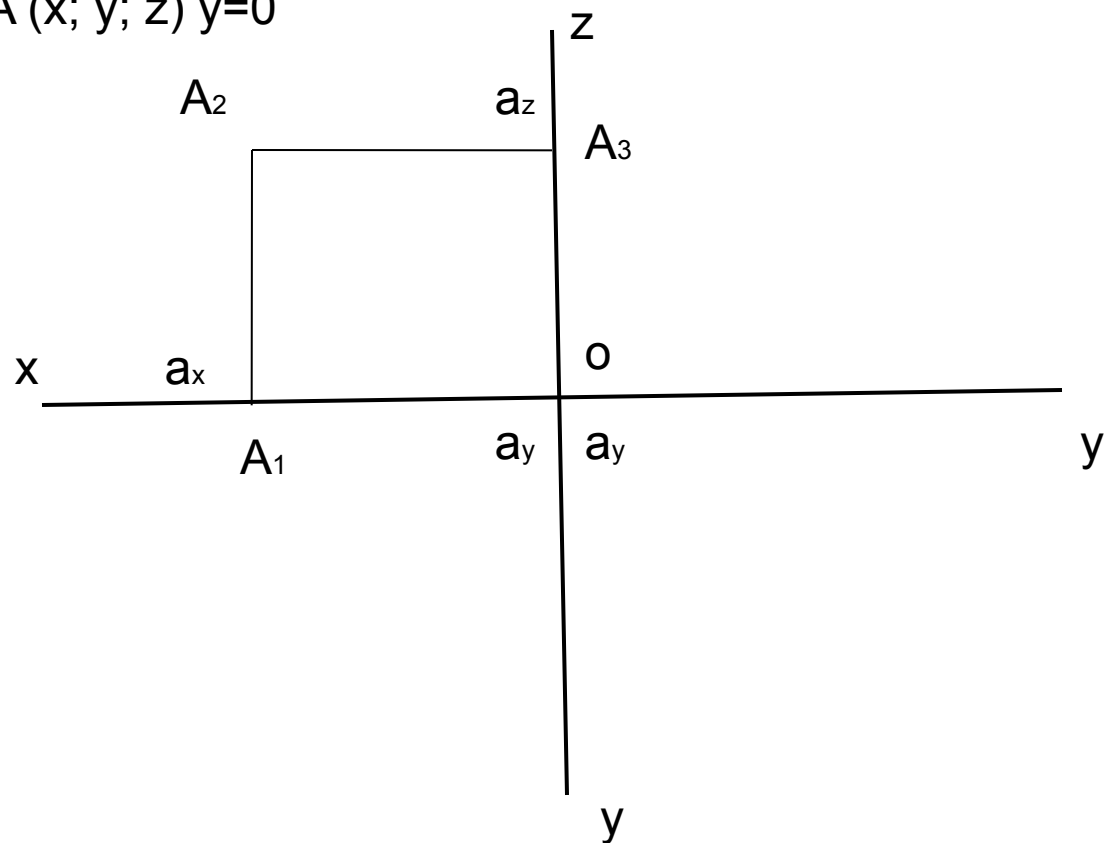
**Построить проекции точек с координатами:**

$$A(x; y; z) \quad y=0$$



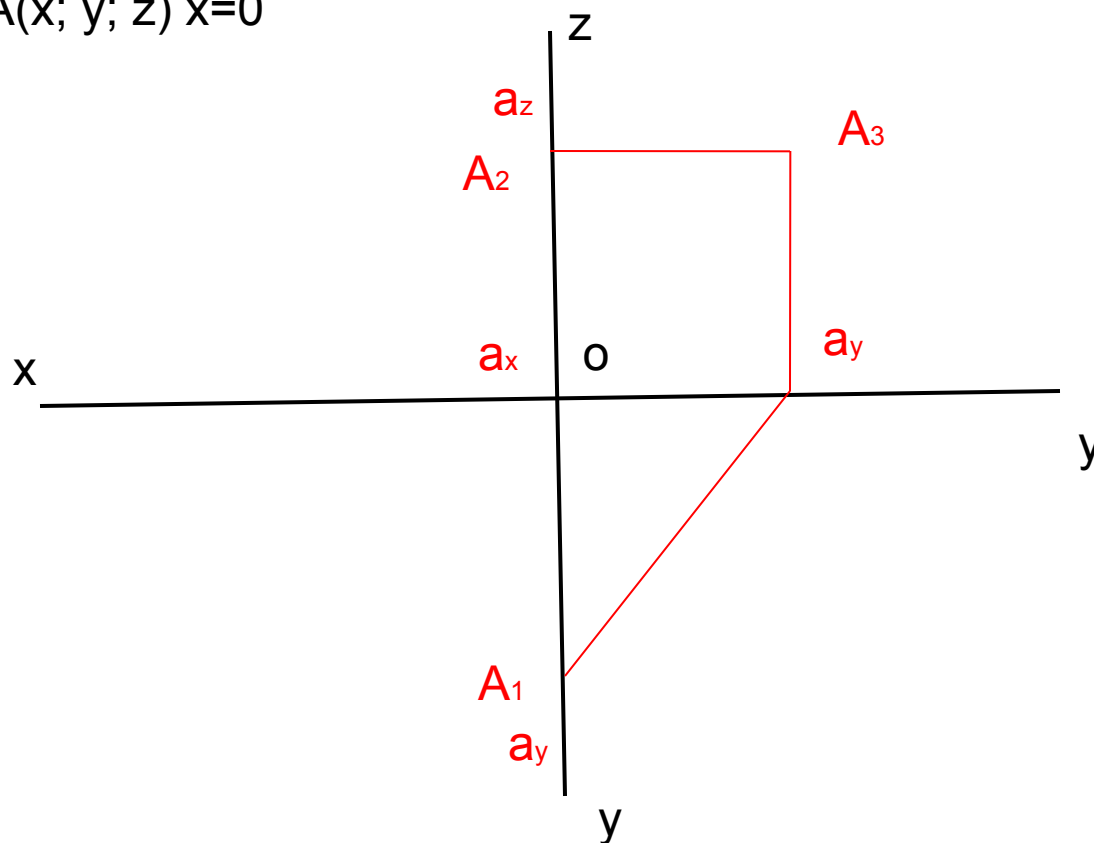
**Построить проекции точек с координатами:**

$A(x; y; z) \quad y=0$



**Построить проекции точек с координатами:**

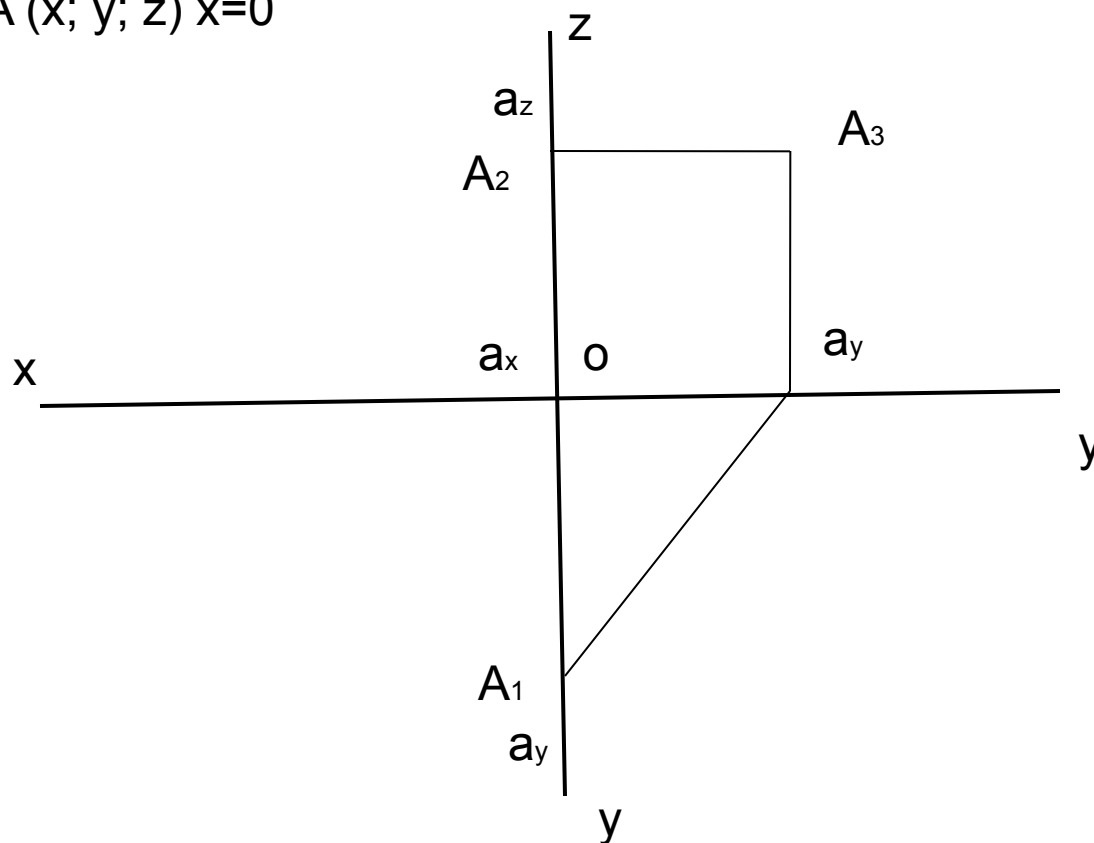
$A(x; y; z) \quad x=0$

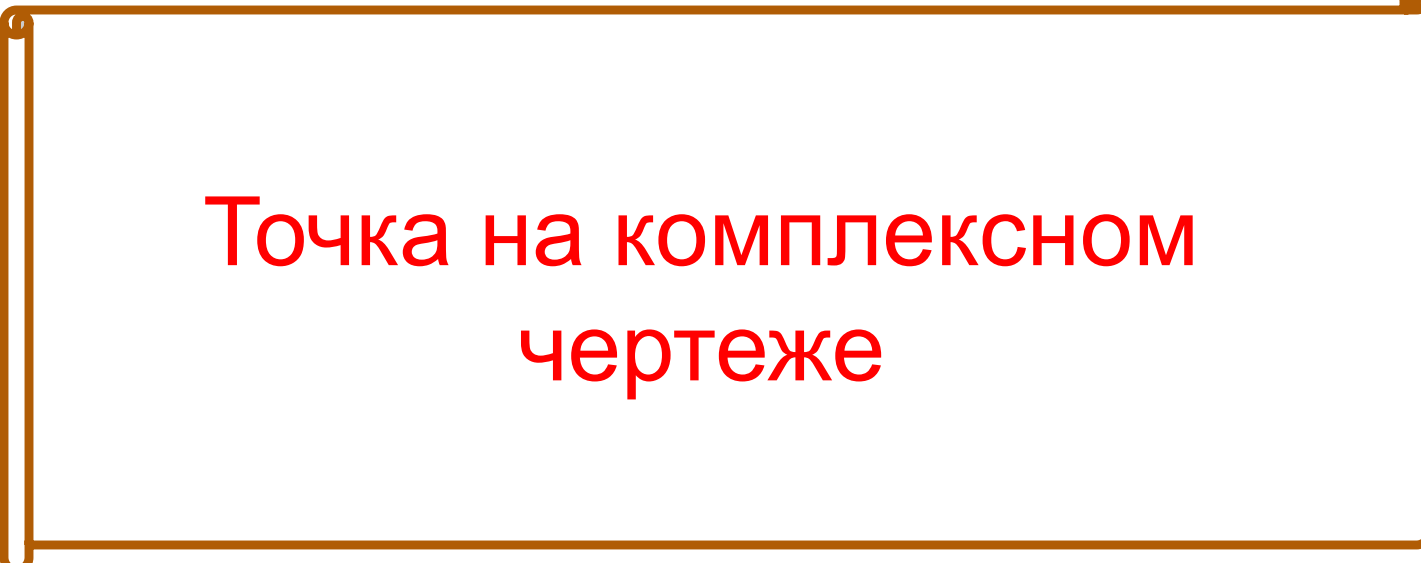




**Построить проекции точек с координатами:**

$A(x; y; z) \quad x=0$

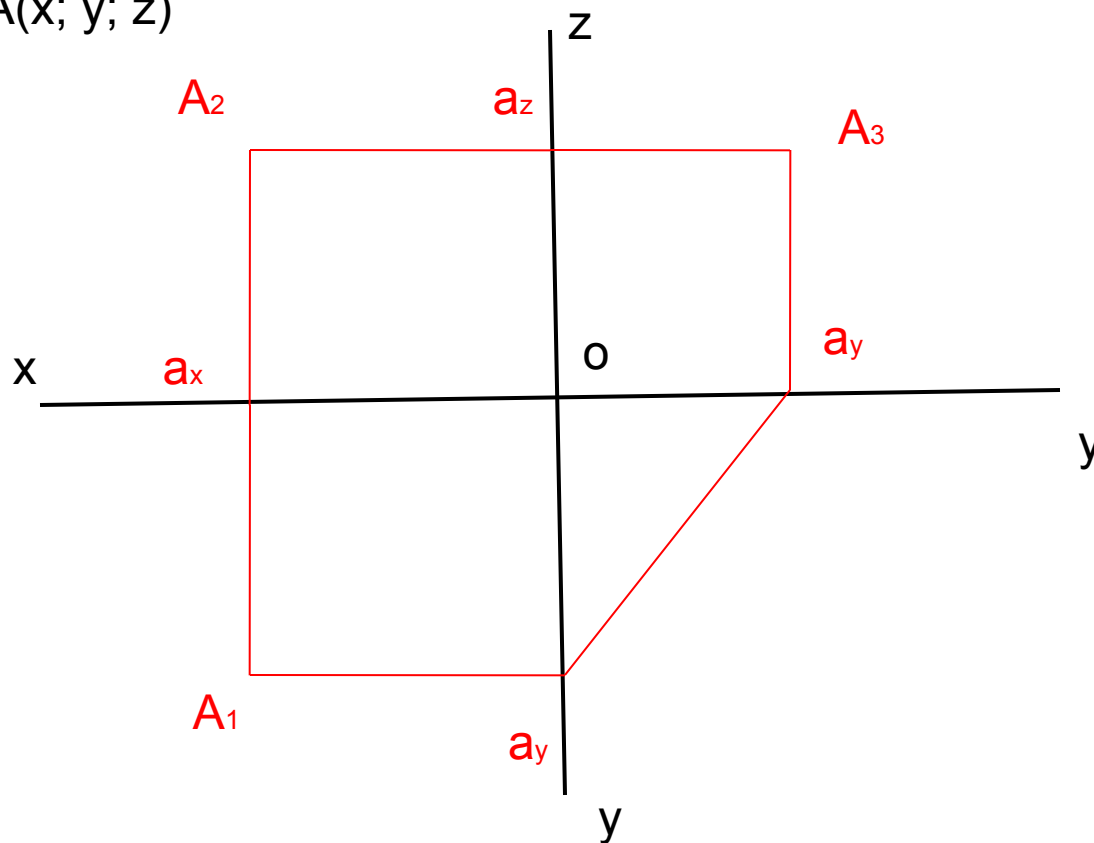




# Точка на комплексном чертеже

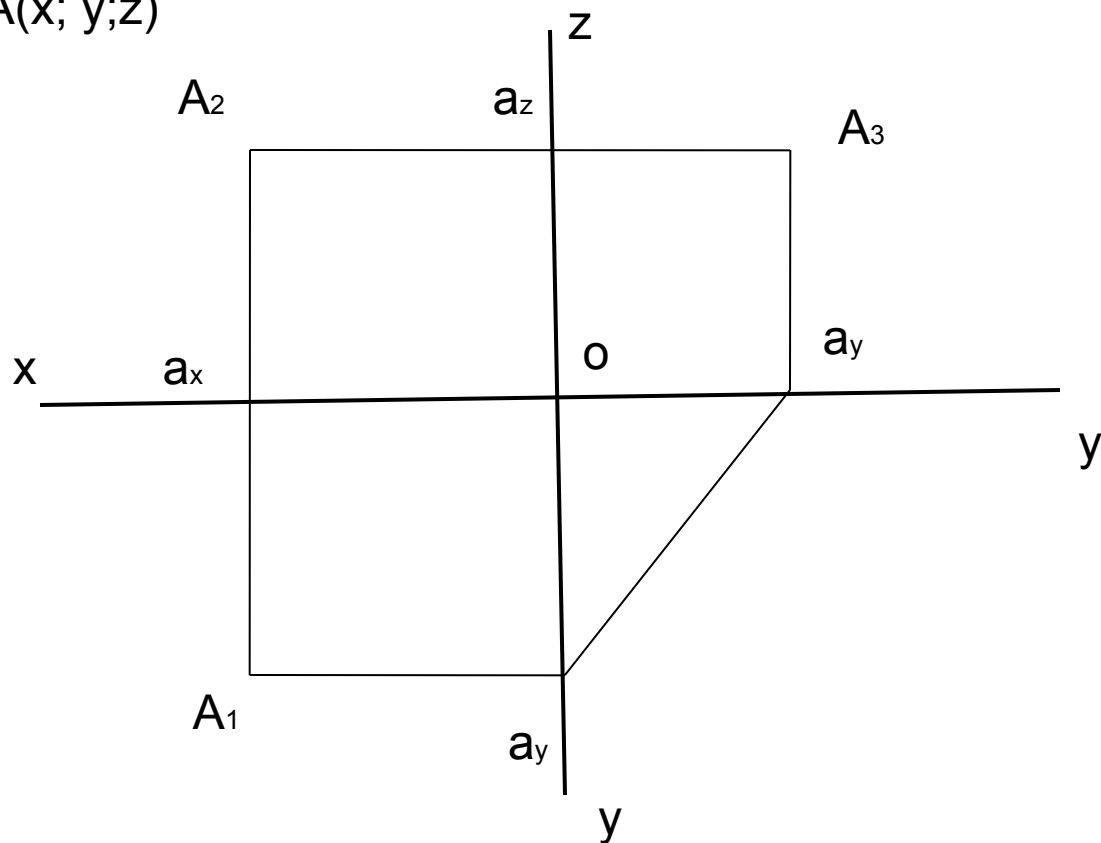
**Построить проекции точек с координатами:**

$A(x; y; z)$



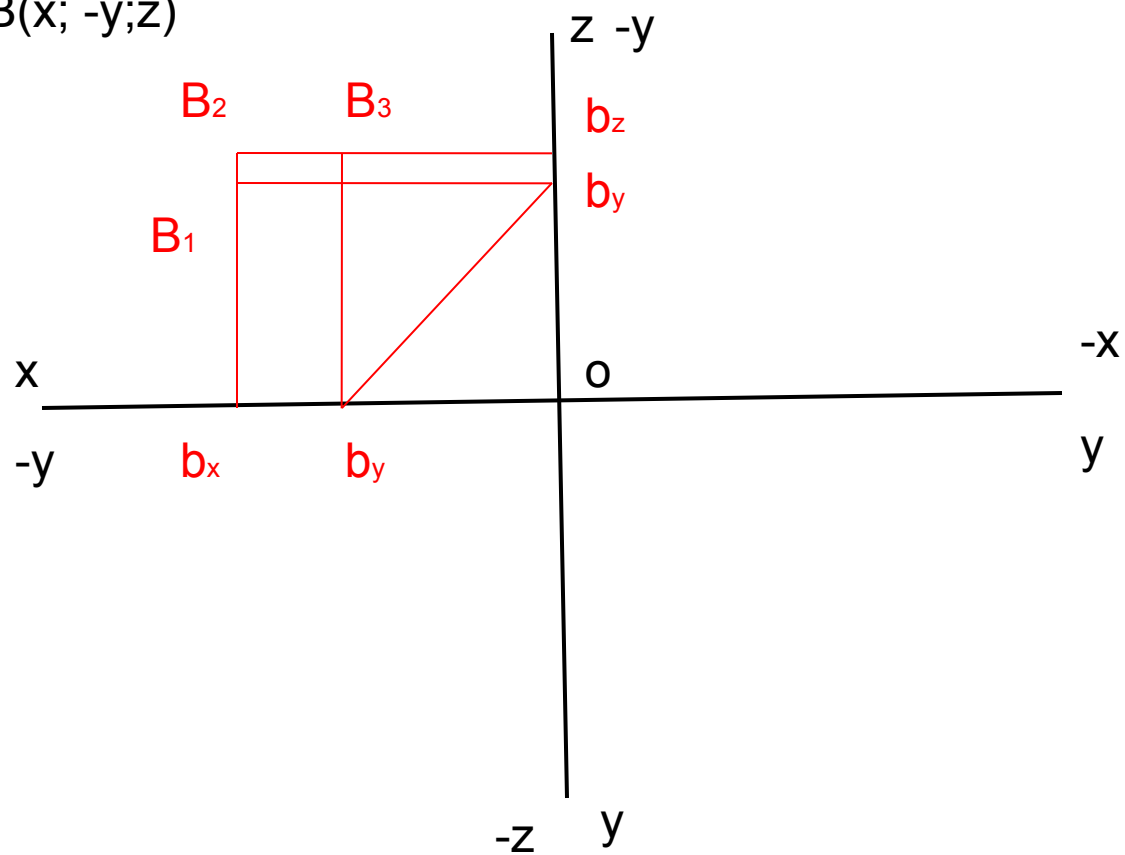
**Построить проекции точек с координатами:**

$A(x; y; z)$

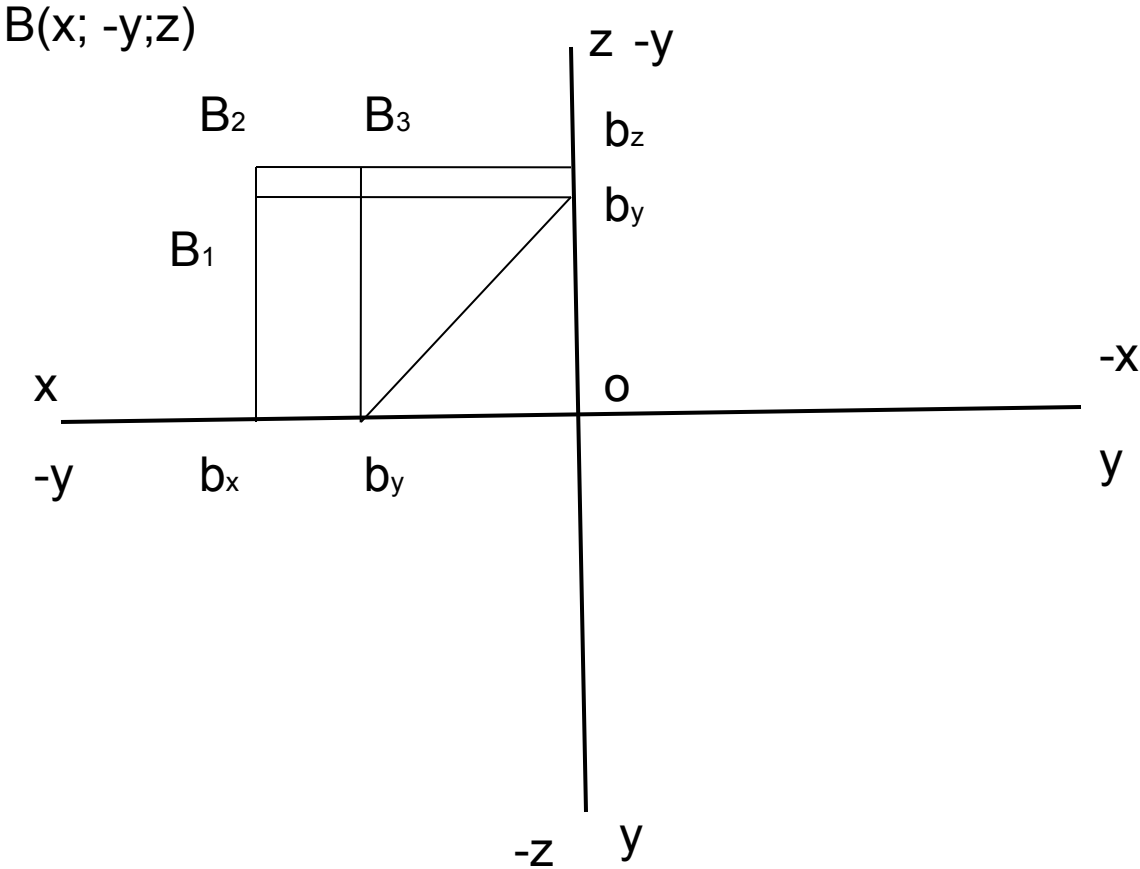


**Построить проекции точек с координатами:**

$B(x; -y; z)$

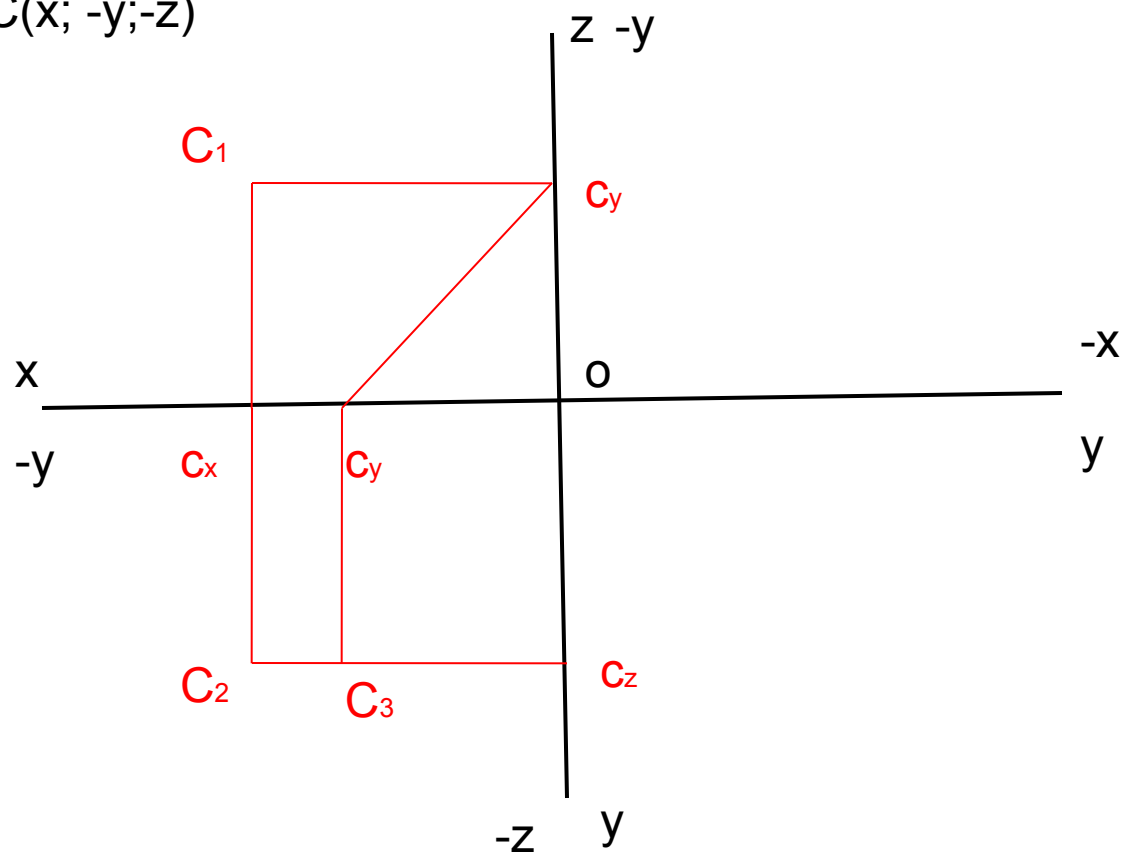


**Построить проекции точек с координатами:**



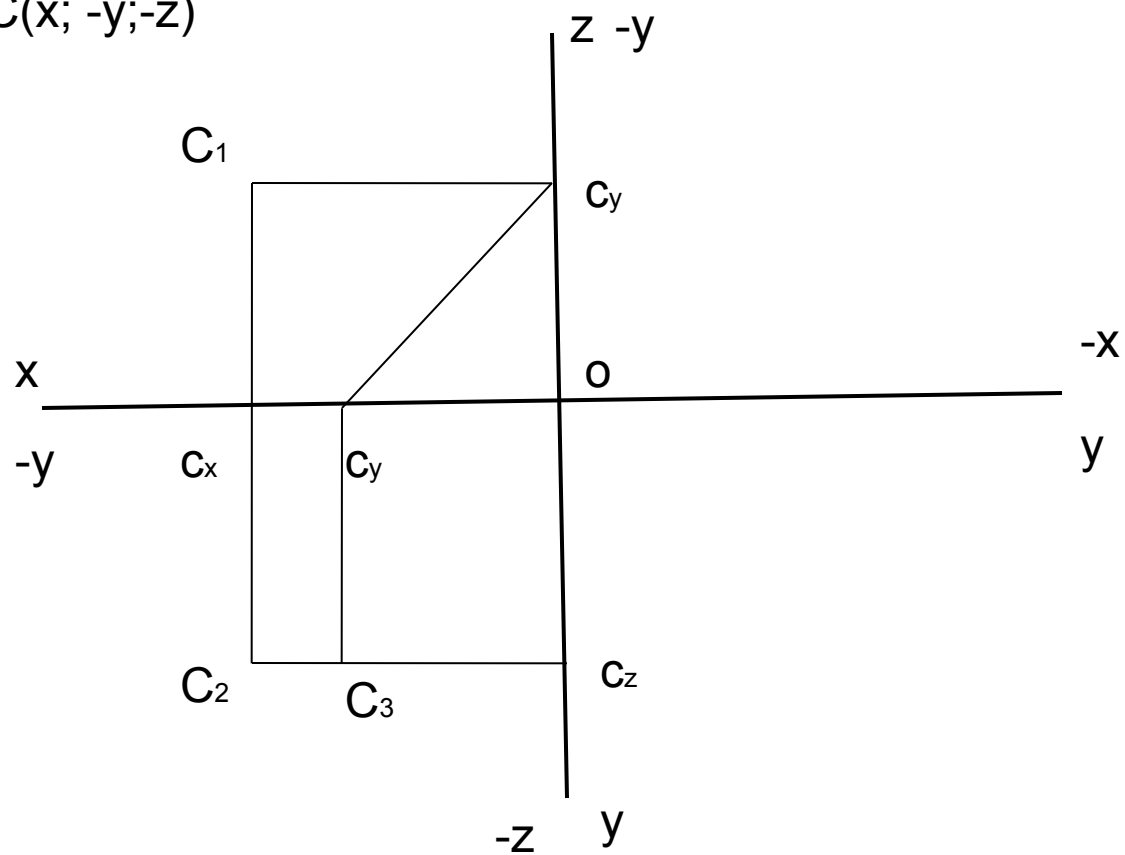
**Построить проекции точек с координатами:**

$C(x; -y; -z)$



**Построить проекции точек с координатами:**

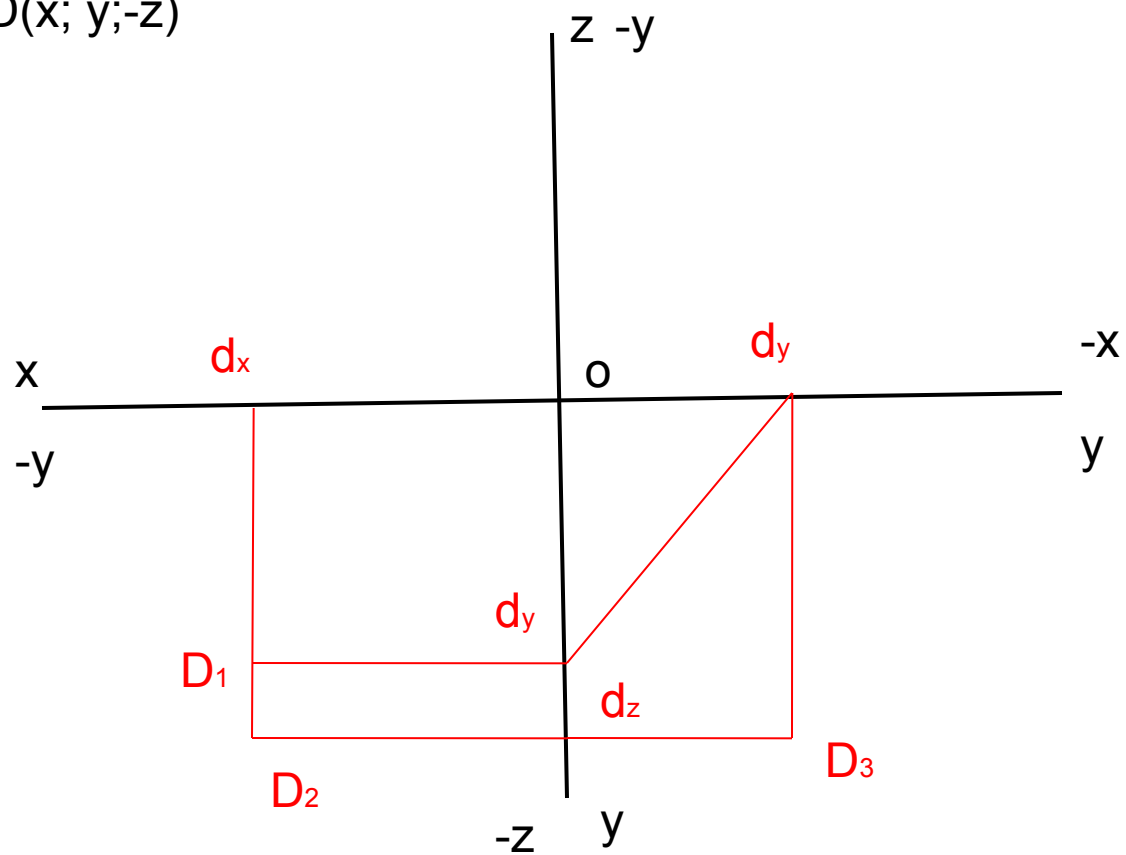
$C(x; -y; -z)$





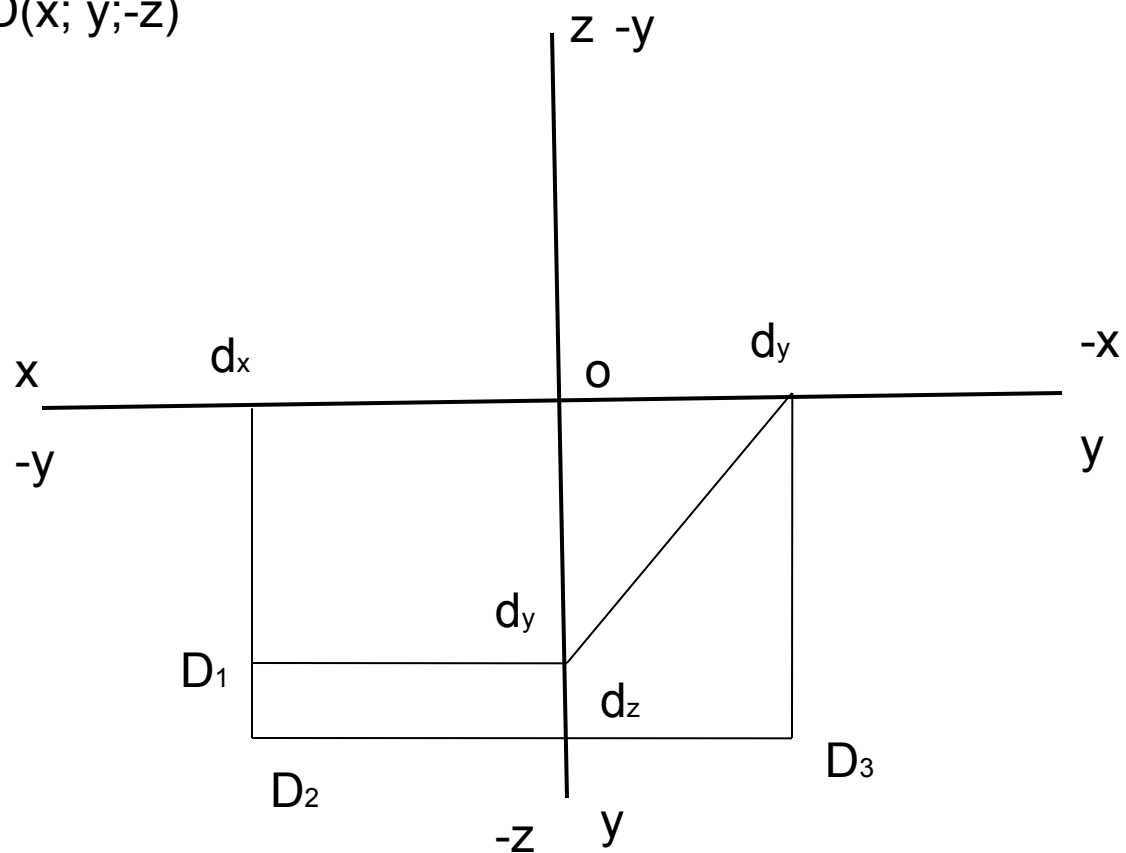
**Построить проекции точек с координатами:**

$D(x; y; -z)$



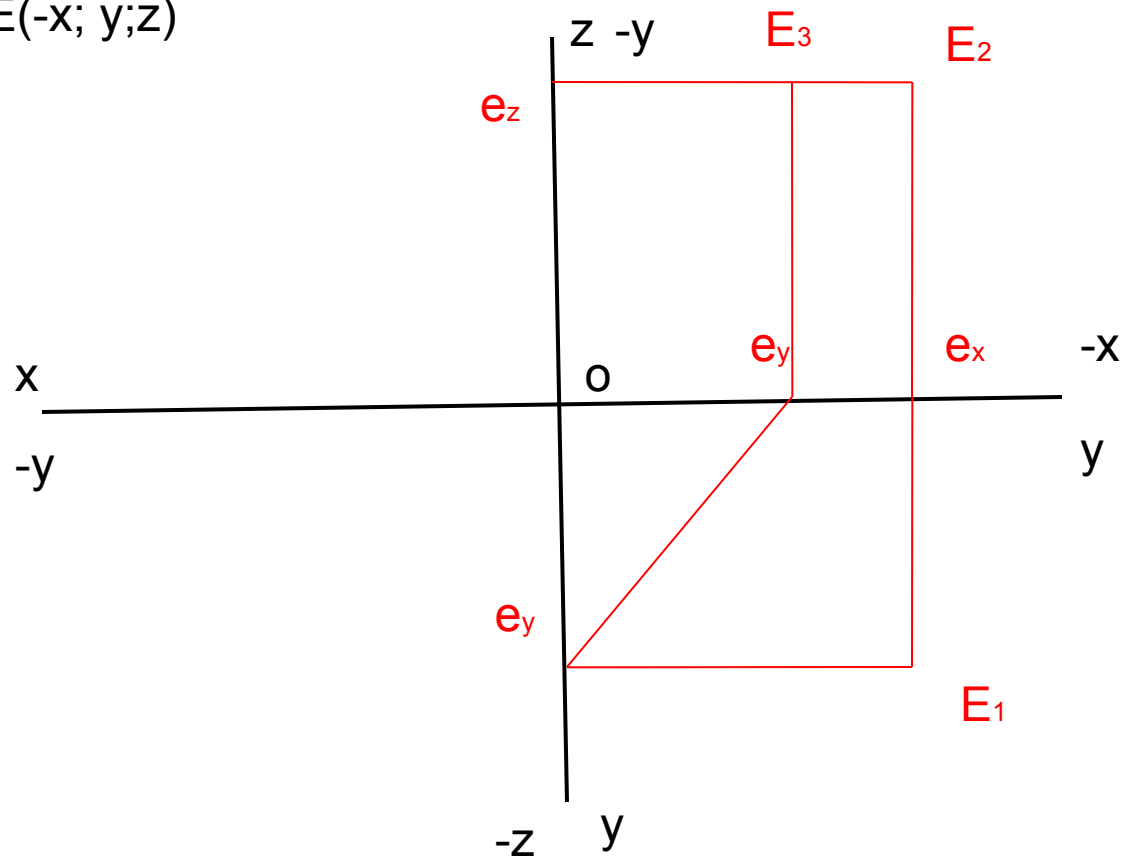
**Построить проекции точек с координатами:**

$D(x; y; -z)$



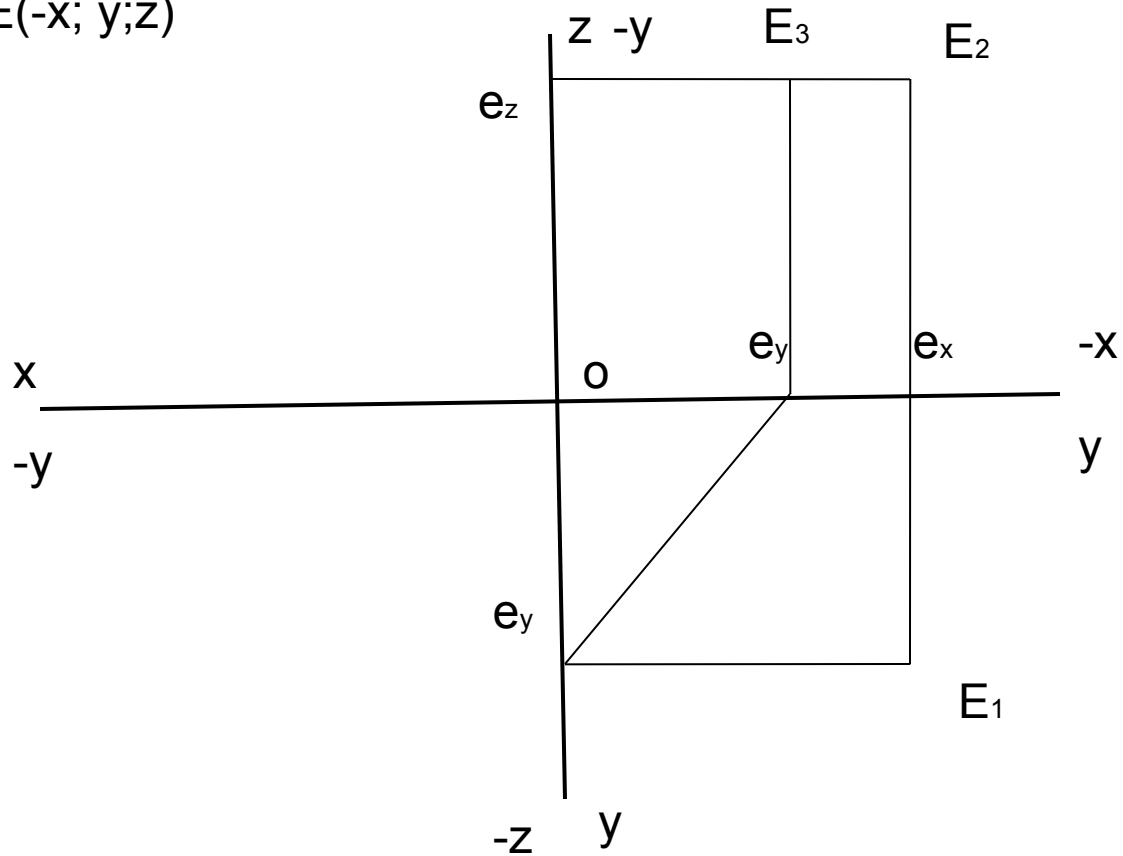
**Построить проекции точек с координатами:**

$E(-x; y; z)$



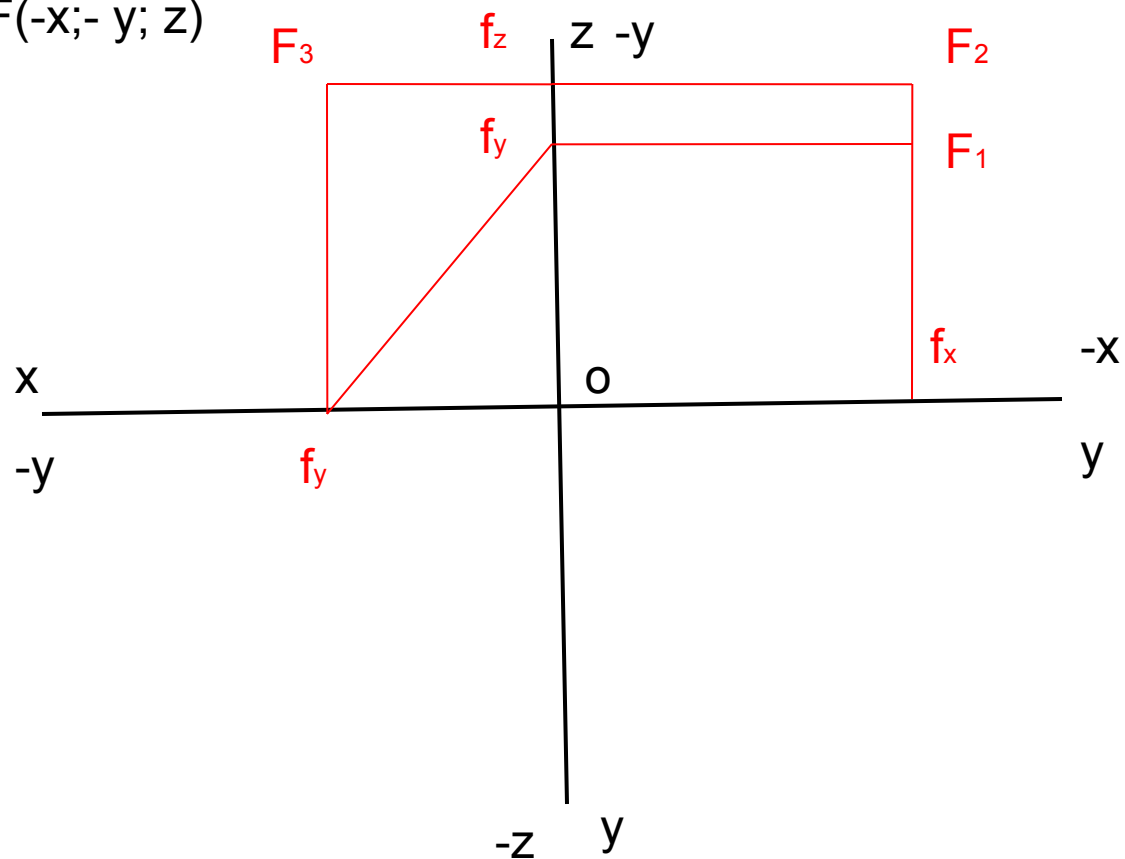
**Построить проекции точек с координатами:**

$E(-x; y; z)$



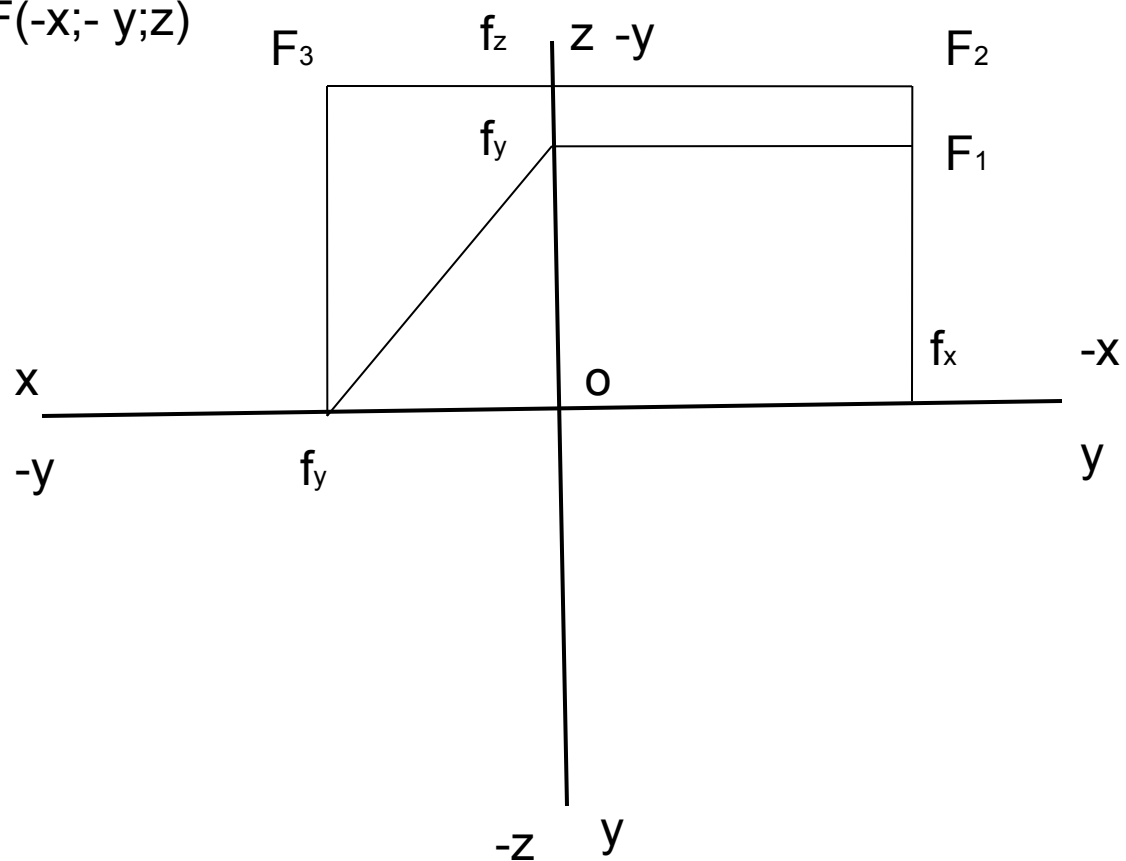
**Построить проекции точек с координатами:**

$F(-x; -y; z)$



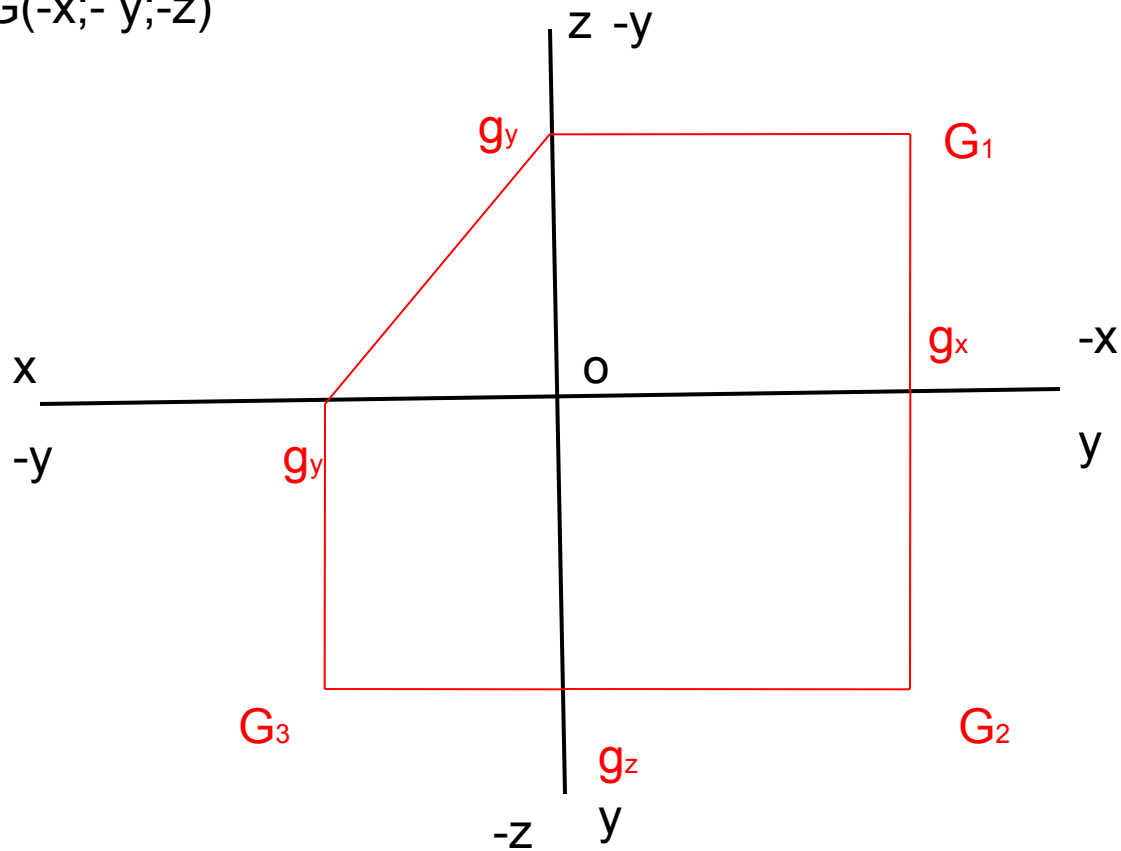
**Построить проекции точек с координатами:**

$F(-x; -y; z)$



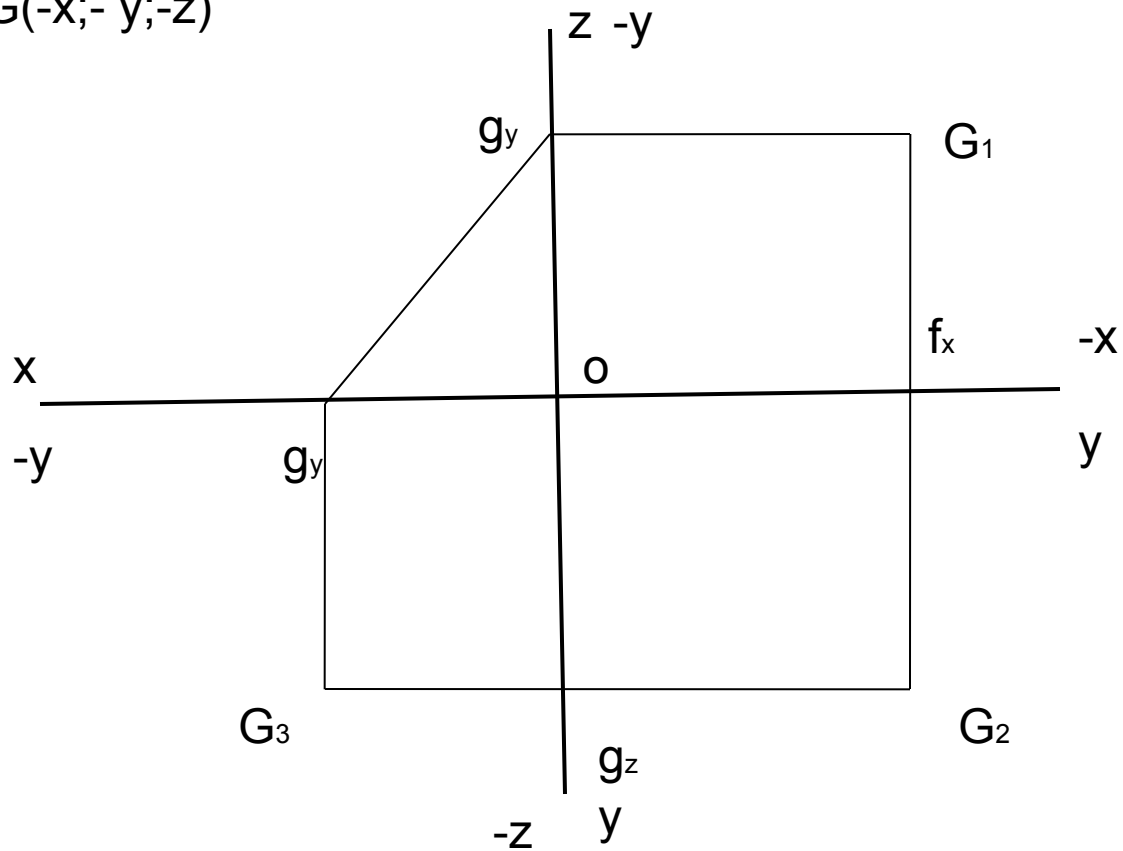
**Построить проекции точек с координатами:**

$G(-x; -y; -z)$



**Построить проекции точек с координатами:**

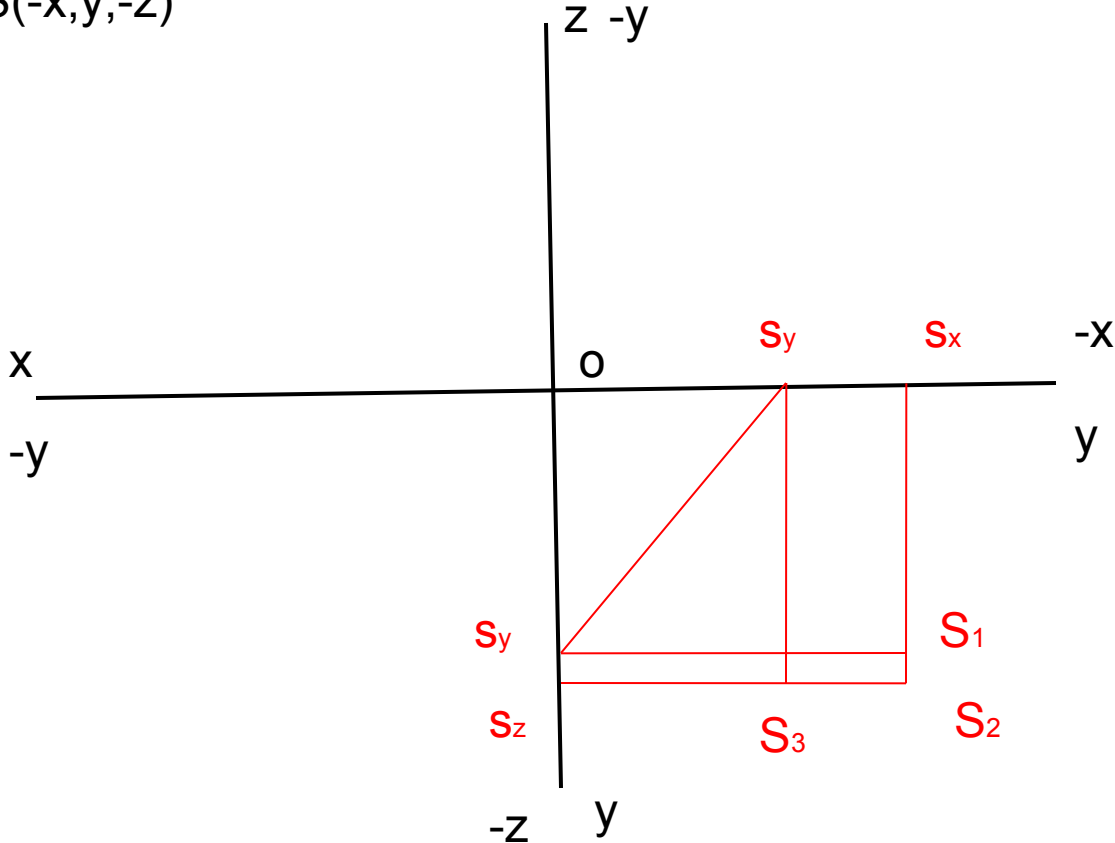
$G(-x; -y; -z)$





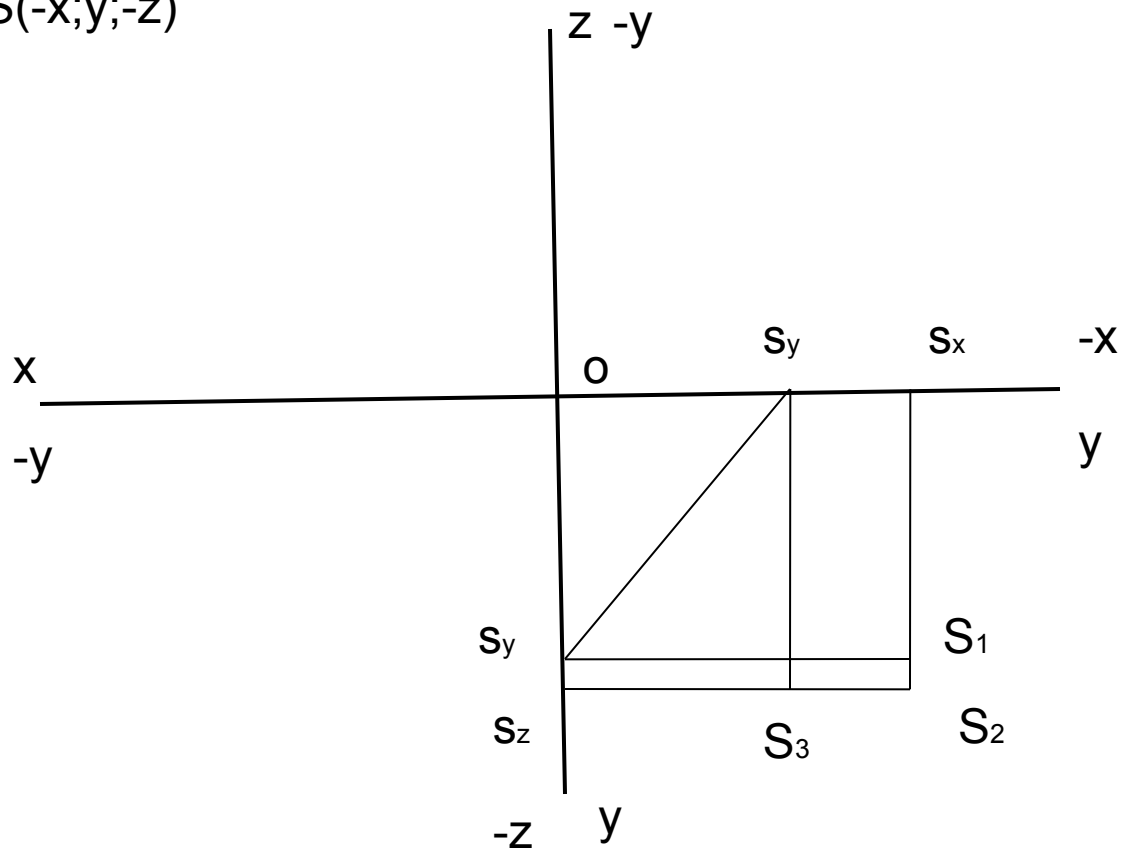
**Построить проекции точек с координатами:**

$S(-x; y; -z)$



**Построить проекции точек с координатами:**

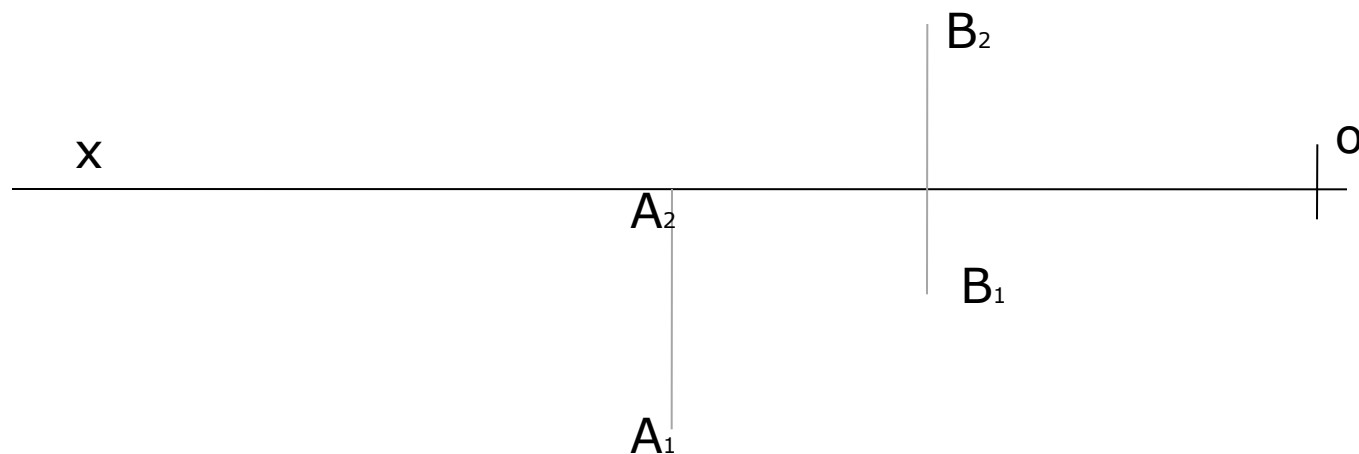
$S(-x; y; -z)$



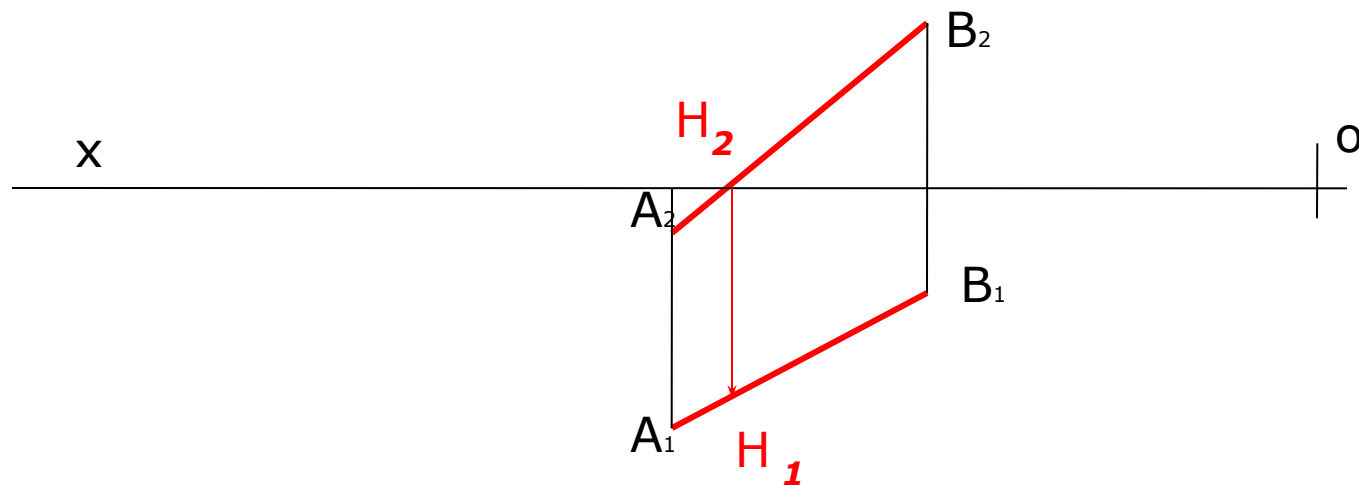


Следы прямой

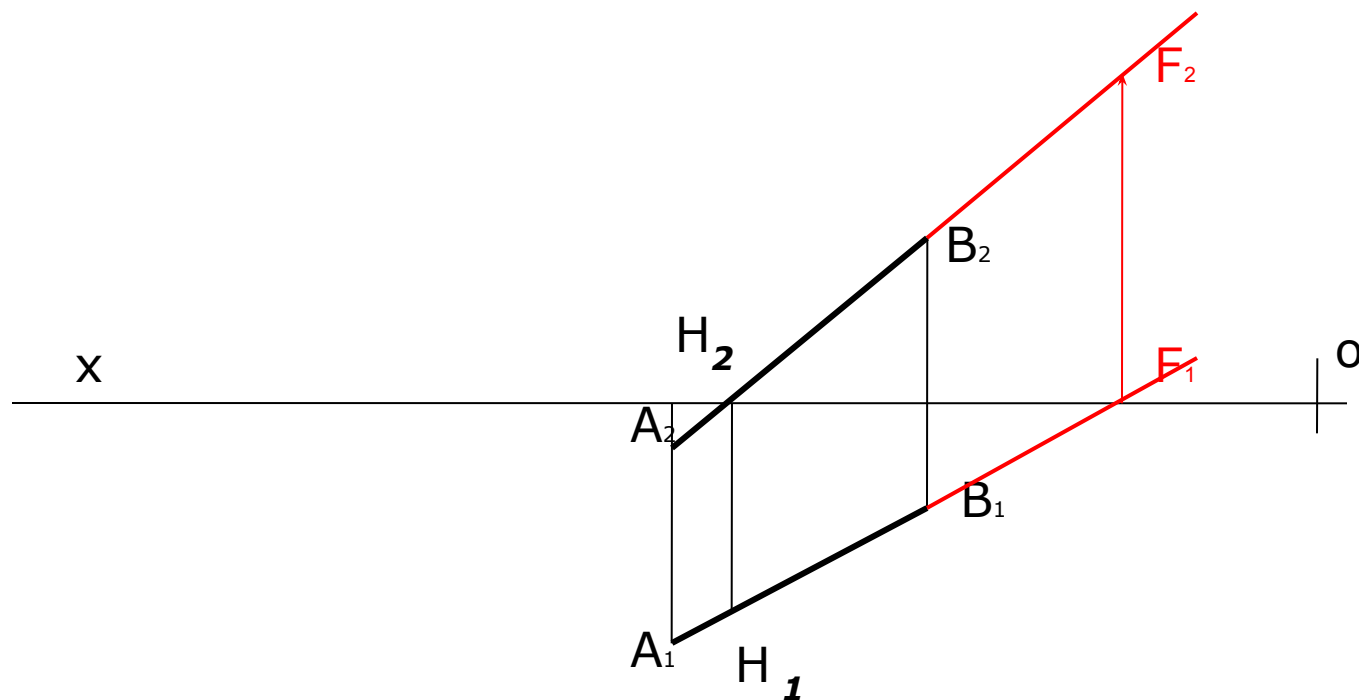
**ЗАДАЧА** Построить следы прямой  $AB$ , показать видимость прямой, дать характеристики положения прямой в пространстве относительно плоскостей проекций.



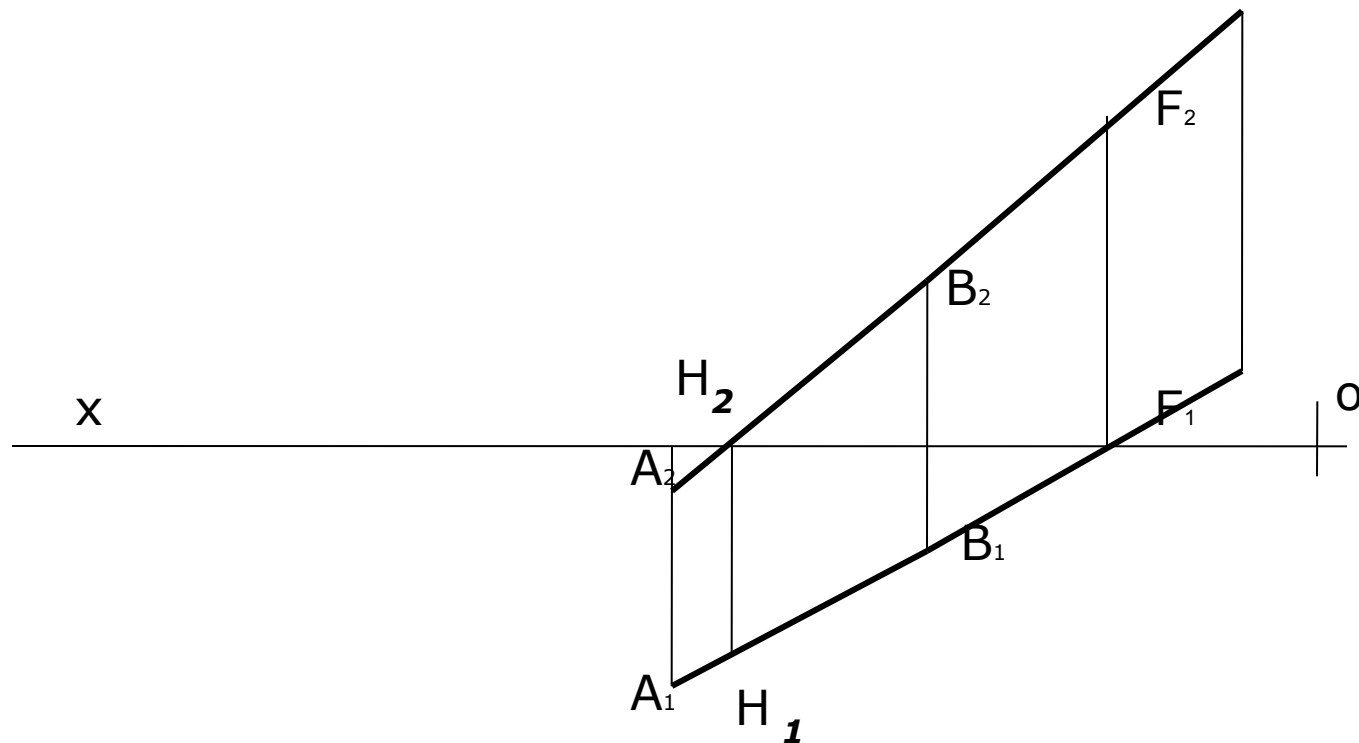
**2. Соединить одноименные проекции точек и определить горизонтальный след прямой - точку  $H$  ( $H_2 H_1$ )**



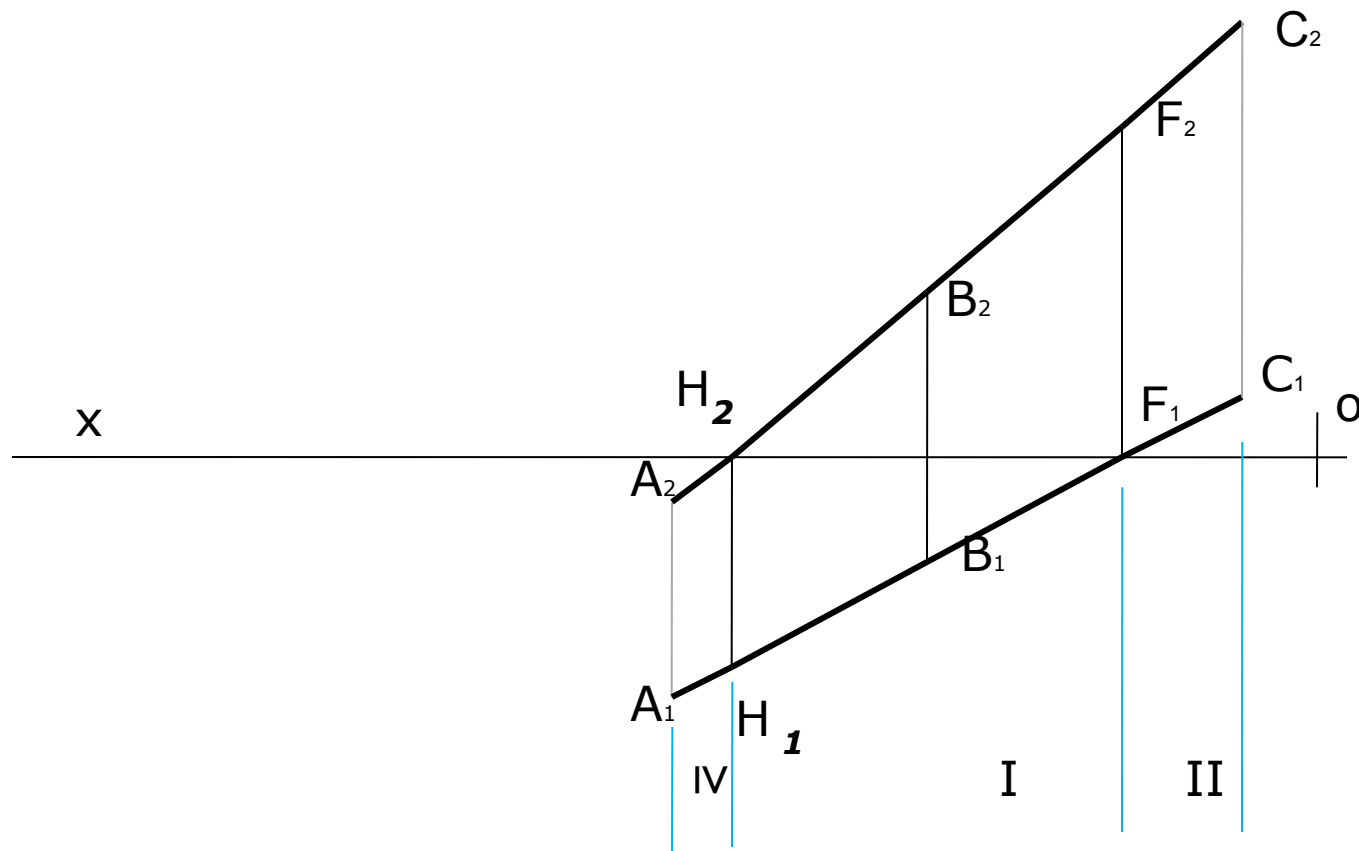
2. Определить фронтальный след прямой  $AB$  - точку  $F (F_2, F_1)$



**3. Определить характеристики положения прямой в пространстве относительно плоскостей проекций (точка  $C$  - произвольная).  
Показать видимость прямой**



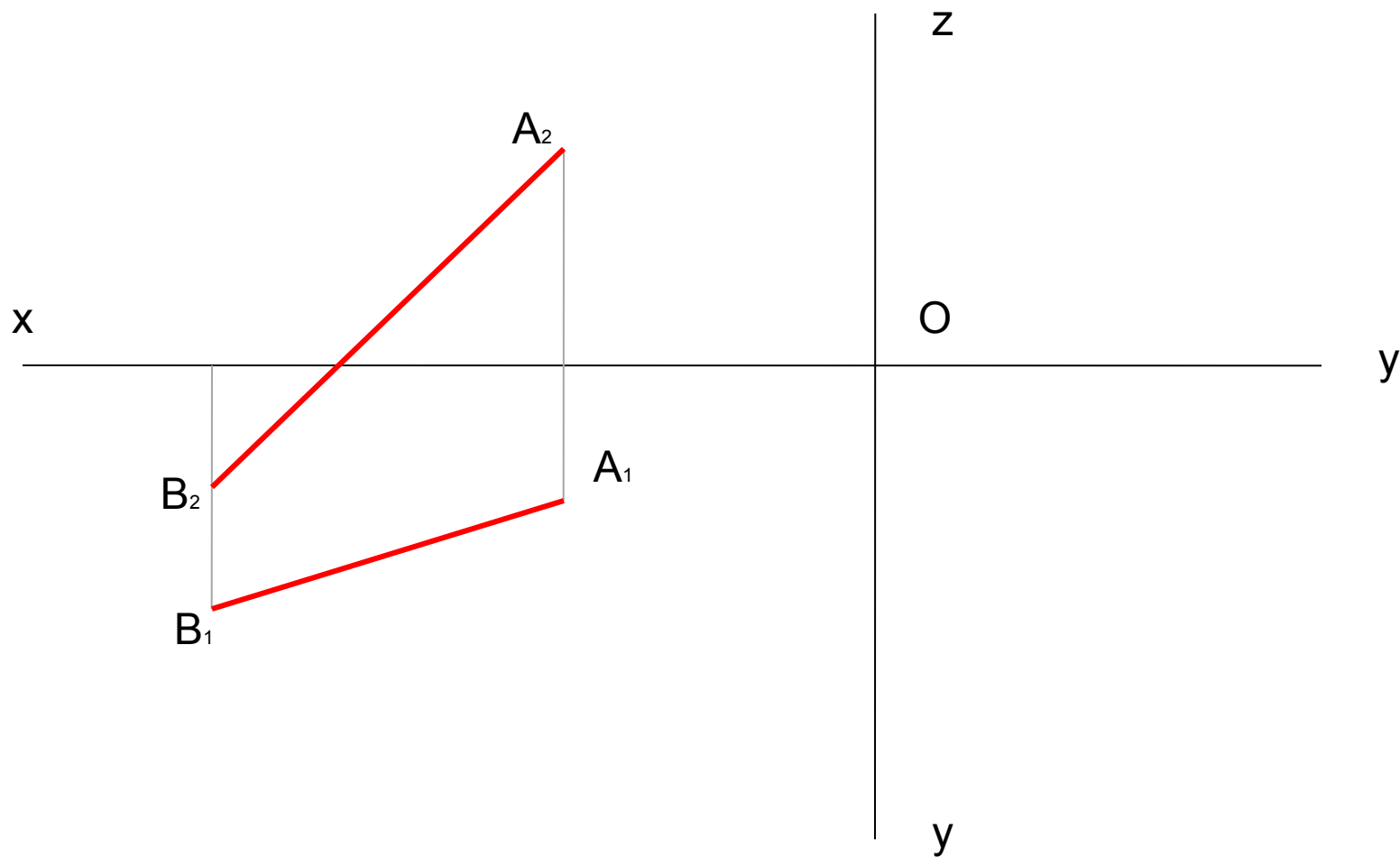
3. Определить характеристики положения прямой в пространстве относительно плоскостей проекций (точка  $C$  - произвольная). Показать видимость прямой.



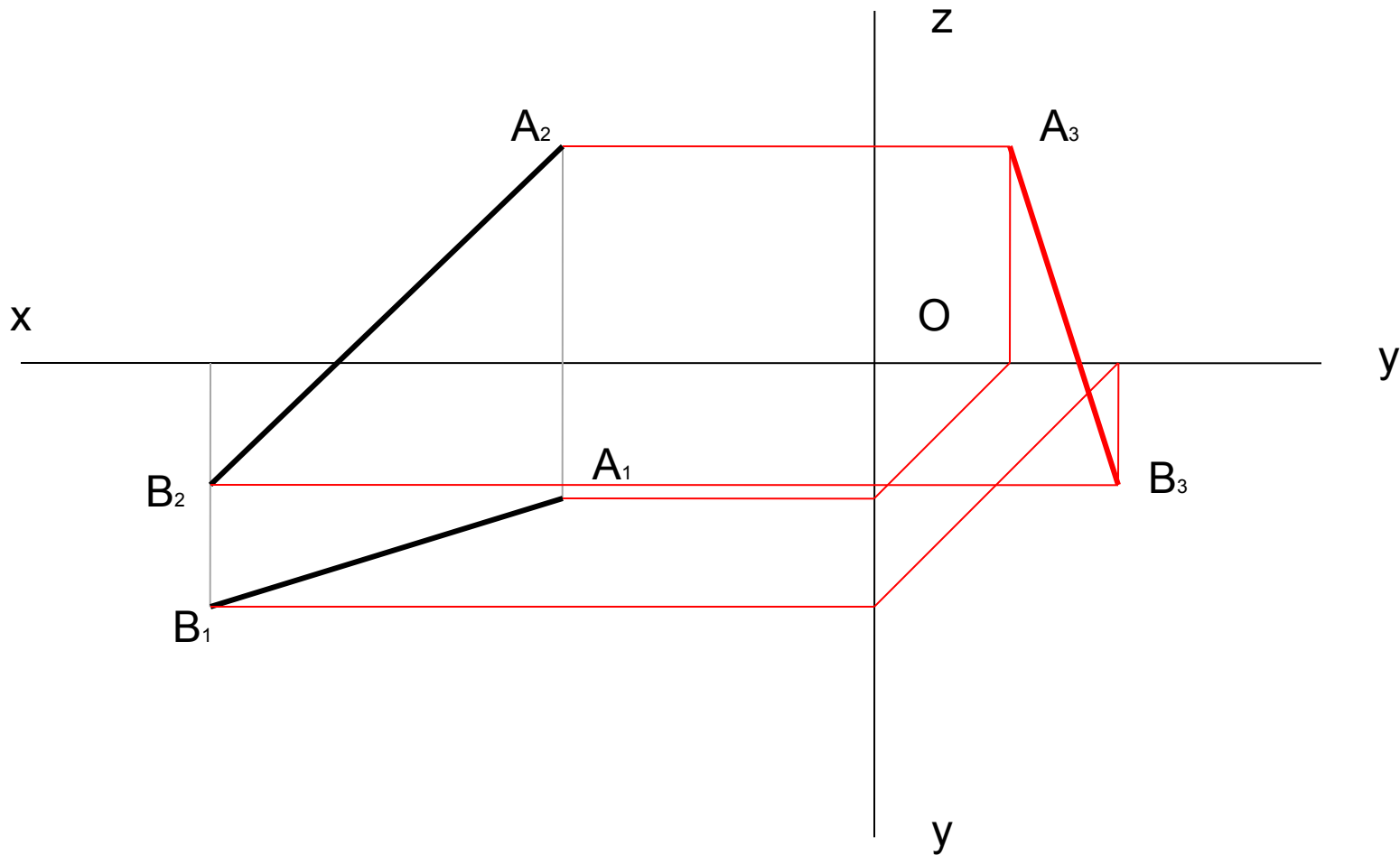


Определение истинной величины  
отрезка прямой и углов наклона  
прямой к плоскостям проекций

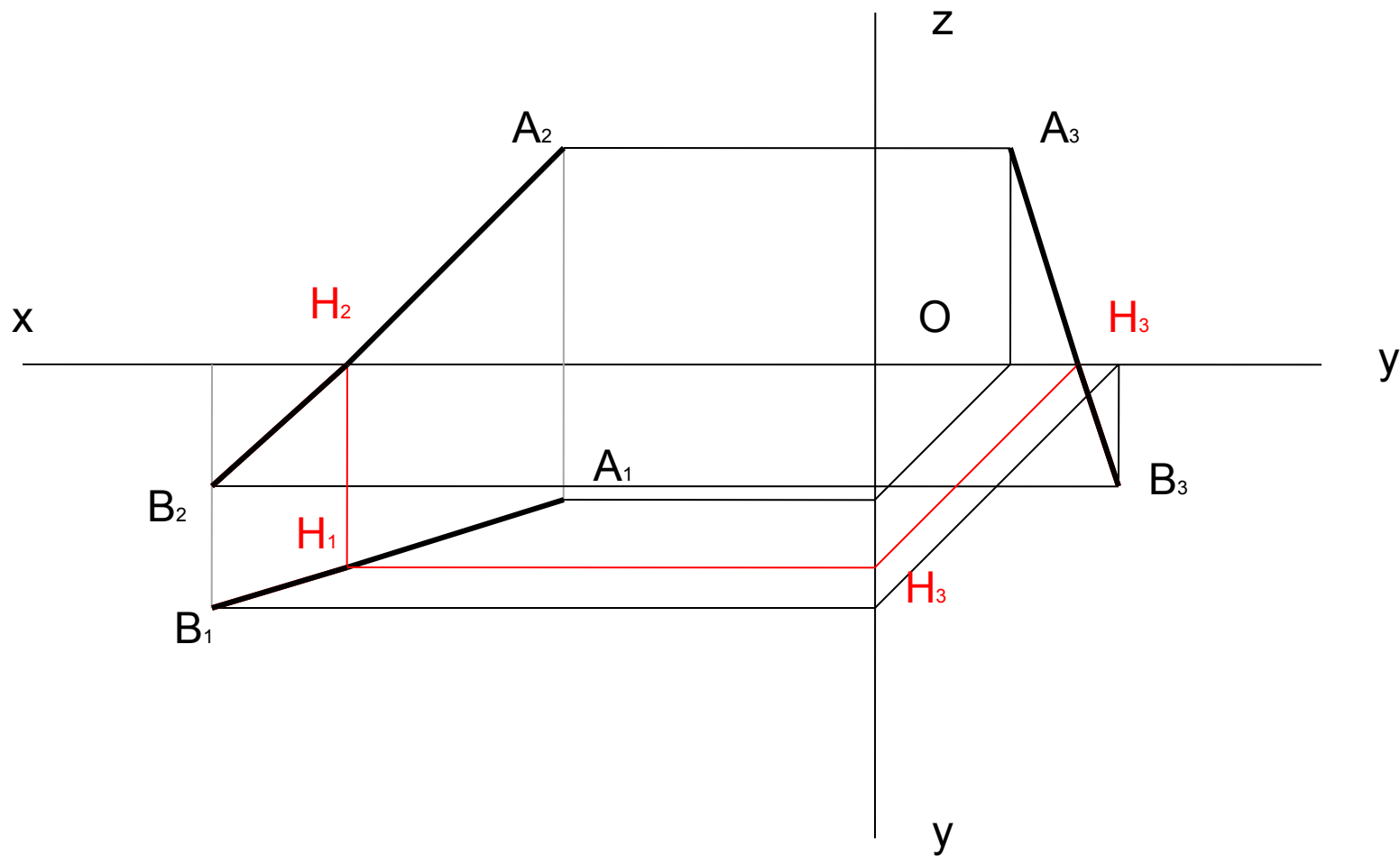
**ЗАДАЧА** По двум заданным проекциям отрезка найти его истинную величину и углы наклона его к плоскостям проекций.



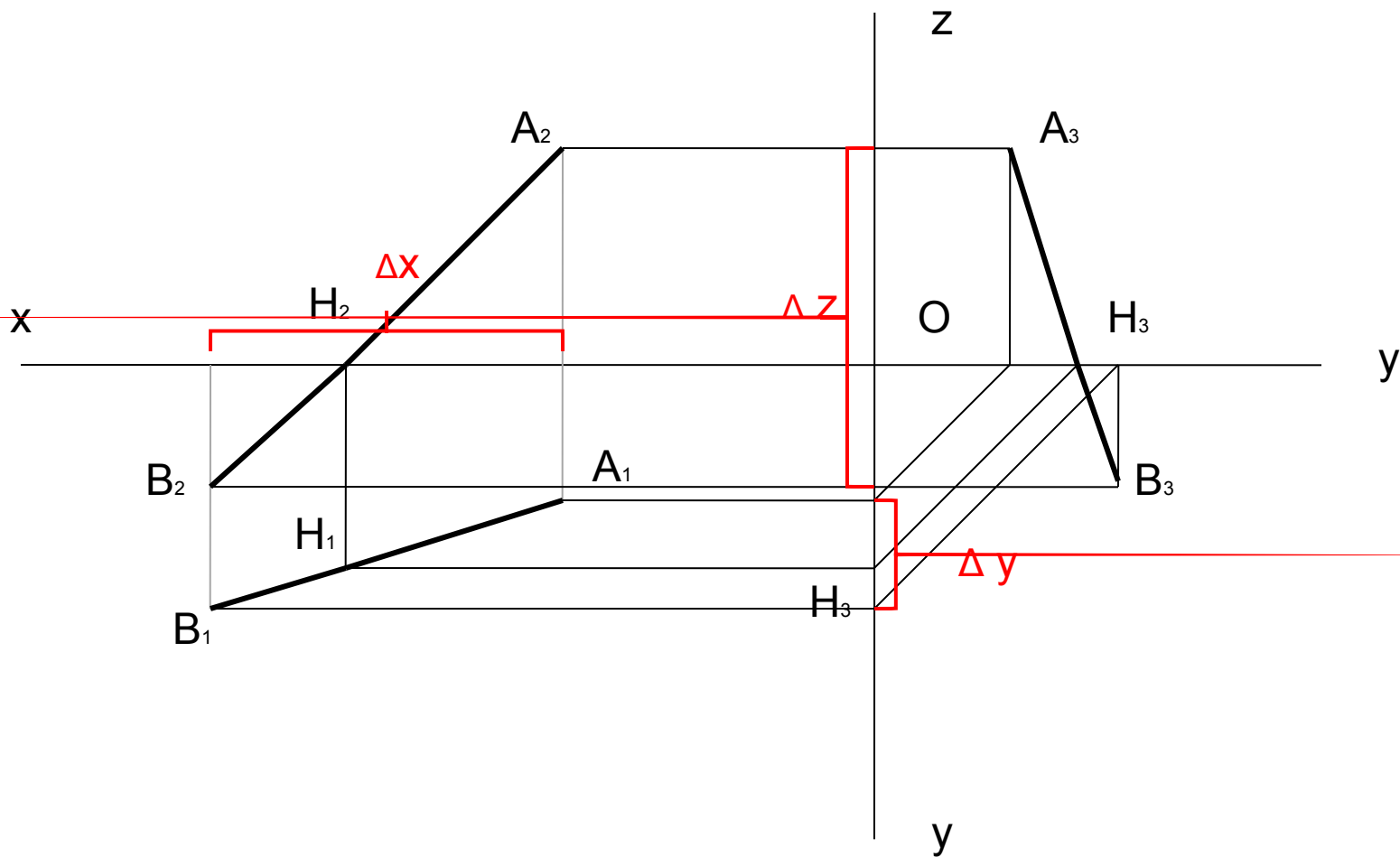
# 1. Построить профильную проекцию заданного отрезка $AB$



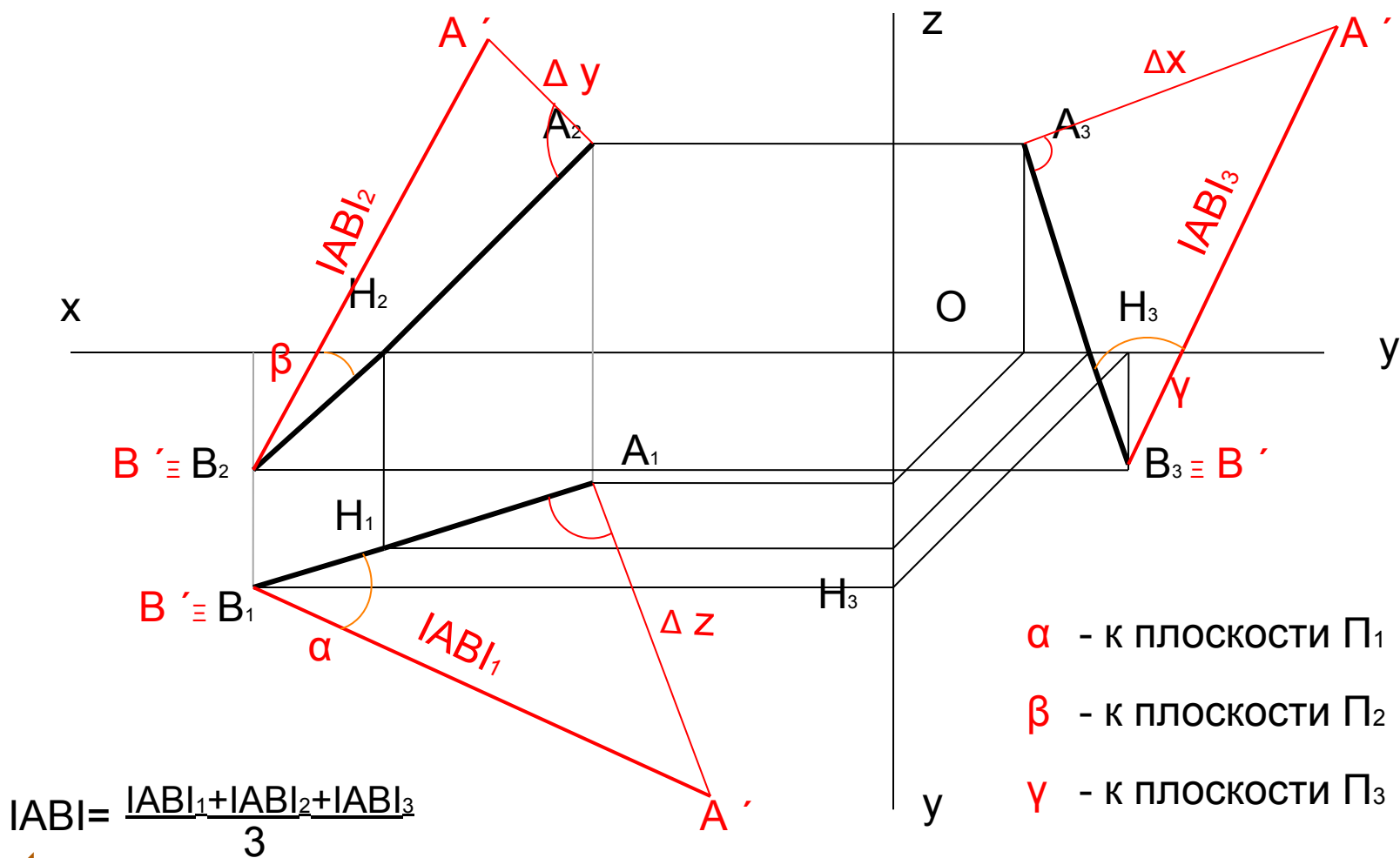
## 2. Определить следы отрезка и показать видимость его.



3. Определить графически алгебраическую разность координат концов заданного отрезка:  $x = x_B - x_A$   $y = y_B - y_A$   $z = z_A - z_B$



**4. Найти истинную величину отрезка и углы наклона его к плоскостям проекций**



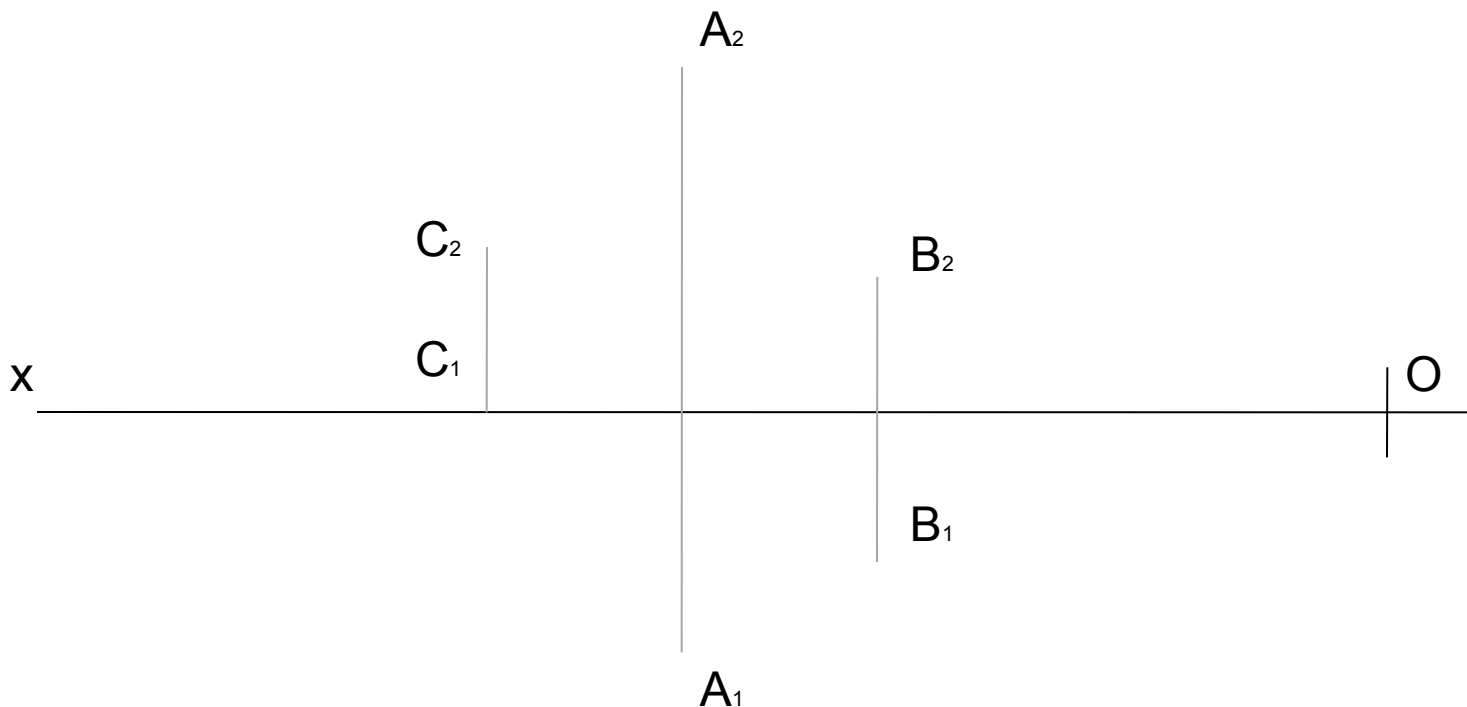
$$|AB| = \frac{|AB|_1 + |AB|_2 + |AB|_3}{3}$$





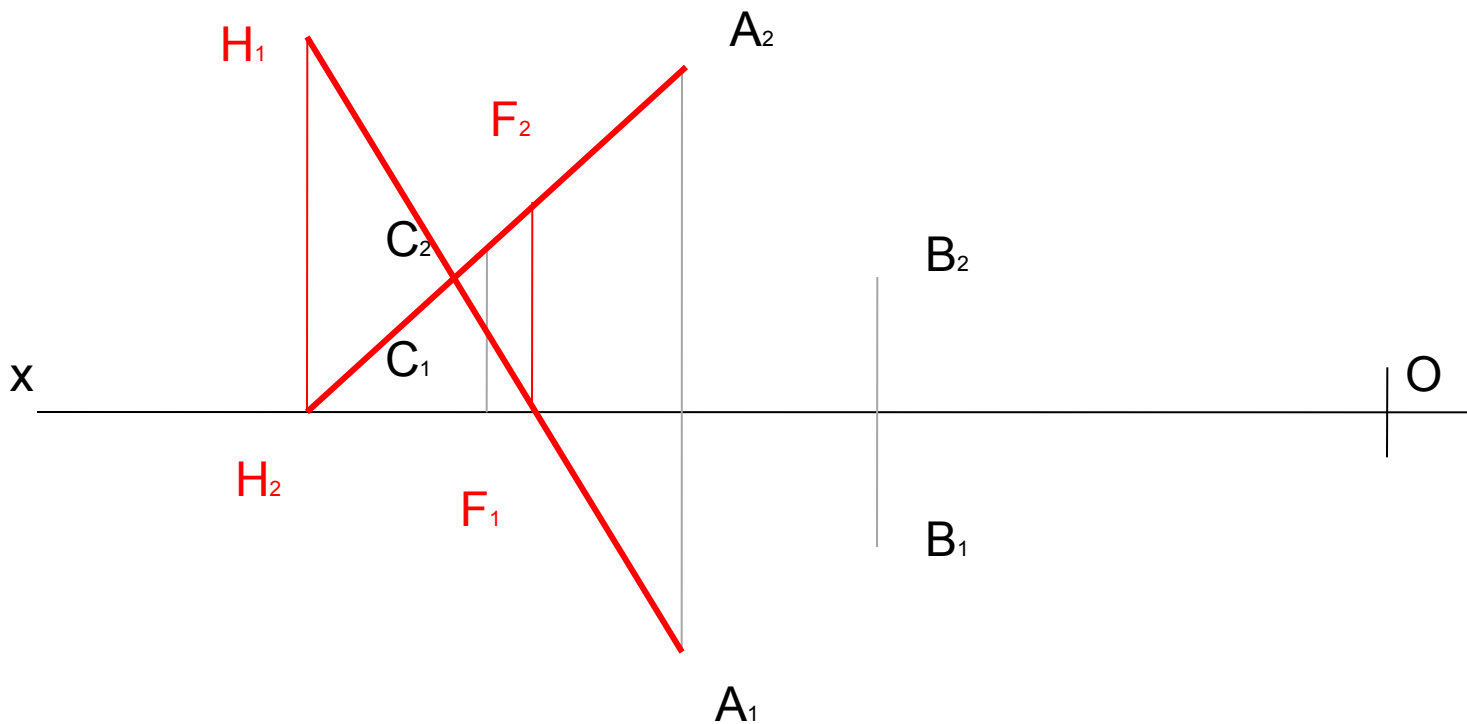
# Следы плоскости

**ЗАДАЧА** Через три заданные точки построить плоскость, показать видимость отрезков и следов плоскости. В заданной плоскости провести горизонталь с отметкой  $z = 5$  ед. и фронталь с отметкой  $Y=4$  ед.

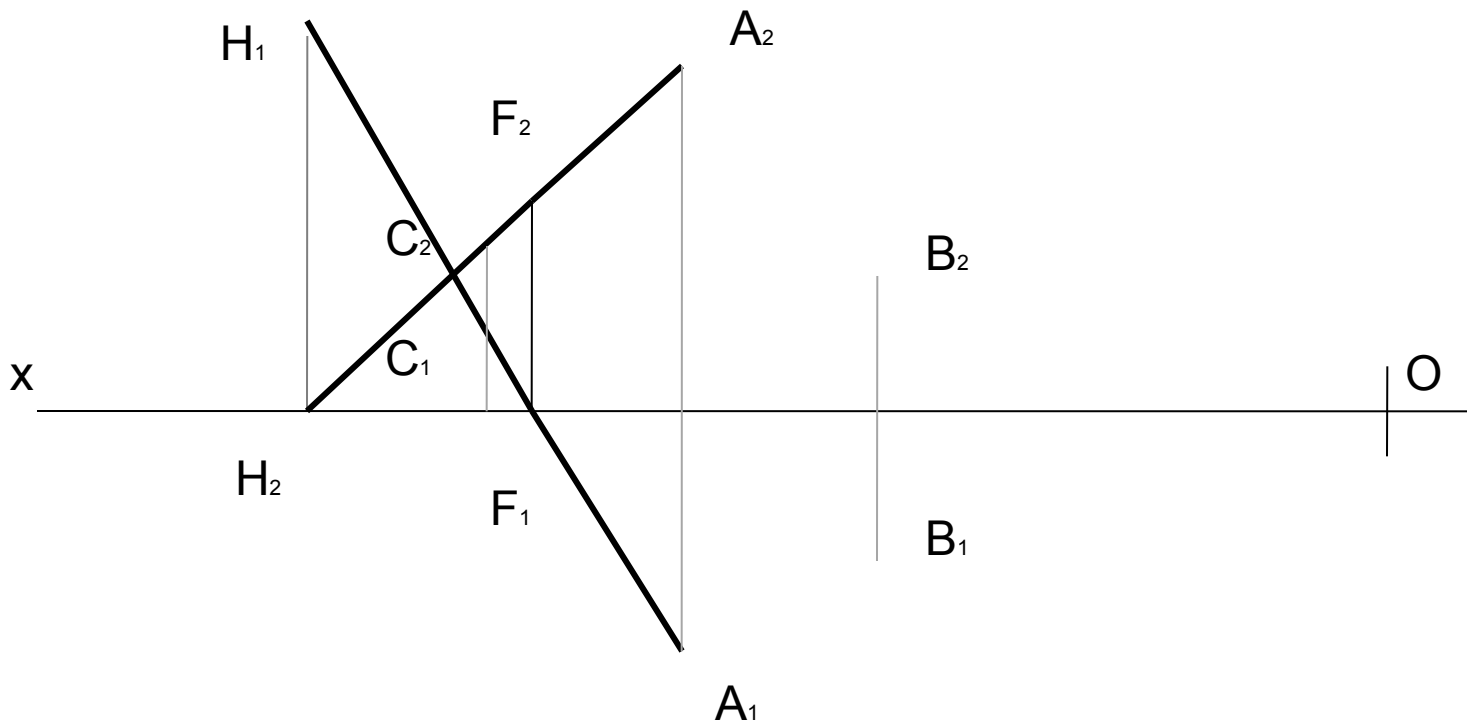




1. Соединить любую пару заданных точек (например, А и С), найти следы и показать видимость полученной прямой,  $F(F_2 F_1) = AC \cap \Pi_2$   
 $H(H_2 H_1) = AC \cap \Pi_1$

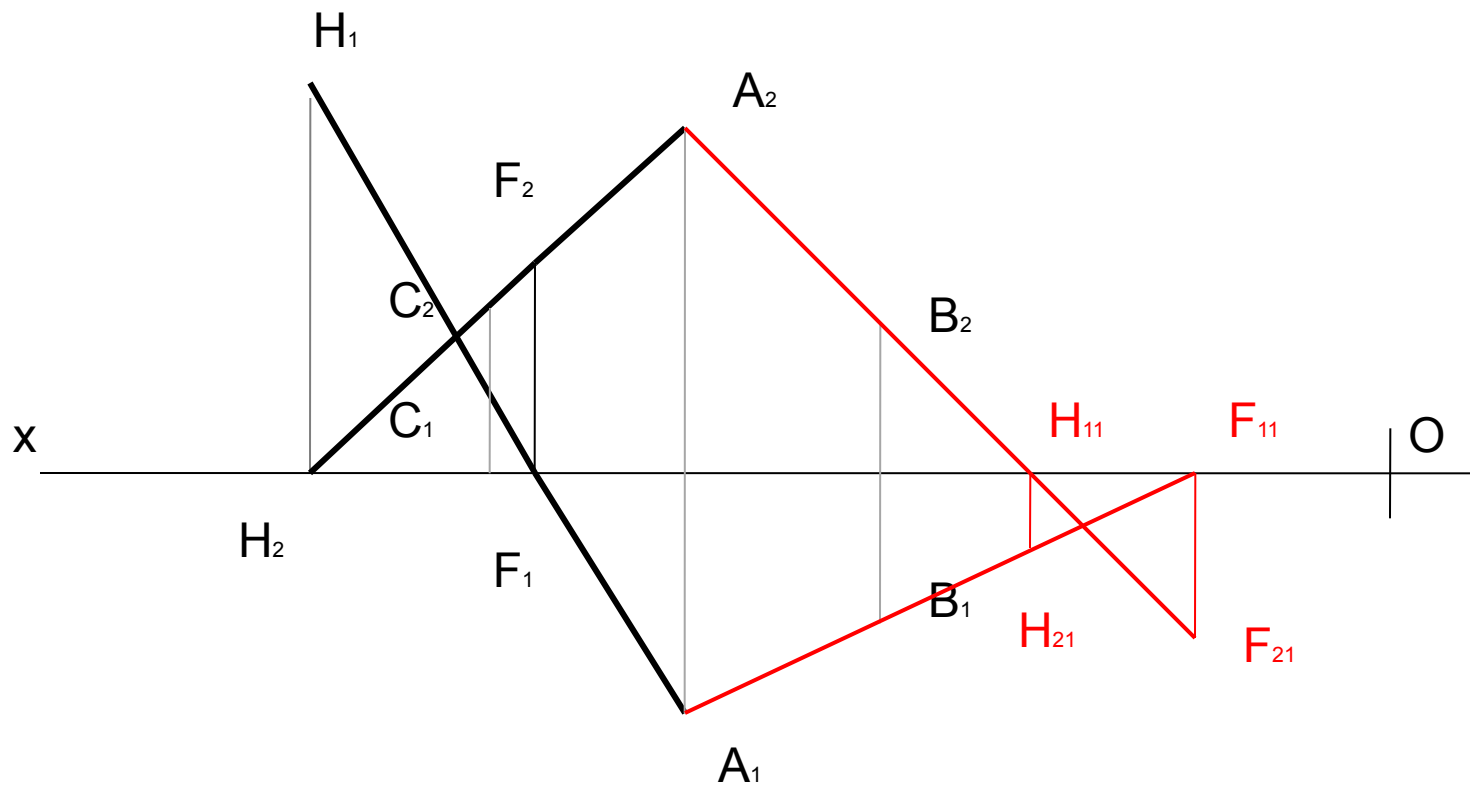


1. Соединить любую пару заданных точек (например, А и С), найти следы и показать видимость полученной прямой,  $F(F_2 F_1) = AC \cap \Pi_2$   
 $H(H_2 H_1) = AC \cap \Pi_1$



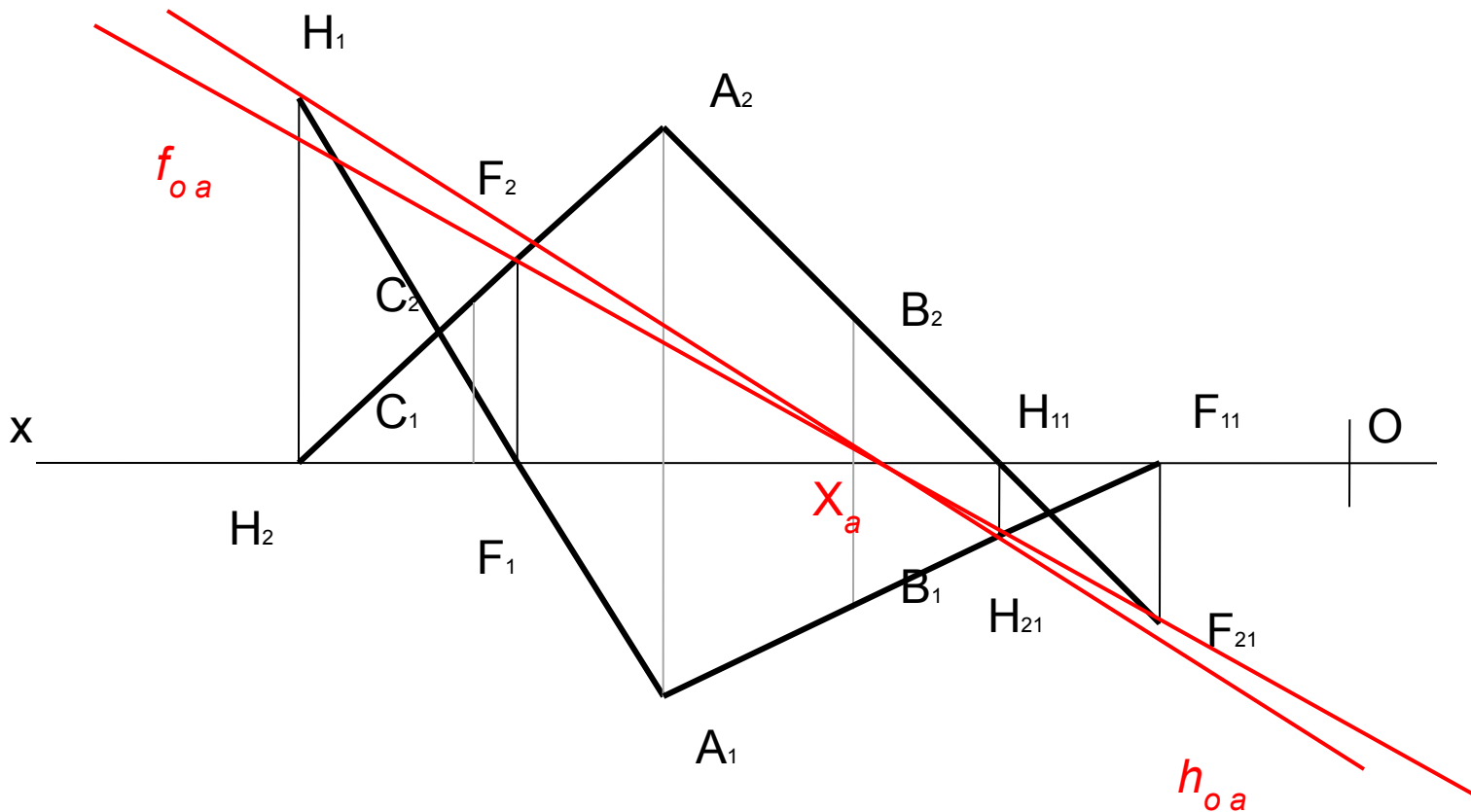
2. Соединить другую пару заданных точек (например, A и B),  
найти также следы и показать видимость этой прямой

$$F_1(F_{21}, F_{11}) = AB \cap \Pi_2 \quad H_1(H_{21}, H_{11}) = AB \cap \Pi_1$$





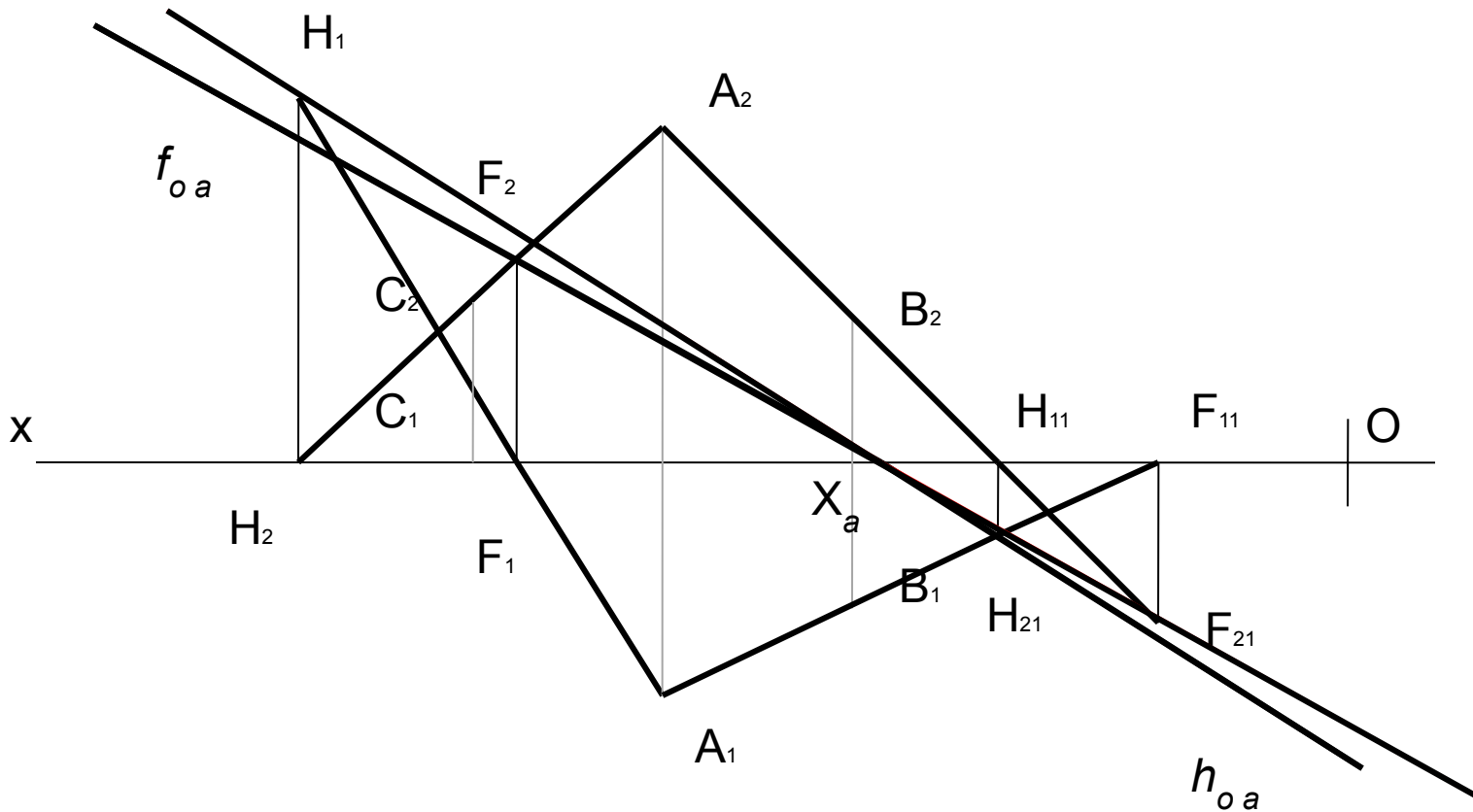
3. Через следы прямых провести соответствующие следы плоскости  $FF_1 = f_{oa}$   $H H_1 = h_{oa}$ . Следы плоскостей должны пересекаться на оси  $O_x$ ;  $X_a = h_{oa} \cap f_{oa}$ ;  $X_a \in O_x$



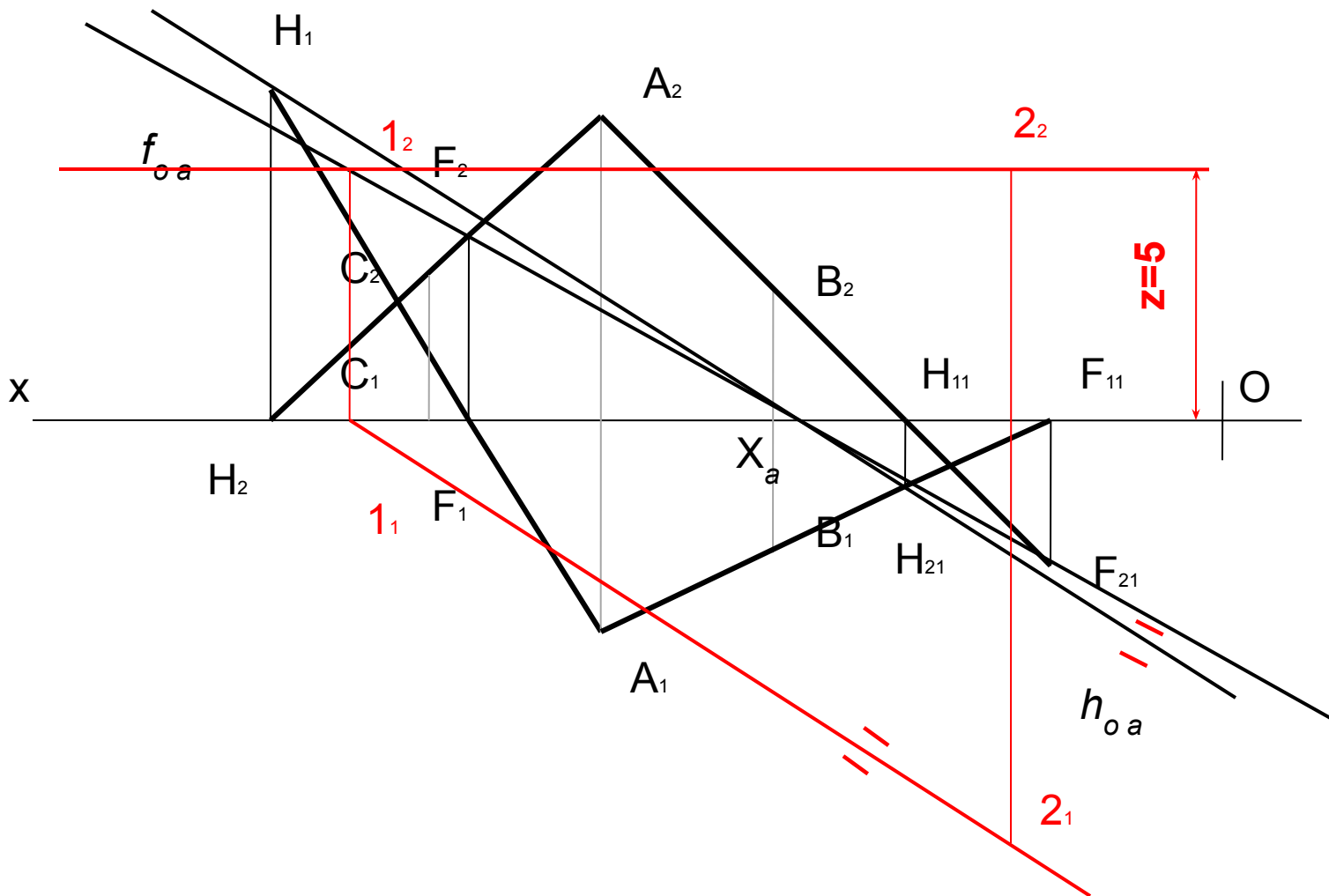
#### 4 Показать видимость следов плоскости

$f_{oa}$  - всегда видны выше оси  $Ox$

$h_{oa}$  - всегда видны ниже оси  $Ox$



5. Провести горизонталь плоскости 1 2 ( $1_2 2_2, 1_1 2_1$ ) с отметкой  $z=5$   
 $1_2 2_2 \parallel O_x$      $1_1 2_1 \parallel h_{0a}$



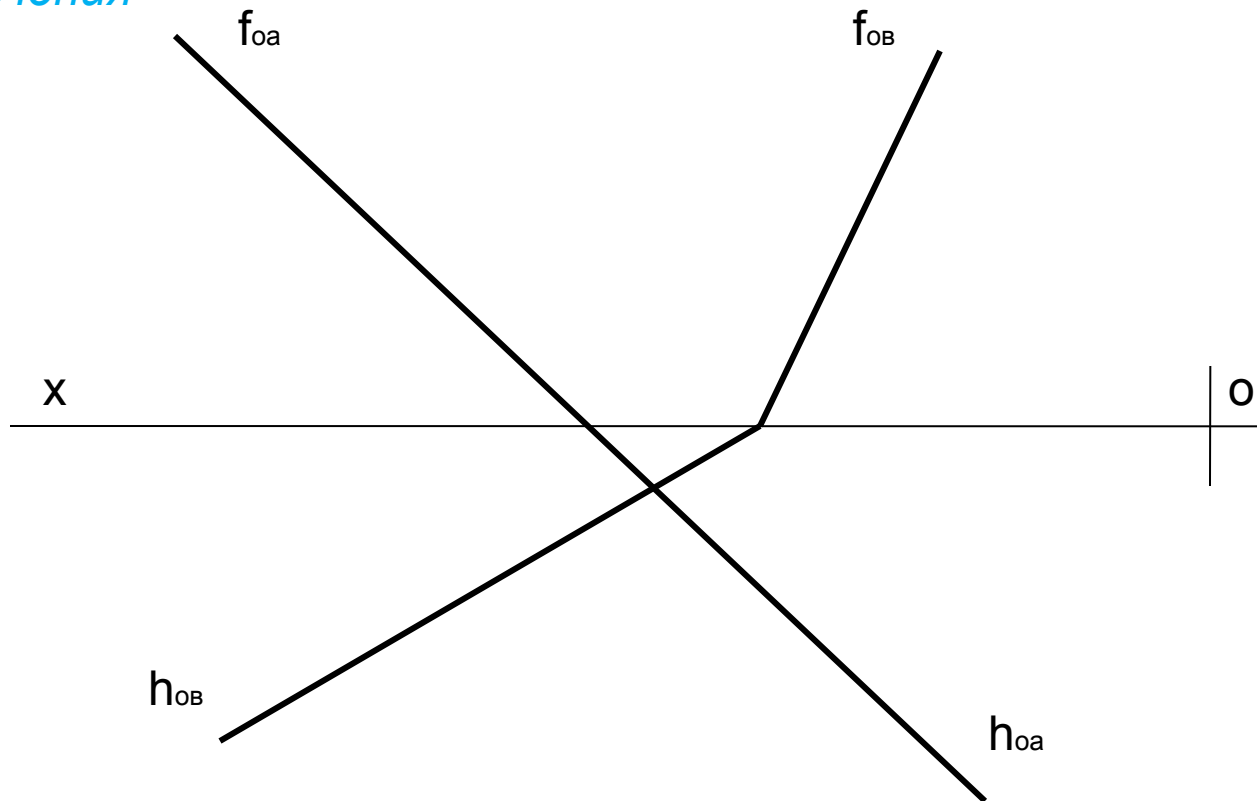




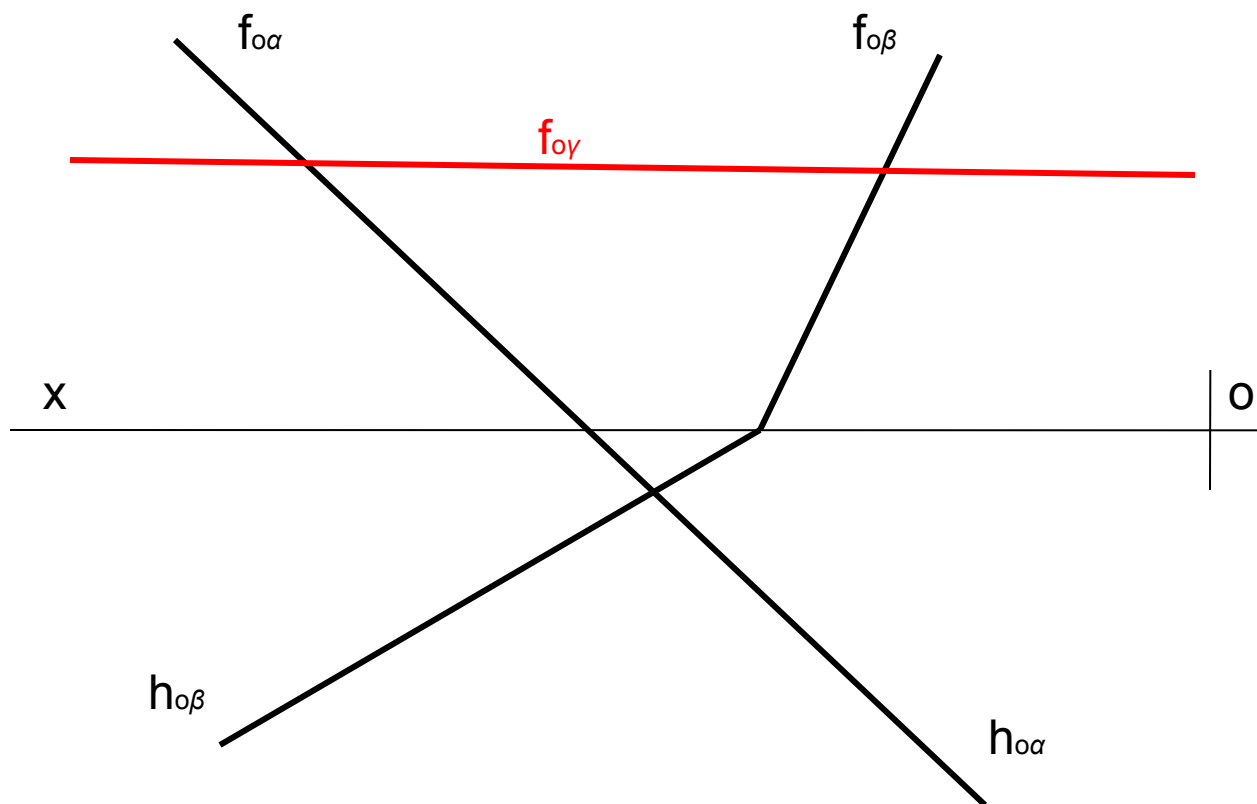
# Пересечение двух плоскостей

(плоскости общего положения)

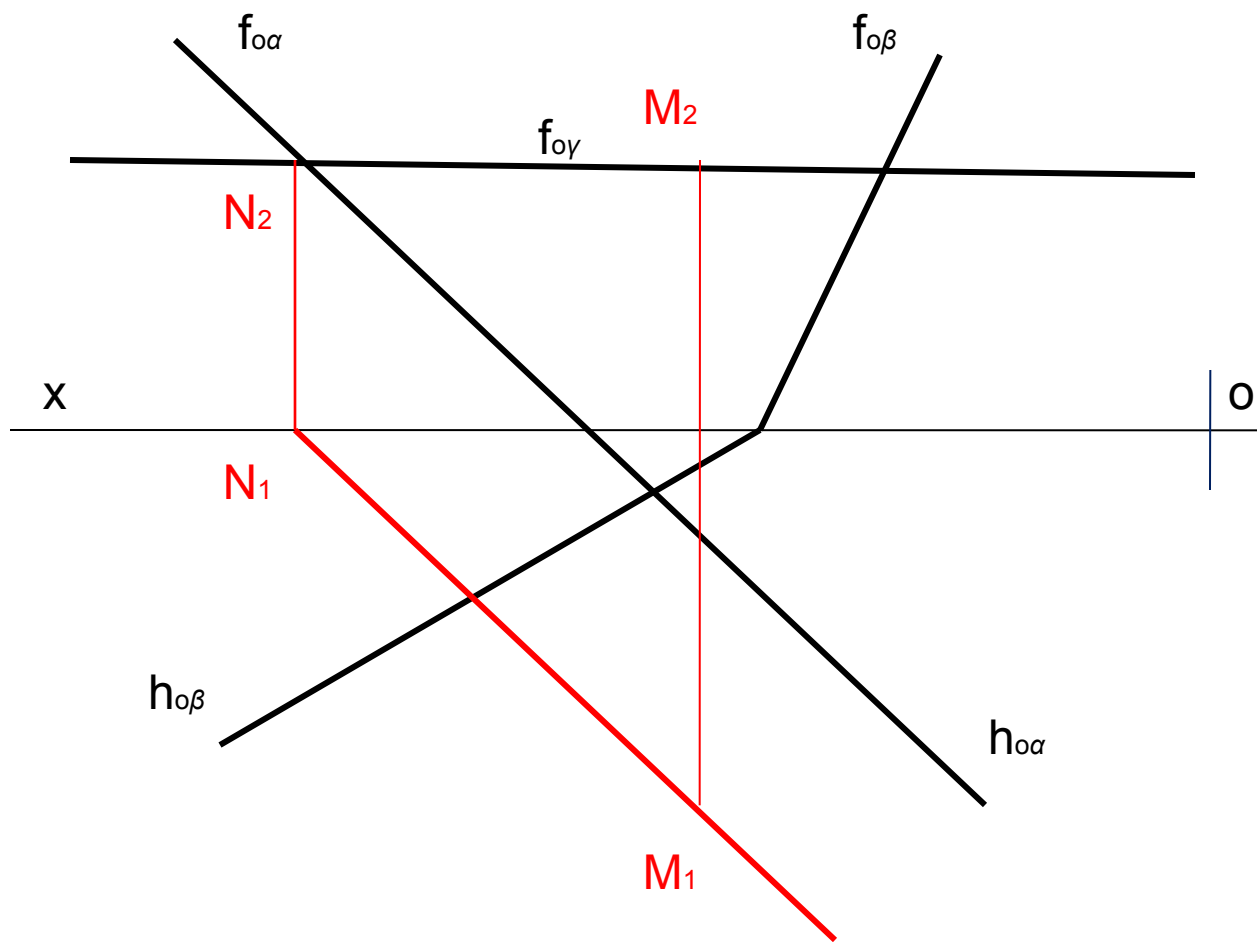
**Задача** Построить линию пересечения 2-х плоскостей заданных следами, когда следы плоскостей пересекаются в пределах чертежа, Дать характеристику положения линии пересечения в пространстве относительно плоскостей проекций. Показать видимость следов плоскостей и линии пересечения



1. Провести вспомогательную секущую плоскость  $\gamma \parallel \Pi_1$  (произвольно)

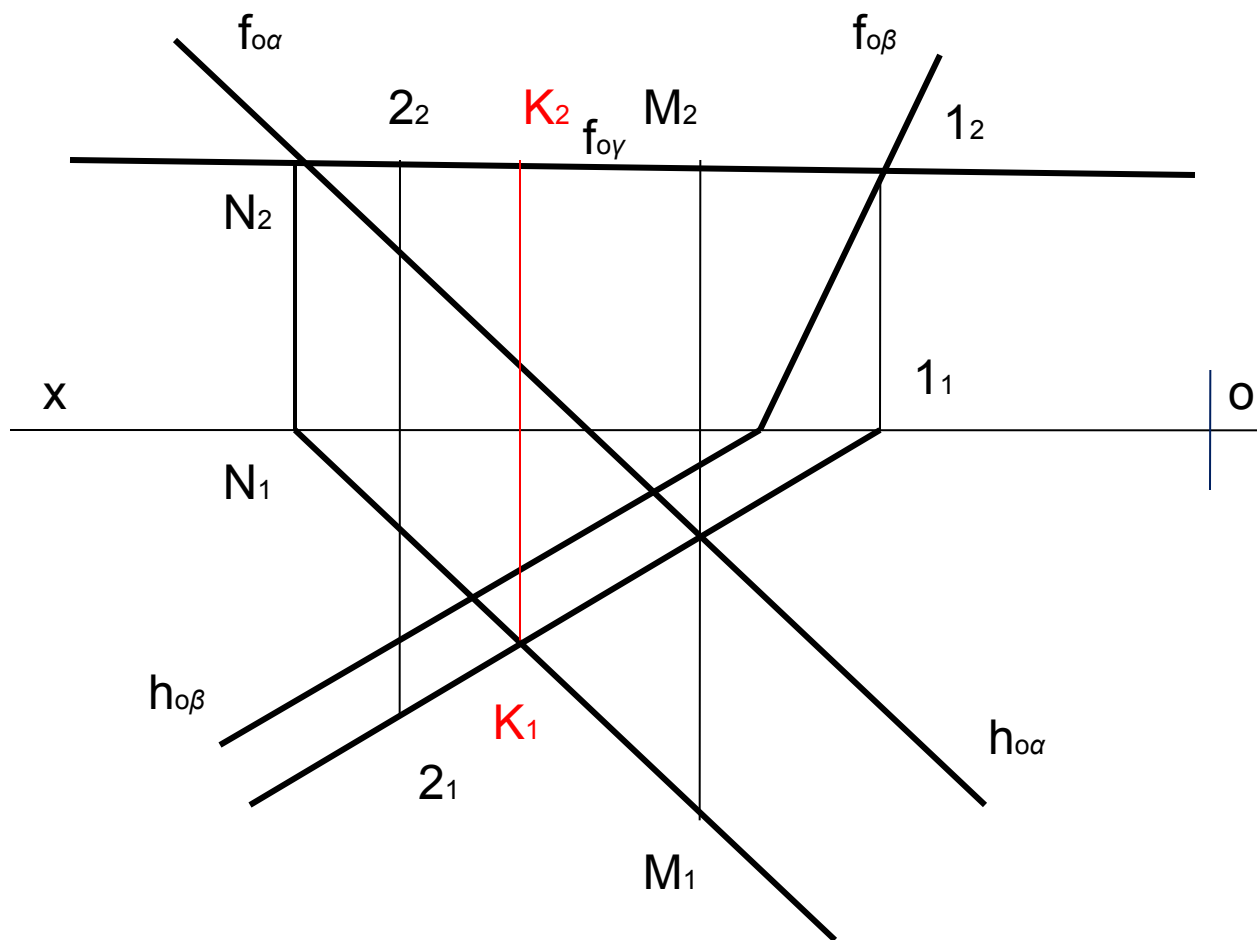


2. Определить линию пересечения плоскости  $\alpha$  со вспомогательной плоскостью  $\gamma$  (это будет горизонталь плоскости  $\alpha$ )  $\alpha \cap \gamma = MN$

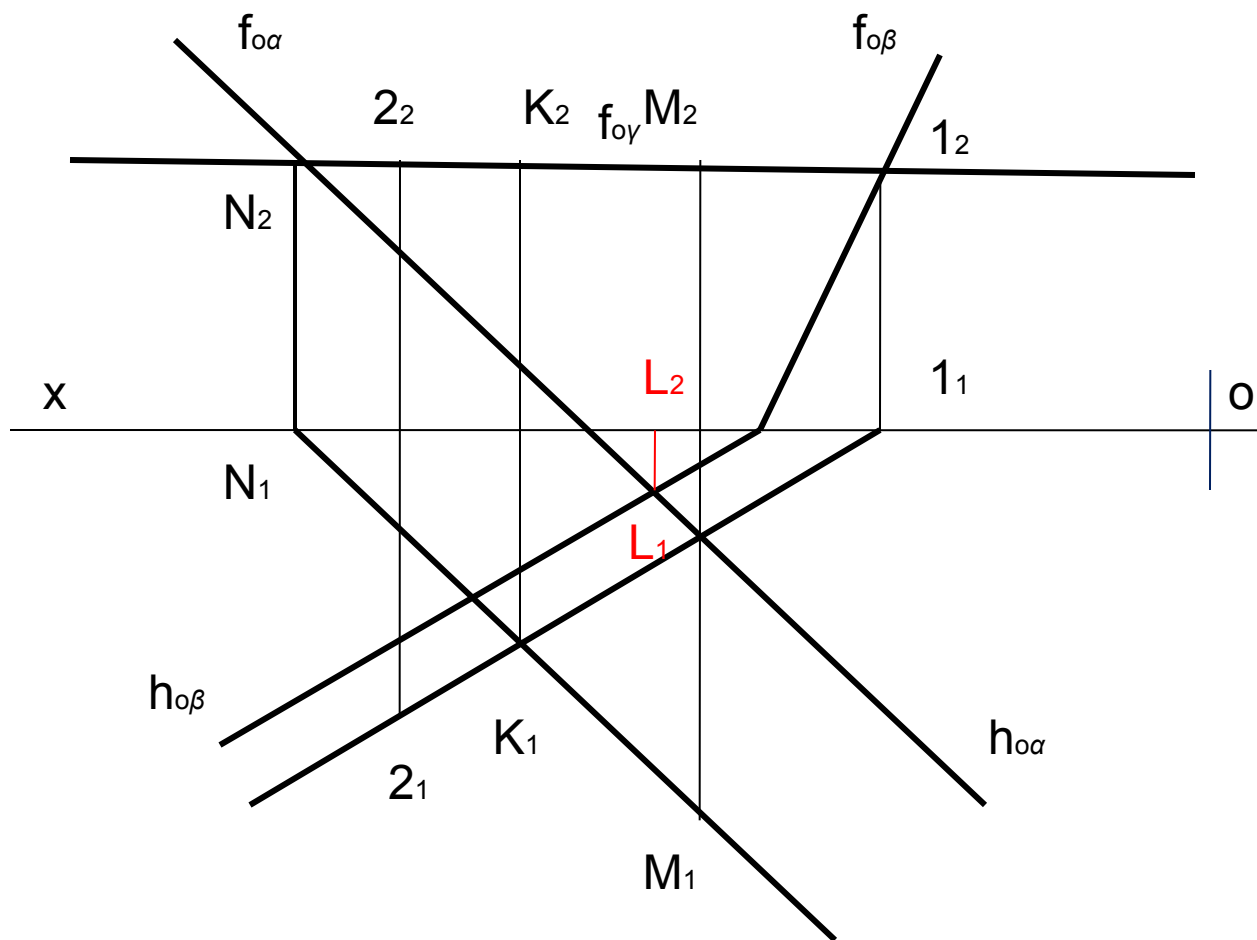




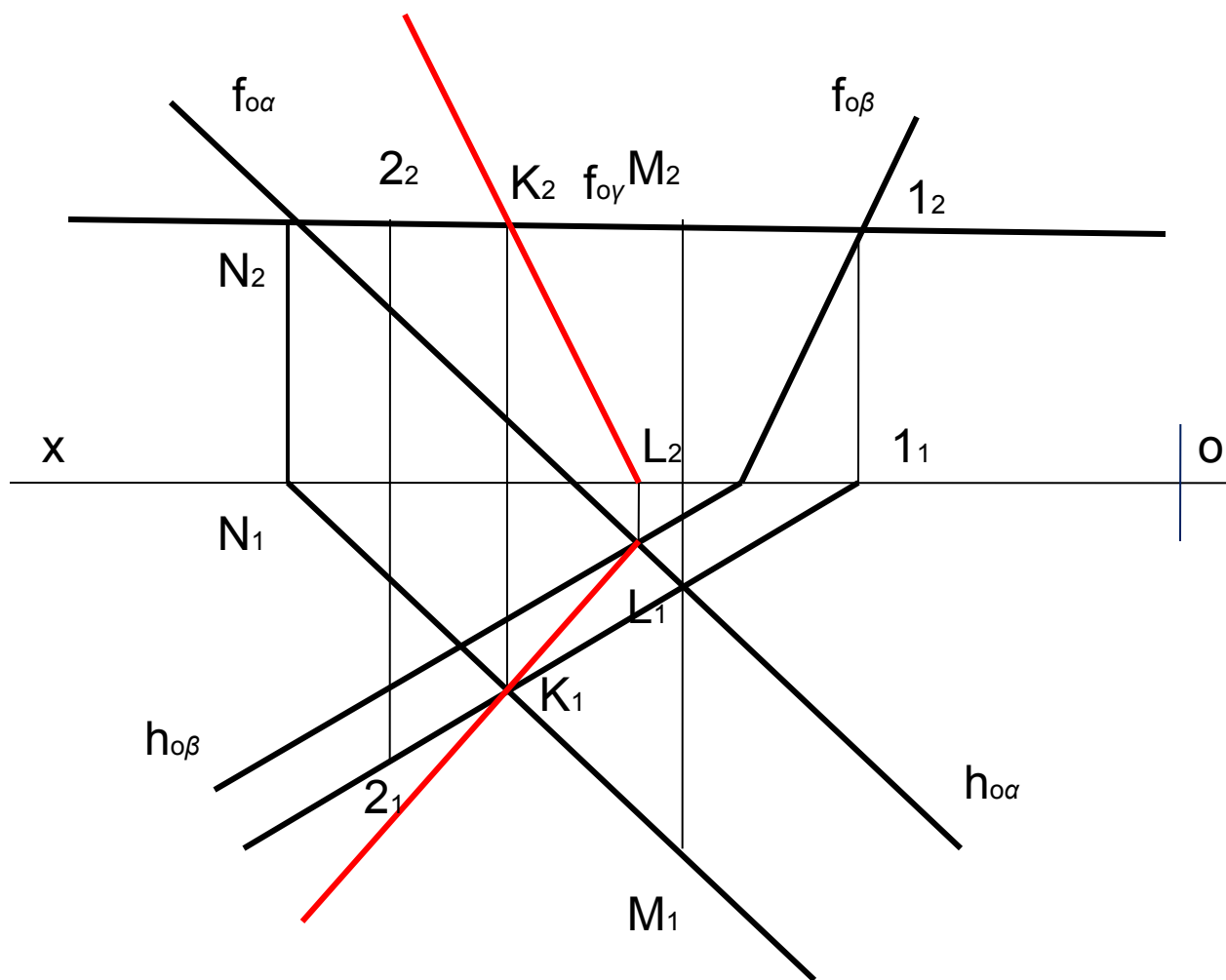
4. Определить точку  $K(K_2, K_1)$  принадлежащую линии пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$   $NM \cap 12 = K$



5, Определить точку  $L(L_2, L_1)$  - точку пересечения горизонтальных следов  $h_{o\alpha}$  и  $h_{o\beta}$   $h_{o\alpha} \cap h_{o\beta} = L$

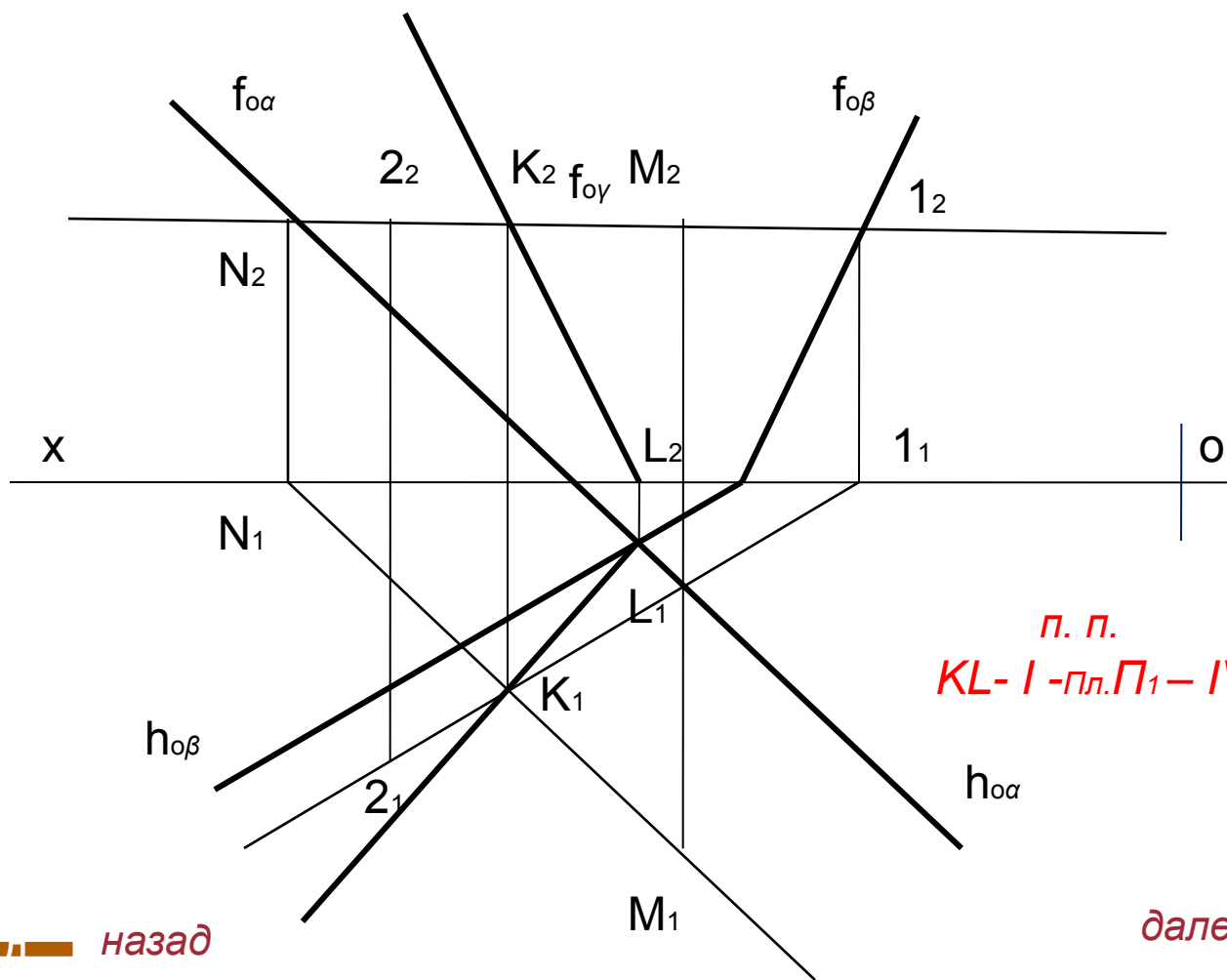


6. Определить линию KL ( $K_2L_2, K_1L_1$ )-пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$   
 $\alpha \cap \beta = KL$





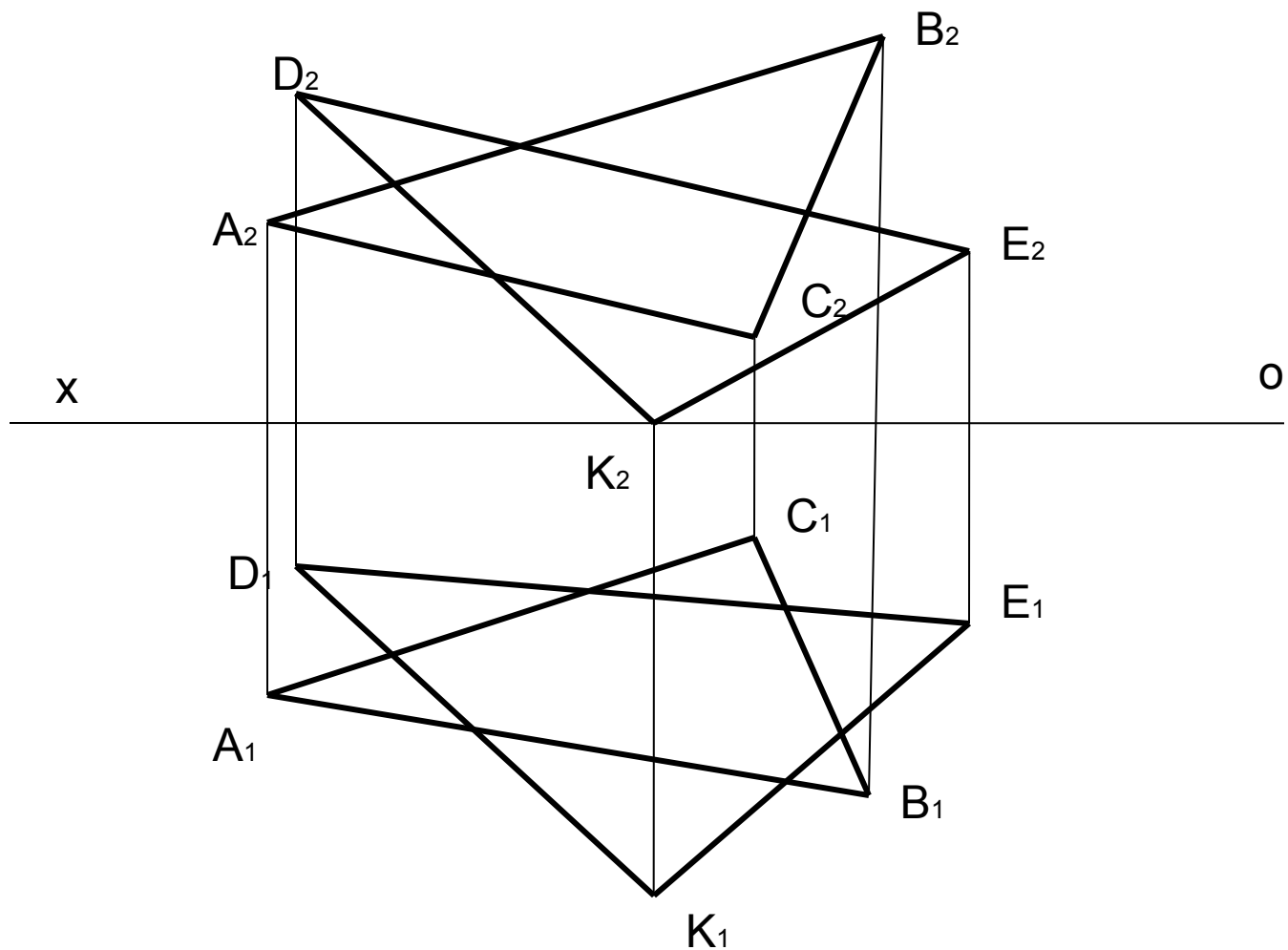
7, Определить характеристику линии пересечения относительно плоскостей проекций ( $\Pi_1\Pi_2$ ).



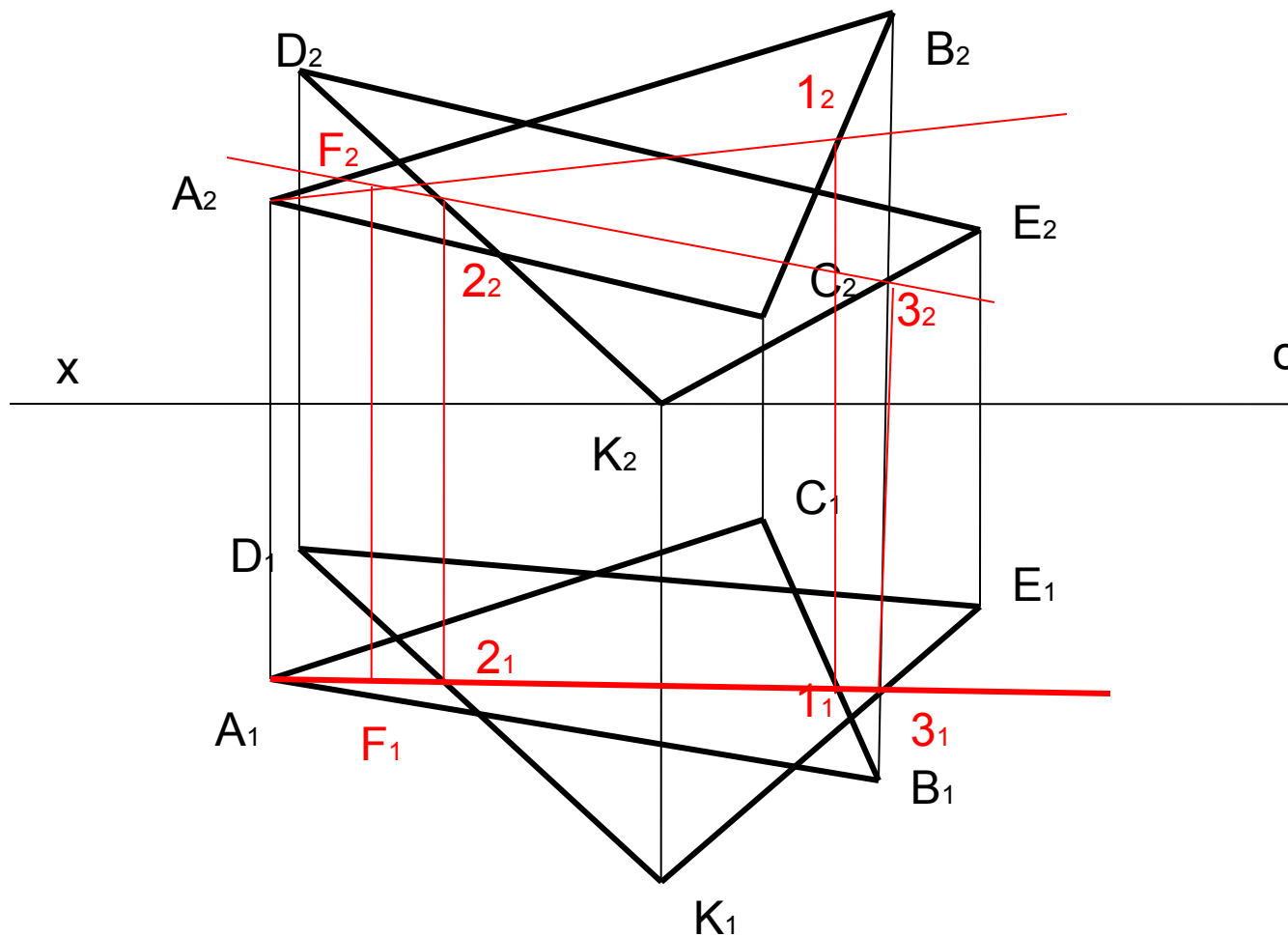
# Пересечение двух плоскостей

(Заданных геометрическими фигурами )

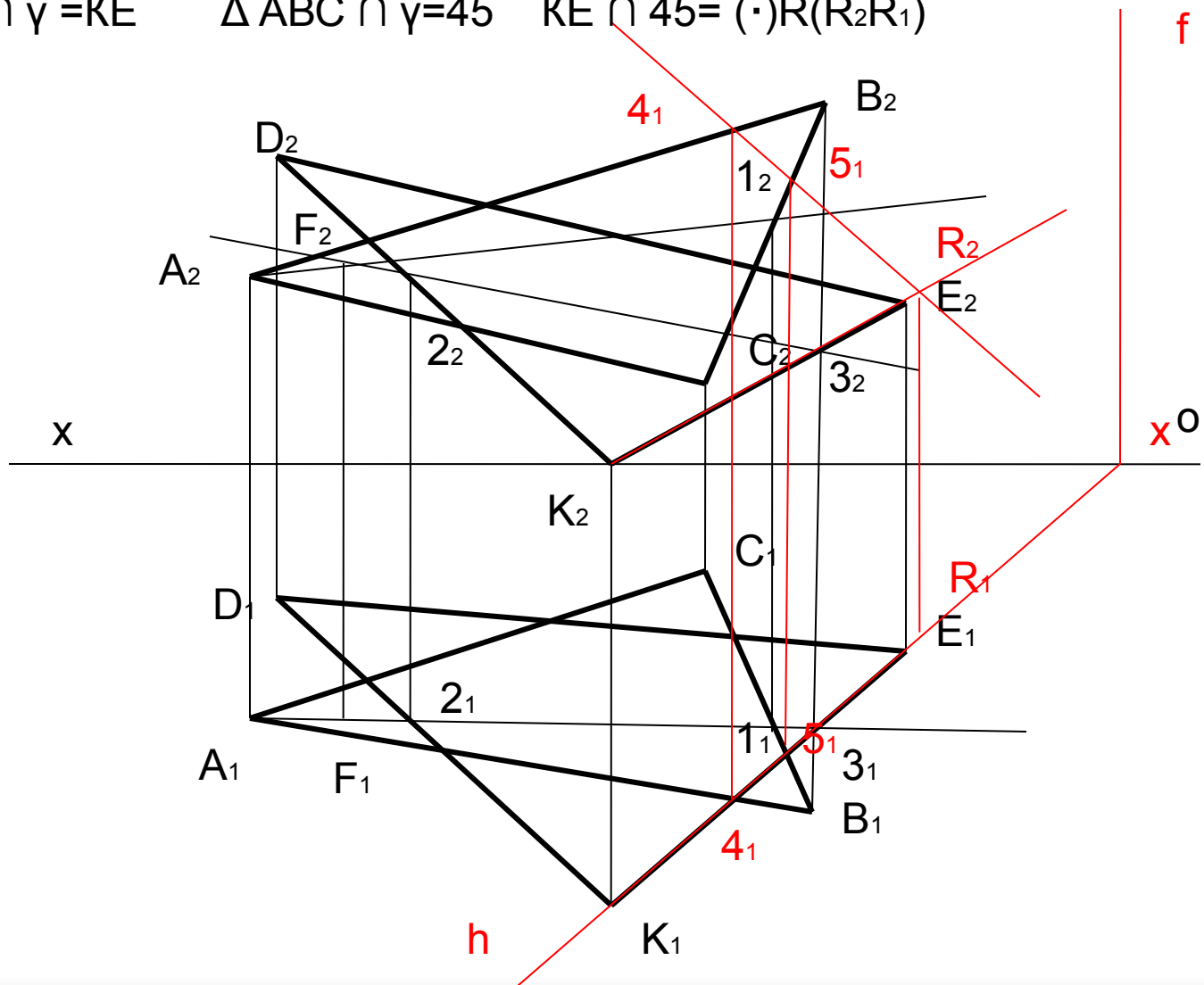
Задача: Построить линию пересечения двух плоскостей, заданных плоскими фигурами:  $\triangle ABC$  и  $\triangle DKE$  показать видимость.



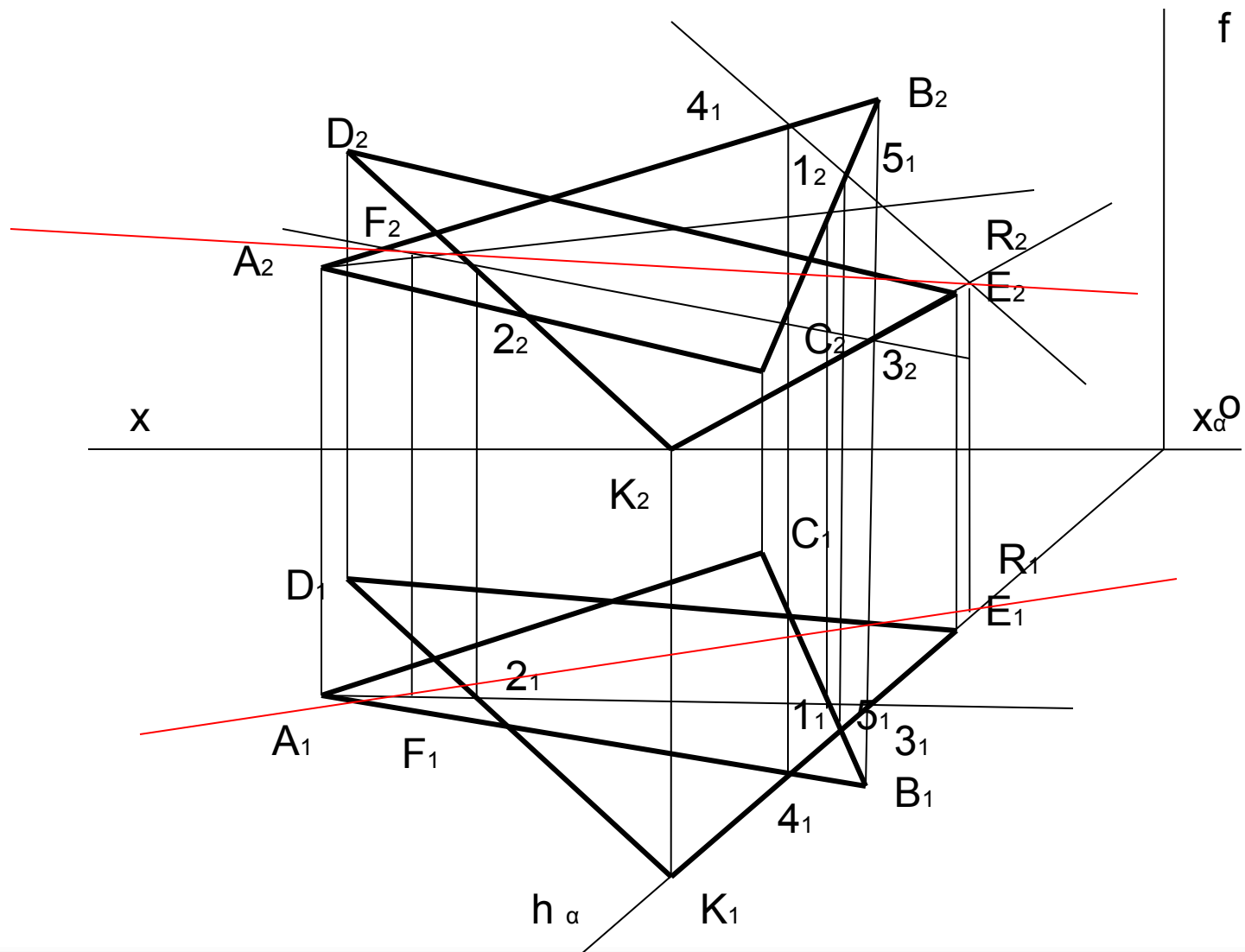
1. Воспользуемся вспомогательной секущей плоскостью  $\beta \parallel \Pi_2$  проходящей через  $(\cdot)$  A  $\Delta ABC$  эта плоскость пересечет  $\Delta ABC$  по фронтали  $A_1(A_21_2)$   
 $\Delta ABC \cap \beta = A_1$  плоскость  $\beta$  пересекает  $\Delta ДКЕ$  по фронтали  $2;3$   $\Delta ДКЕ \cap \beta = 23$   
Точка пересечения фронталей  $A_1$  и  $23$  даёт искомую  $(\cdot)$  F =  $A_1 \cap 23$



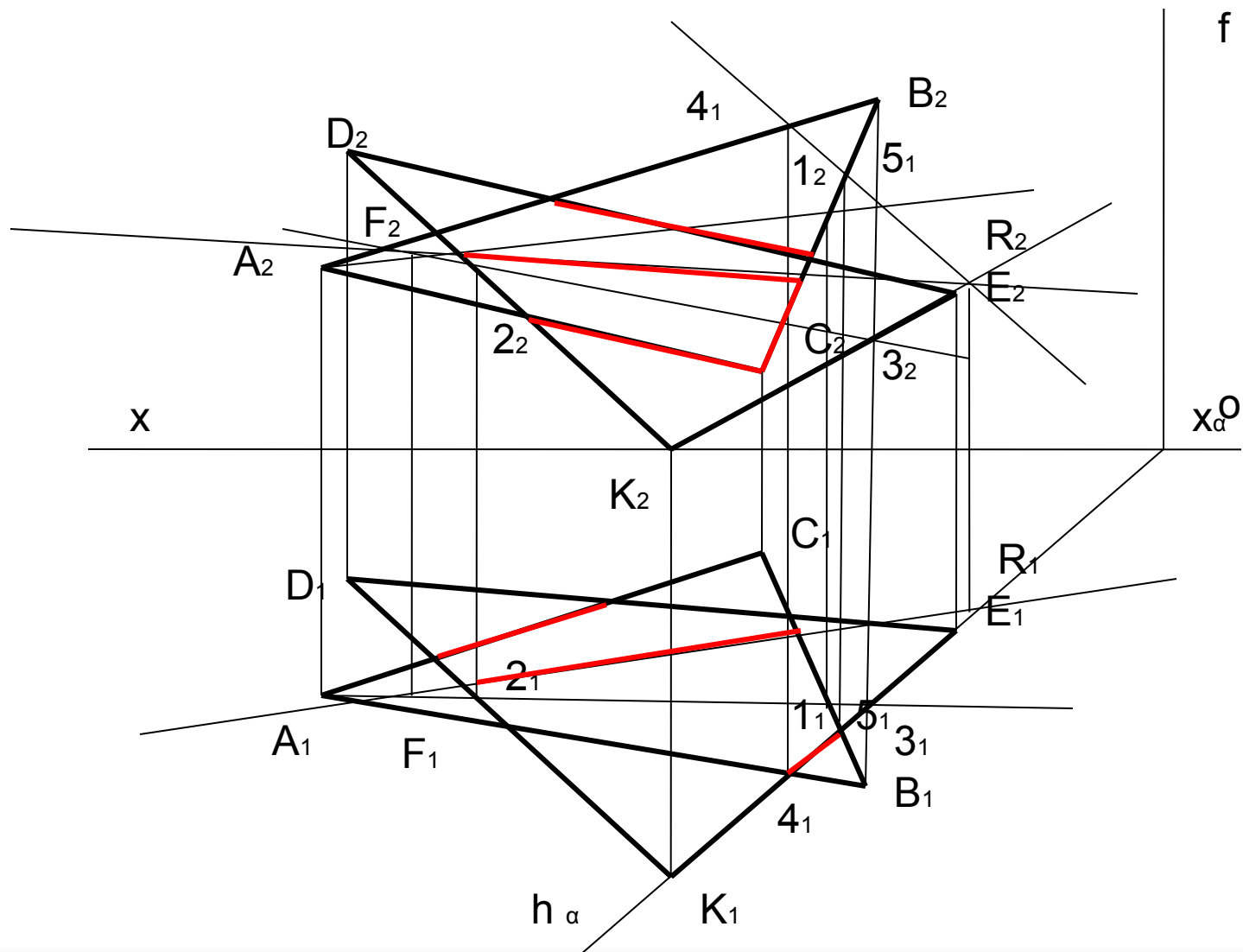
2. Для получения второй точки линии пересечения  $\Delta ABC$  и  $\Delta DKE$  воспользуемся плоскостью  $\gamma \perp \Pi_1$  и проходящей через сторону  $KE$   $\Delta DKE$   
 $\Delta DKE \cap \gamma = KE$      $\Delta ABC \cap \gamma = 4_1$      $KE \cap 4_1 = (\cdot)R(R_2R_1)$



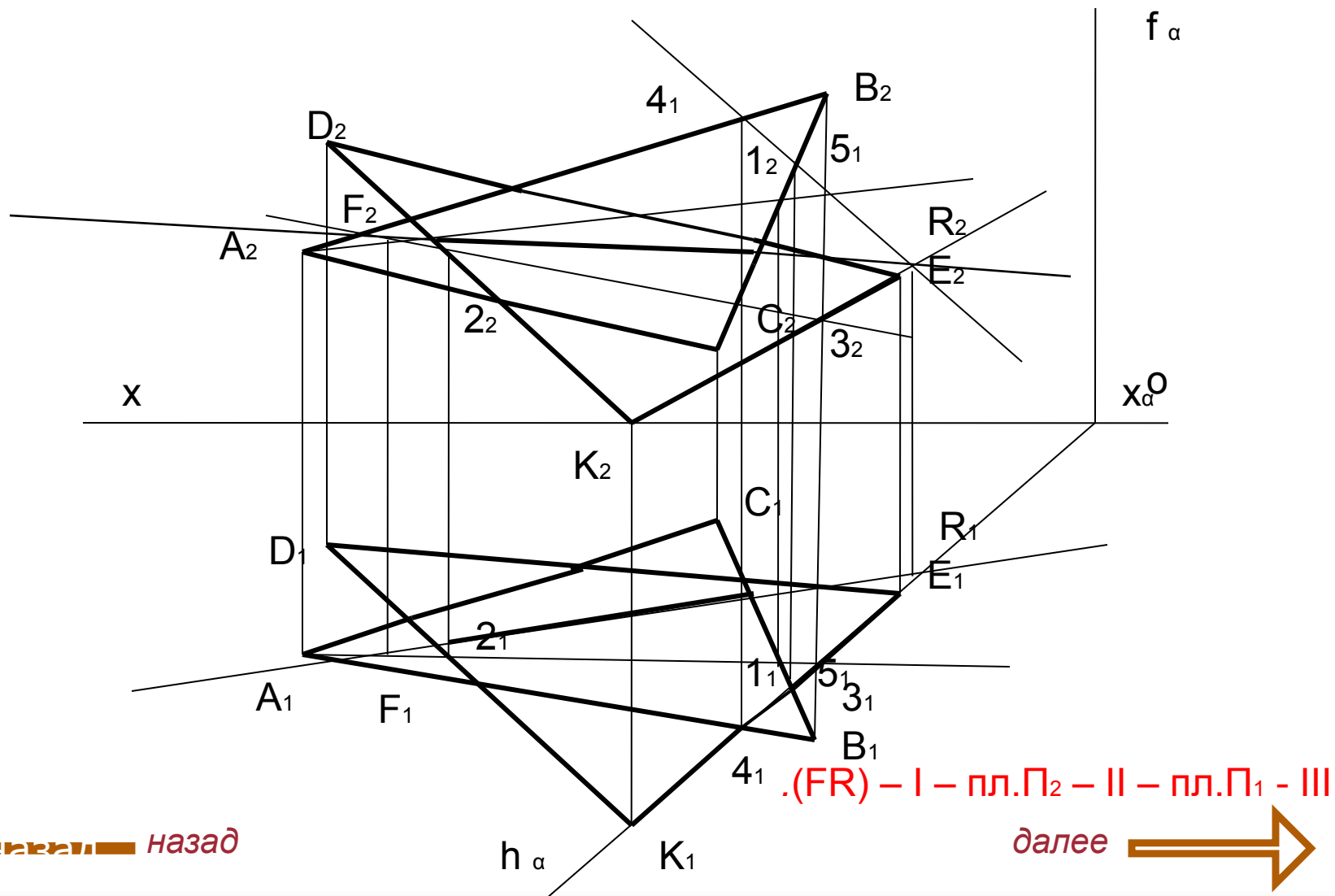
3. Соединив одноименные проекции точек F и R, получим проекции линии пересечения плоскостей  $\Delta ABC \cap \Delta DKE = FR$



4. Пользуясь методом конкурирующих точек, определяем видимость заданных плоскостей относительно друг друга



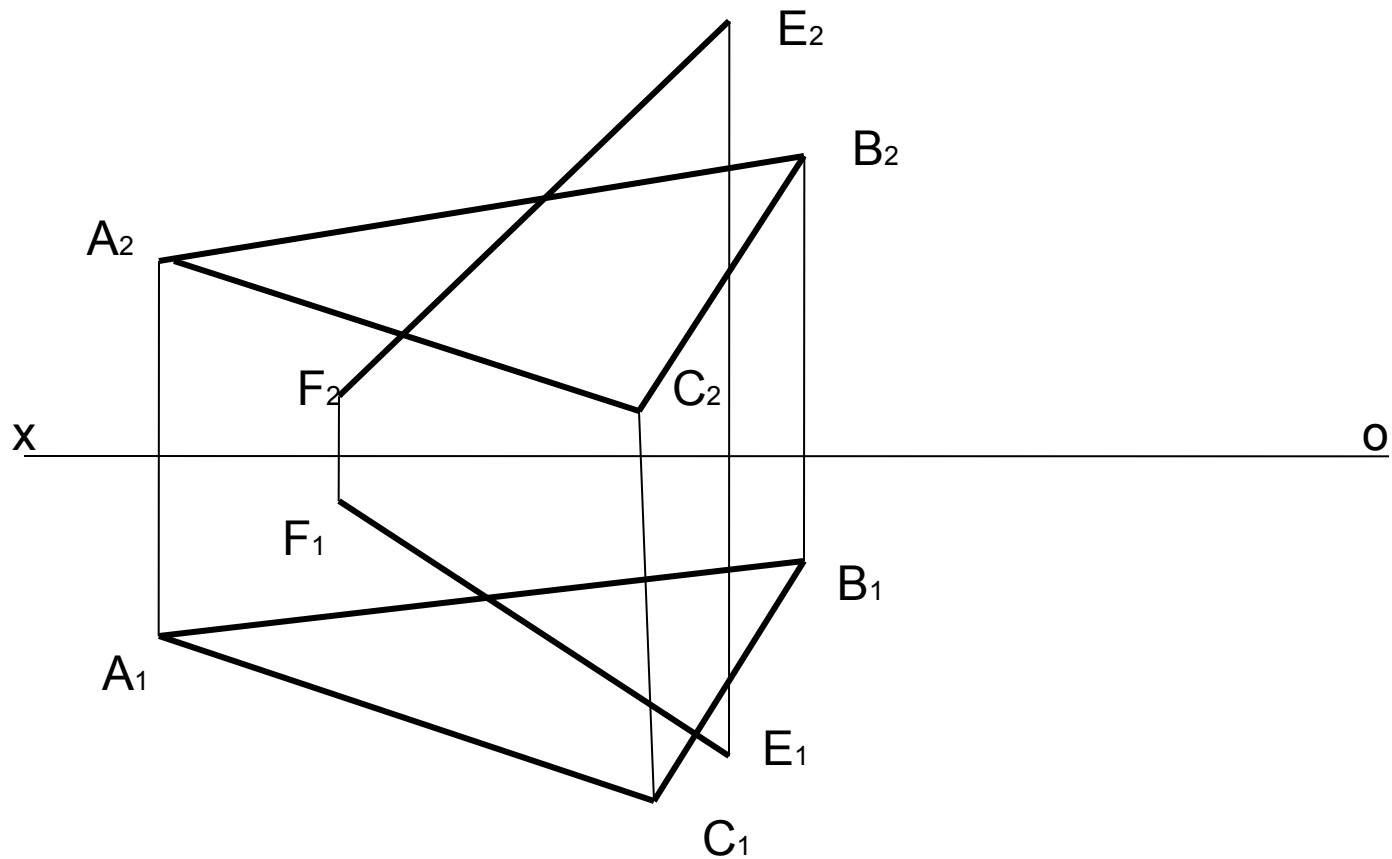
5. Даем характеристику найденной линии пересечения относительно плоскостей проекций.



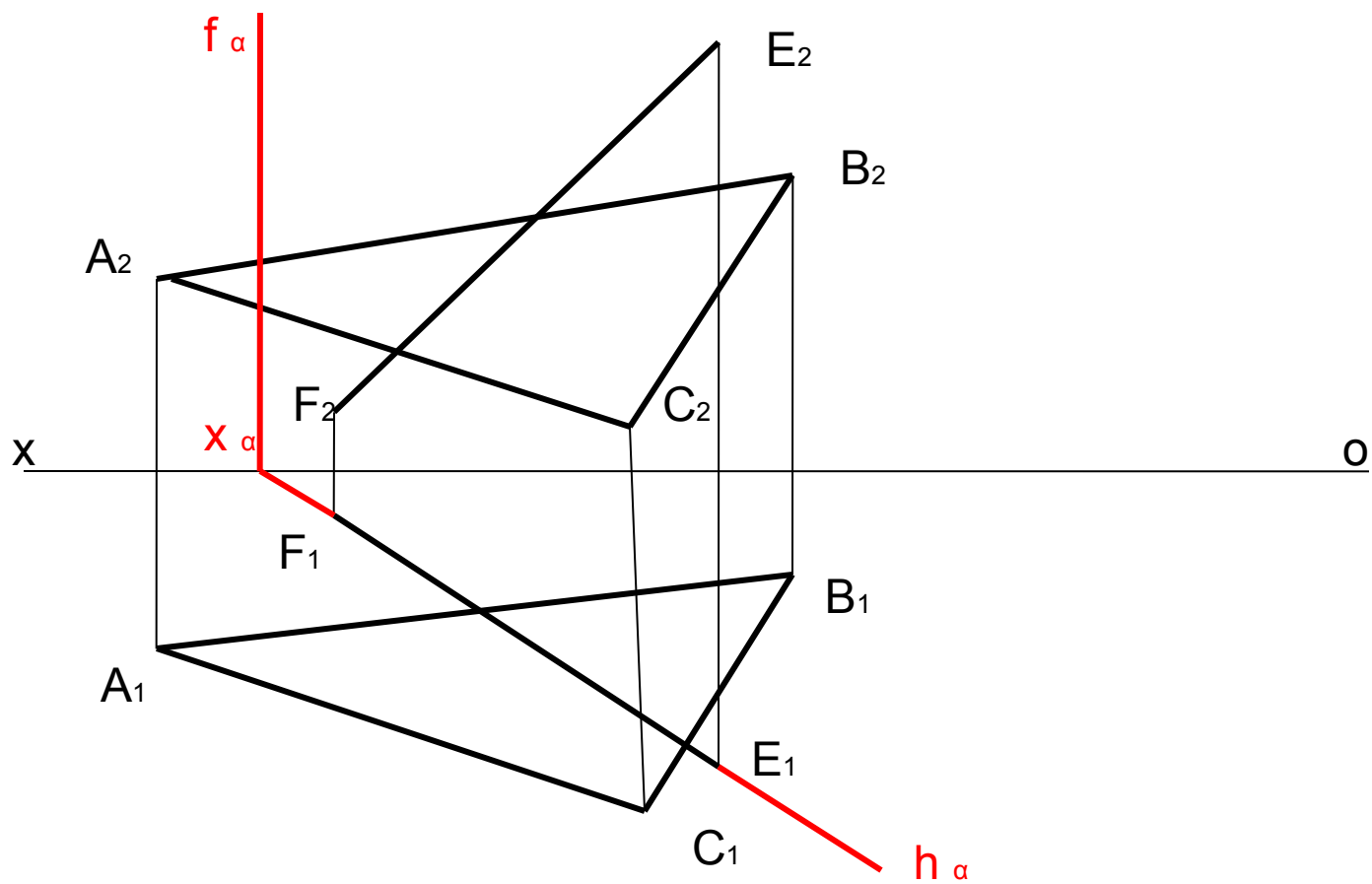


Точка встречи прямой с плоскостью  
общего положения , определение  
видимости прямой относительно  
плоскости

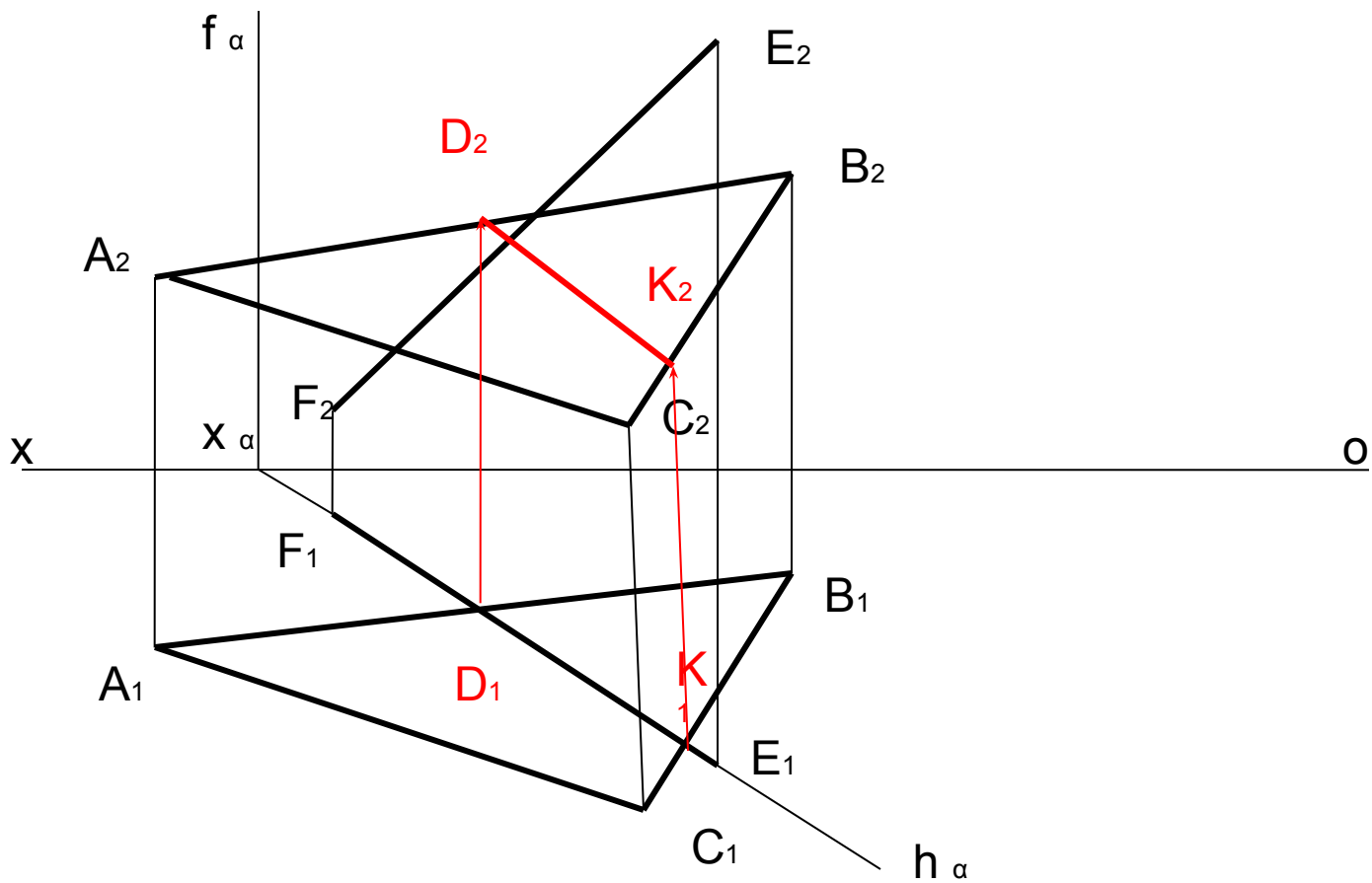
Задача: *определить точку пересечения прямой EF с плоскостью, заданной плоскостью фигуры - треугольником ABC показать видимость*



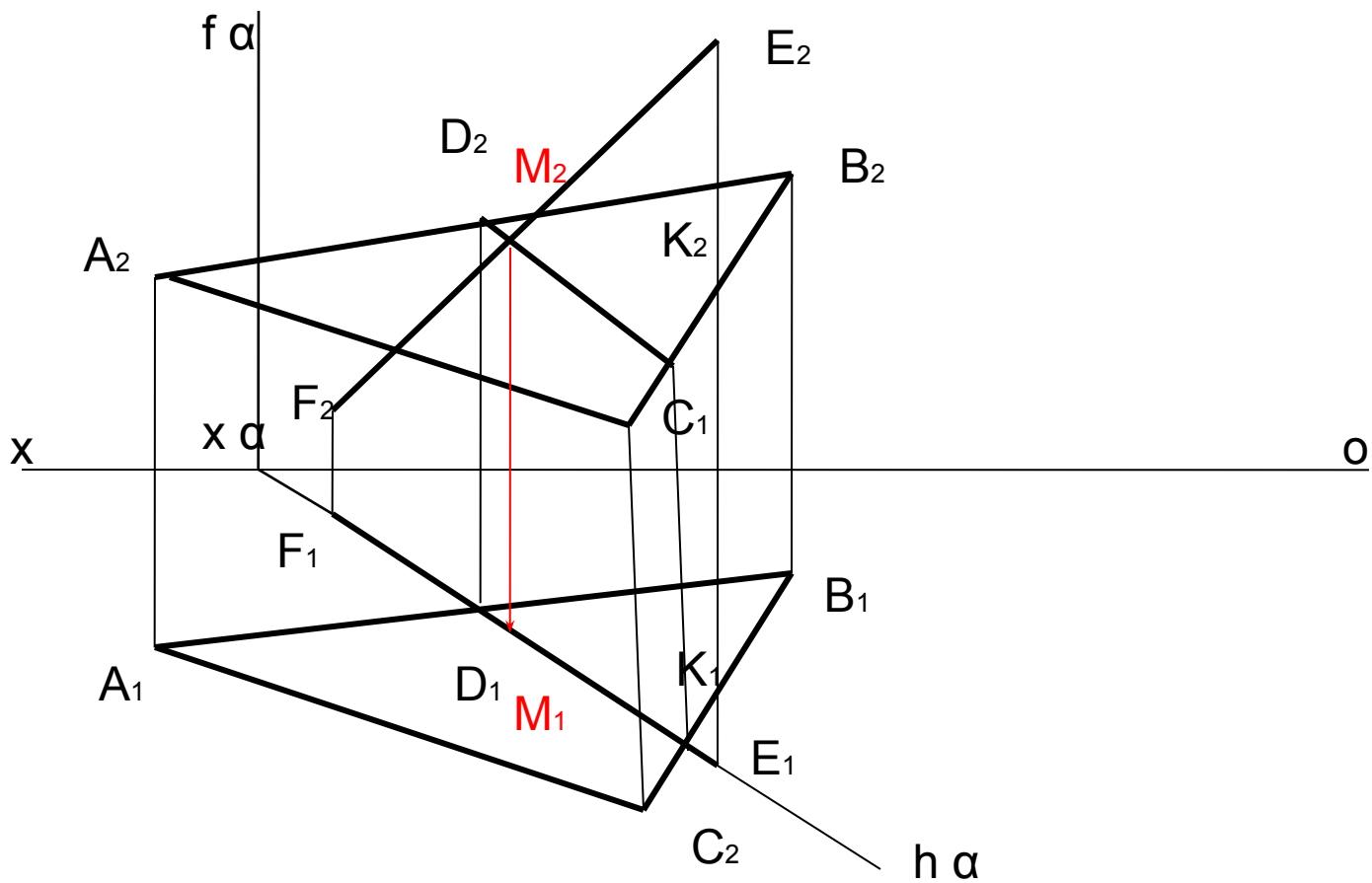
1. Через EF провести плоскость  $\alpha \perp \Pi_1$ , ноа совпадает с  $E_1 F_1$  foа  $\perp Oх$ .



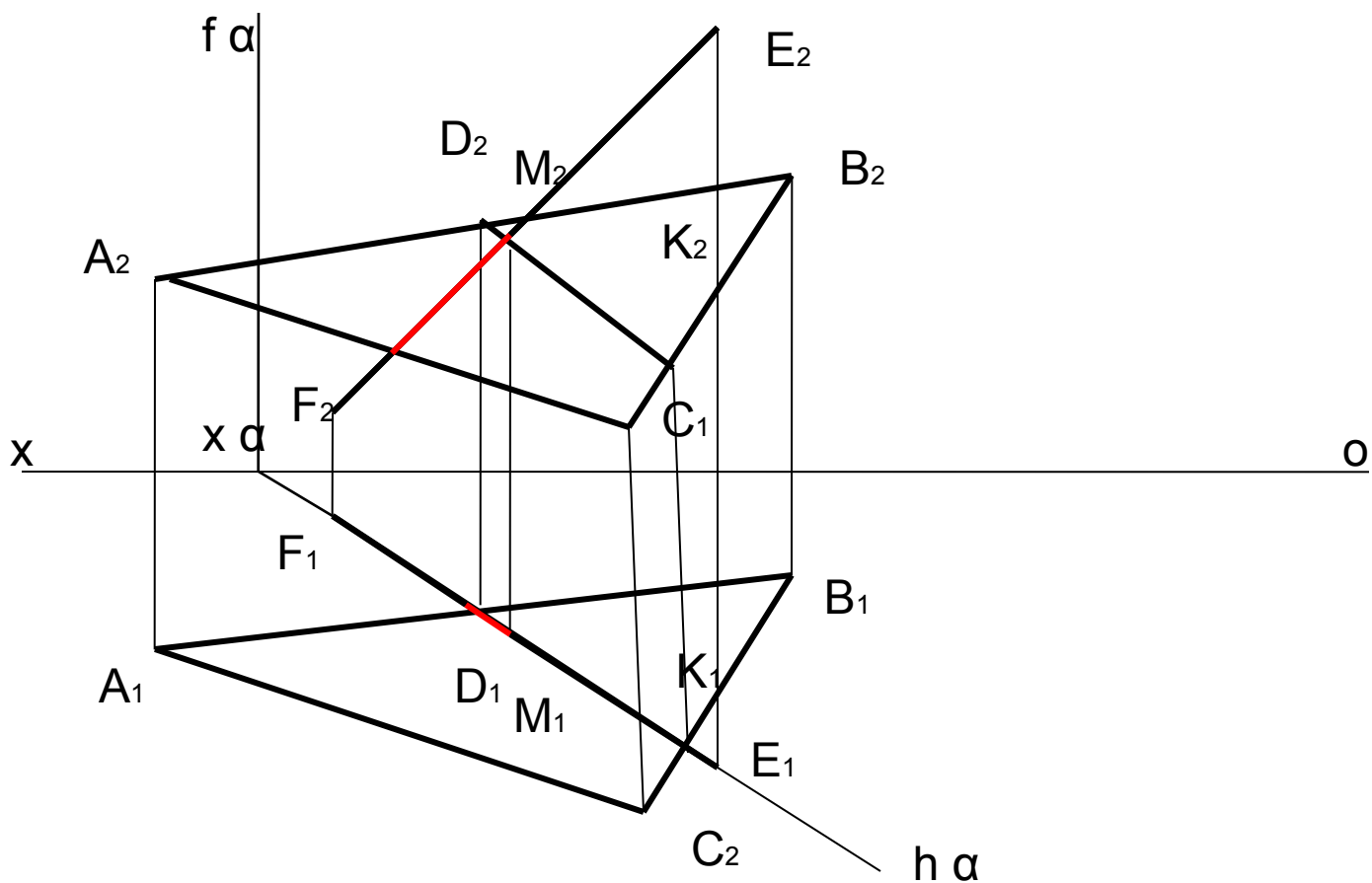
2. Найти ДК( $D_2K_2$ ,  $D_1K_1$ )линию пересечения вспомогательной пл.  $\alpha$ , ( $f \circ \alpha$   $h \circ \alpha$ ) с заданной плоскостью  $\Delta ABC(A_2B_2C_2; A_1B_1C_1)$   $KD = \Delta ABC \cap \alpha$



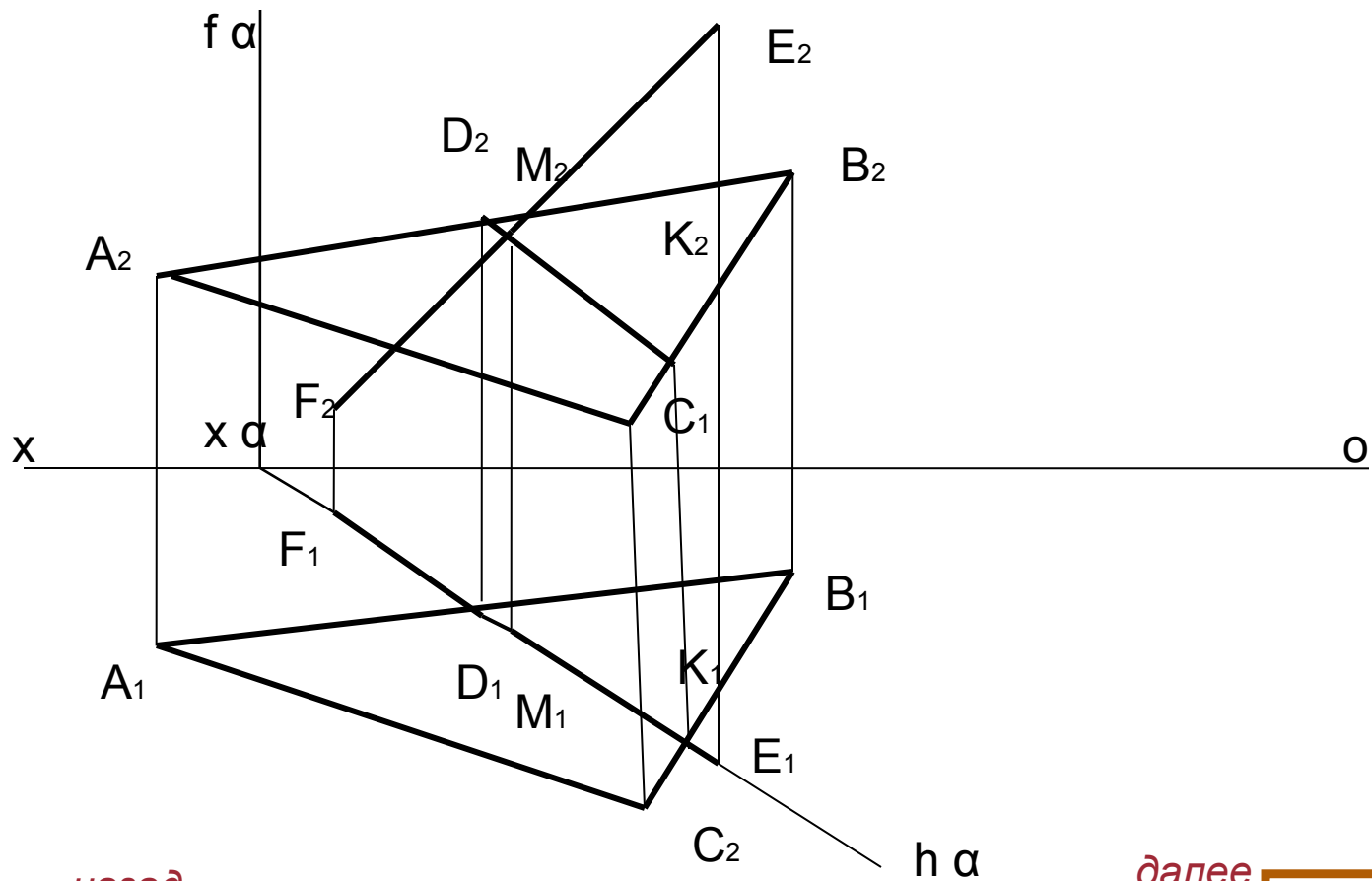
3 Найти  $(\bullet)M(M_2M_1) - (\bullet)$  пересечения линии ДК  $(D_2K_2)(D_1K_1)$  и прямой  $EF(E_2F_2; E_1F_1)$   $(\bullet) M = DK \cap EF$



4. Используя конкурирующие точки 1( $1_21_1$ ) 2( $2_22_1$ ) Определить видимость.  $\Delta ABC$  представляет собой плоскость односторонней видимости, поэтому один и тот же участок заданной прямой будет виден сверху ( $M_1E_1$ ) и спереди ( $M_2E_2$ )



## 5. Показываем видимость

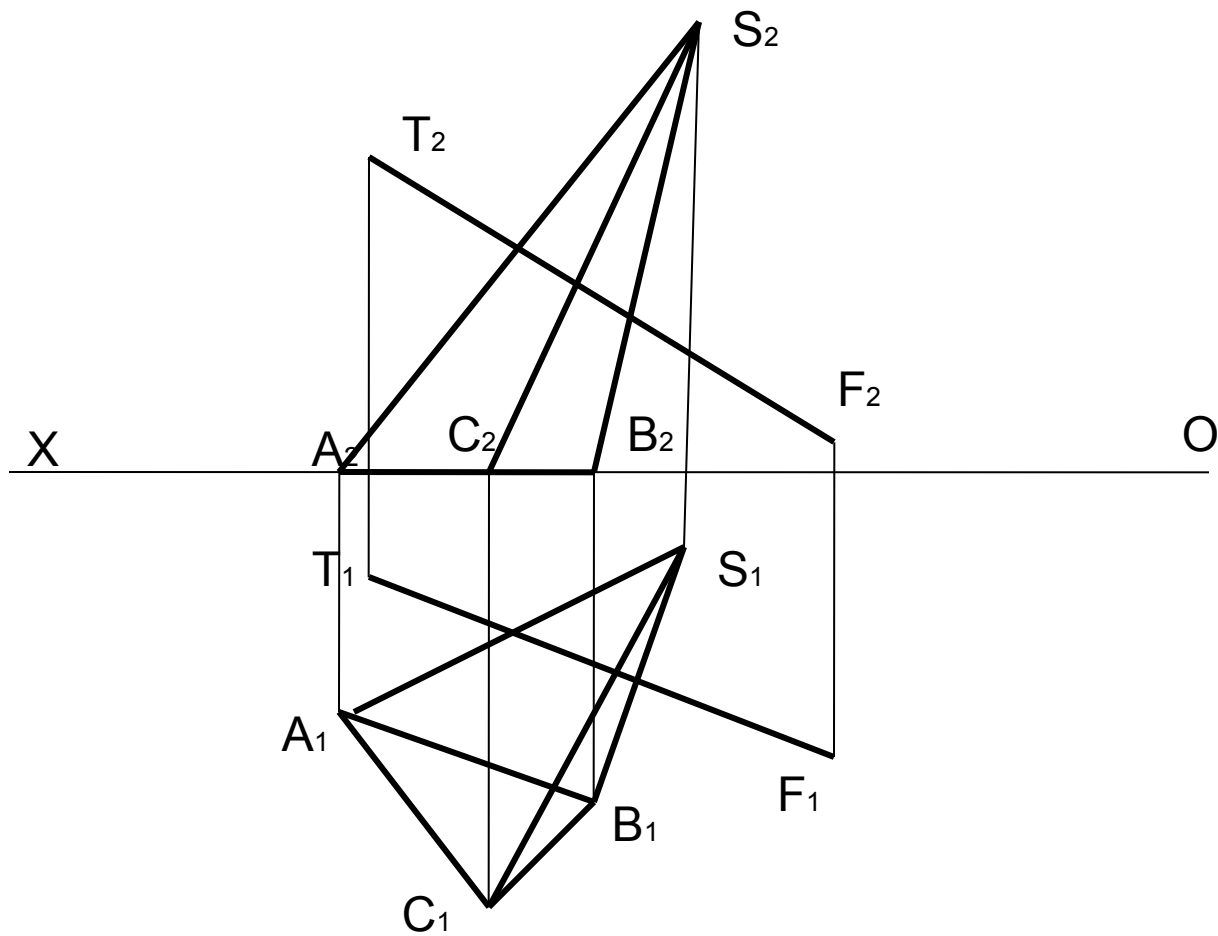




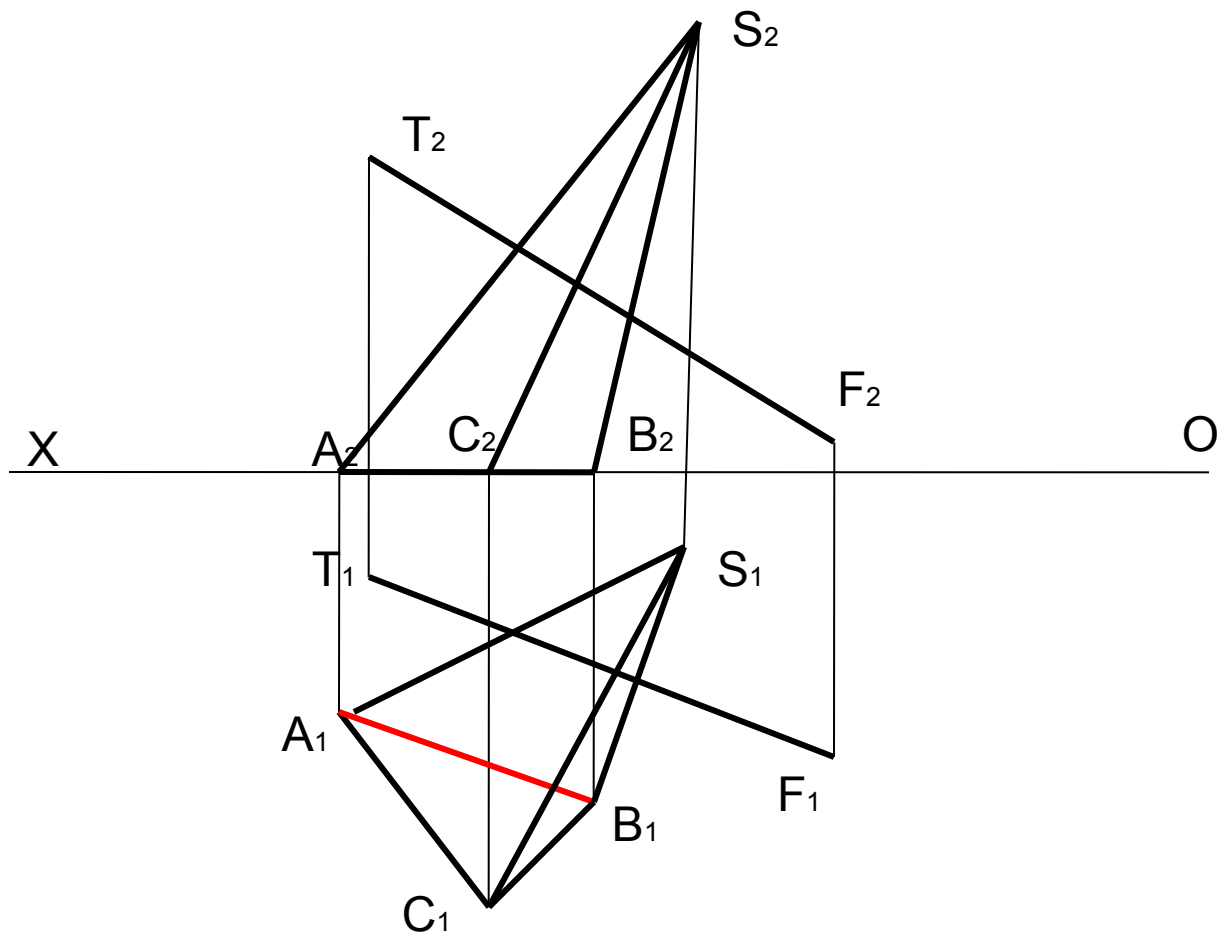
# Пересечение прямой с геометрическими телами



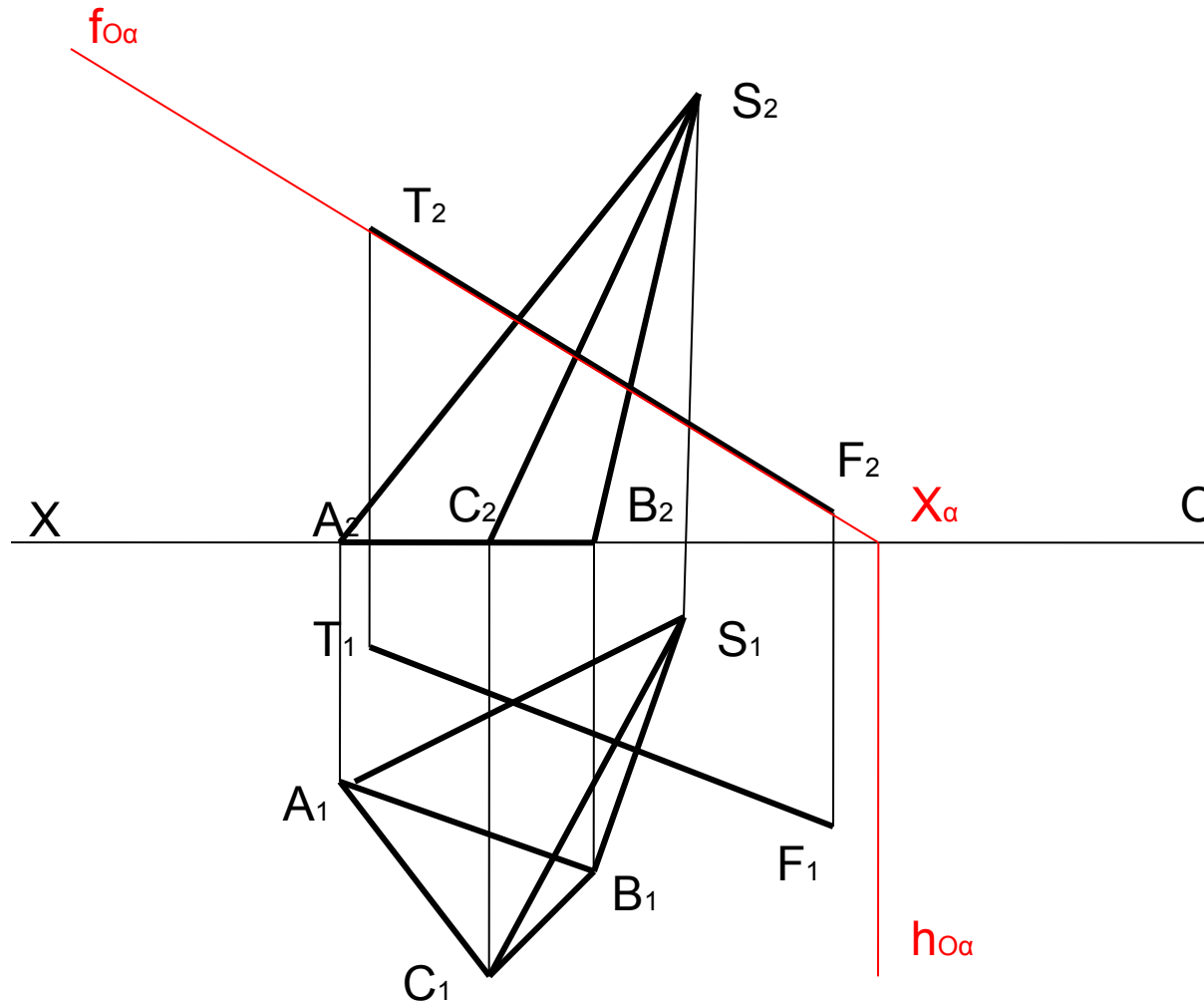
**Задача :** Построить точку пересечения прямой линии  $TF$  с поверхностью многогранника. Показать видимость ребер многогранника секущей прямой линии.



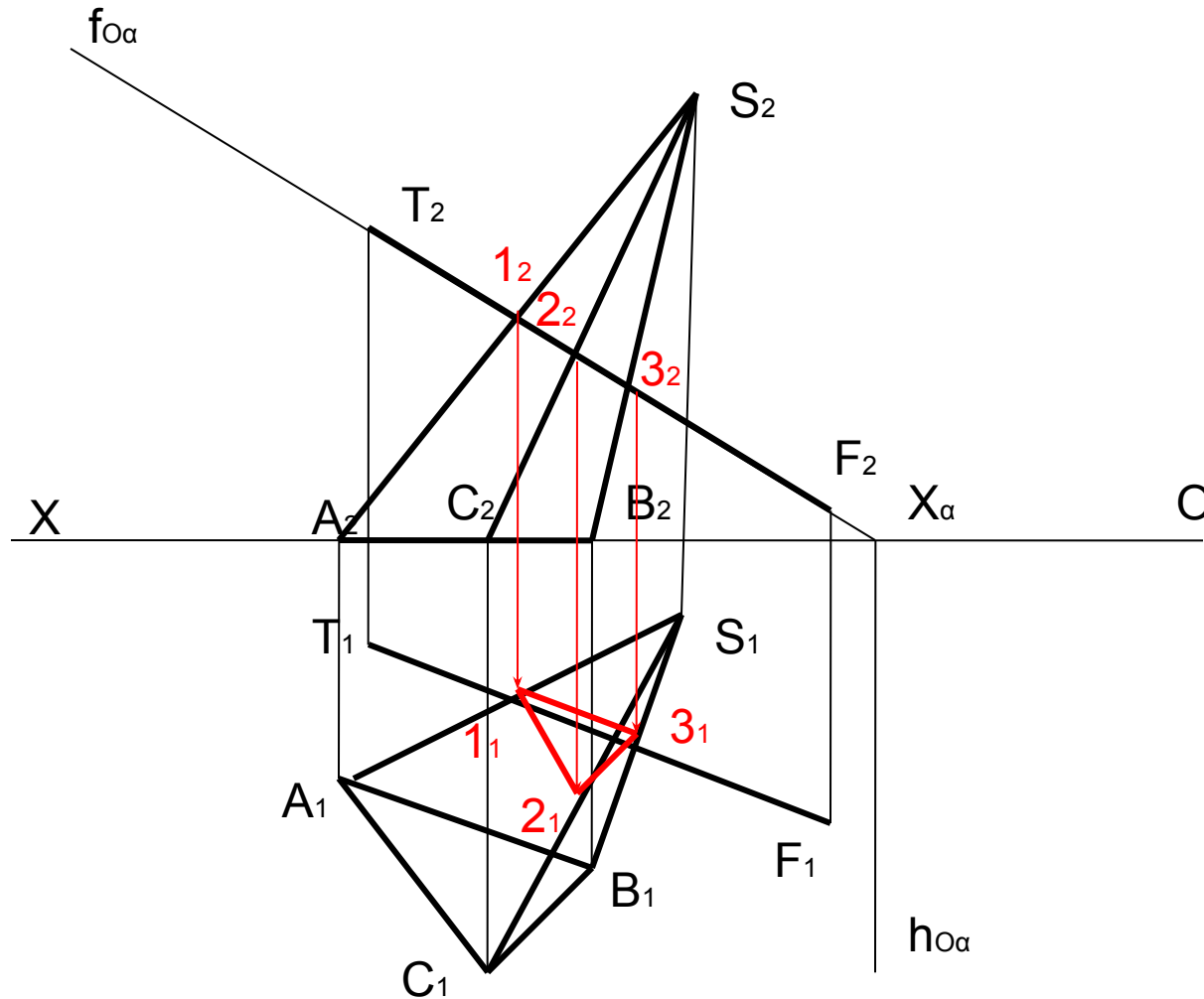
1. Определяем видимость ребер многогранника, используя правило видимости и метод конкурирующих точек  $1(1_21_1)2(2_22_1)$ .



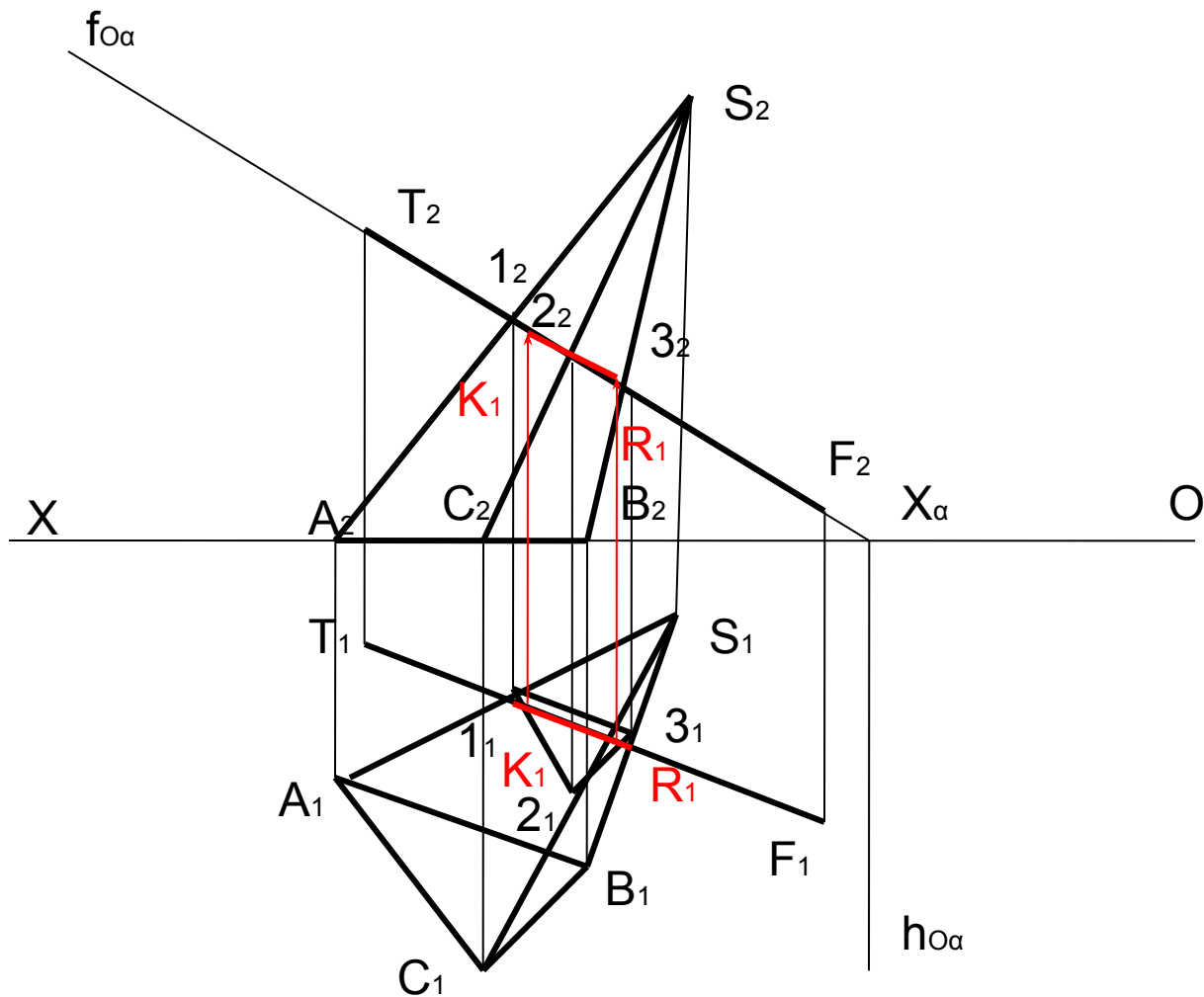
2. Через прямую  $TF$  проводим вспомогательную плоскость  $\alpha$ , перпендикулярную фронтальной плоскости проекций  $\Pi_2$ : след  $f_0 \alpha$  совпадает с  $T_2 F_2$   $h_{0\alpha} \perp$  оси  $Ox$ .



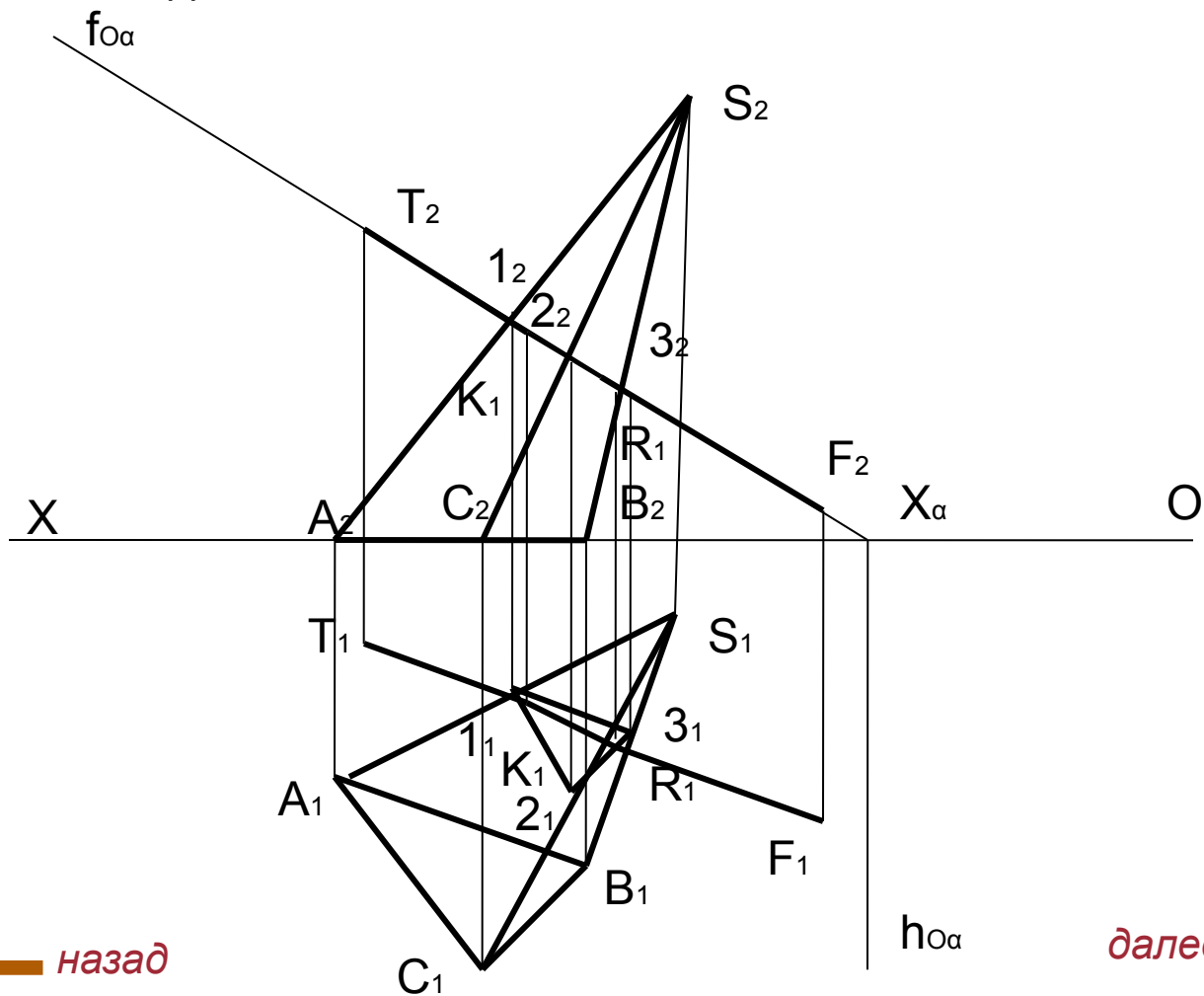
3. Строим линию пересечения вспомогательной плоскости  $\alpha$  ( $f_{0\alpha}$   $h_{0\alpha}$ ) с поверхностью заданного многогранника фронтальная проекция сечения плоскости  $\alpha$  с поверхностью пирамиды ( $1_2 2_2 3_2$ ) совпала с фронтальным следом  $f_{0\alpha}$  плоскости  $\alpha$ . горизонтальная проекция сечения  $1_1 2_1 3_1$  определилась по точкам  $1_1 2_1 3_1$  лежащим на соответствующих ребрах пирамиды ('построение показано стрелками),

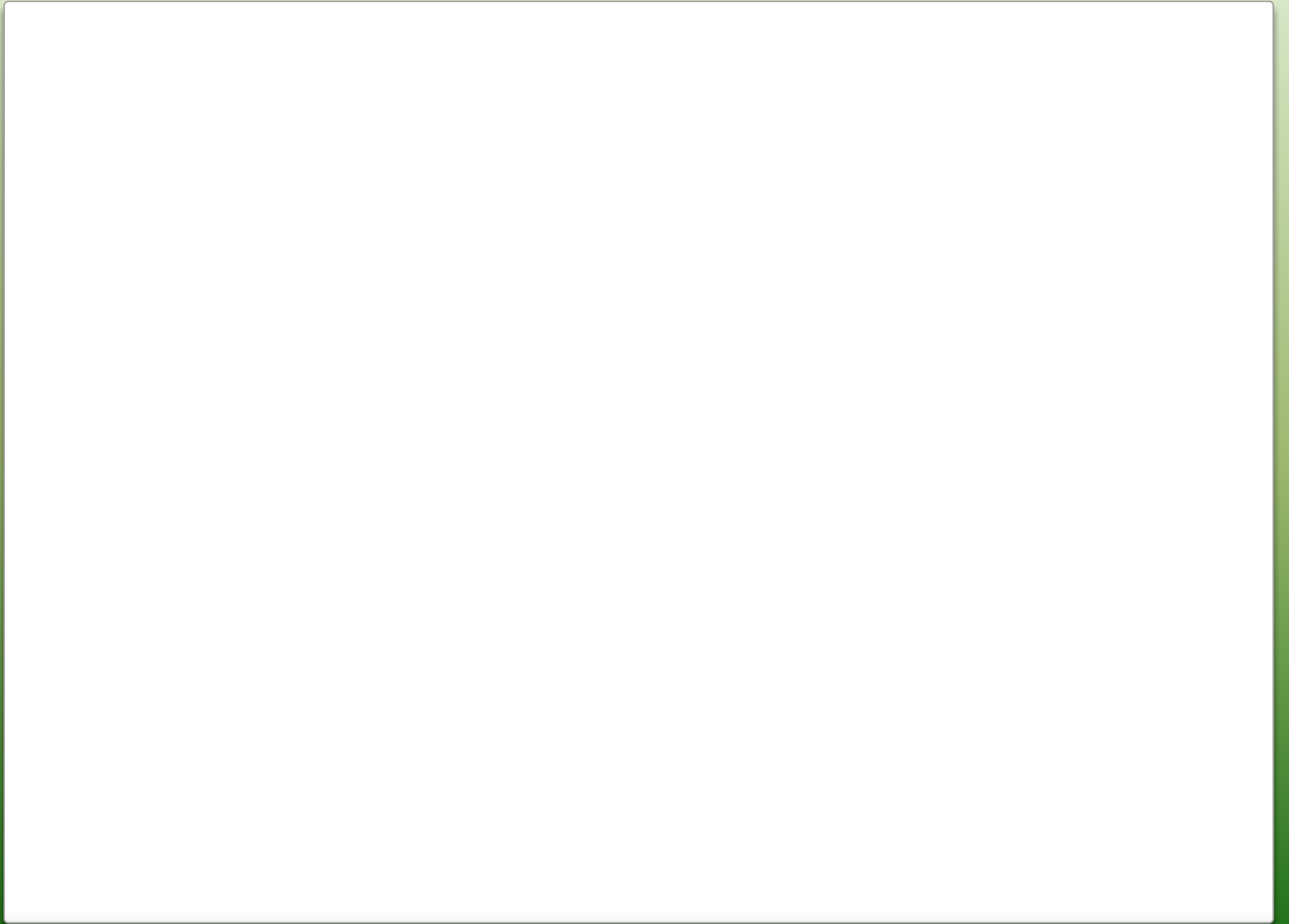


4. Найдем точки пересечения заданной прямой  $TF$  с контуром сечения  $123$  - точки  $K$  ( $K_2 K_1$ ) и  $R$  ( $R_2 R_1$ ). По линиям связи отмечаем точки  $K_2$  и  $R_2$  на фронтальной проекции прямой  $T_2F_2$ . Это и будут искомые точки (входа и выхода) пересечения прямой с поверхностью многогранника (пирамиды).

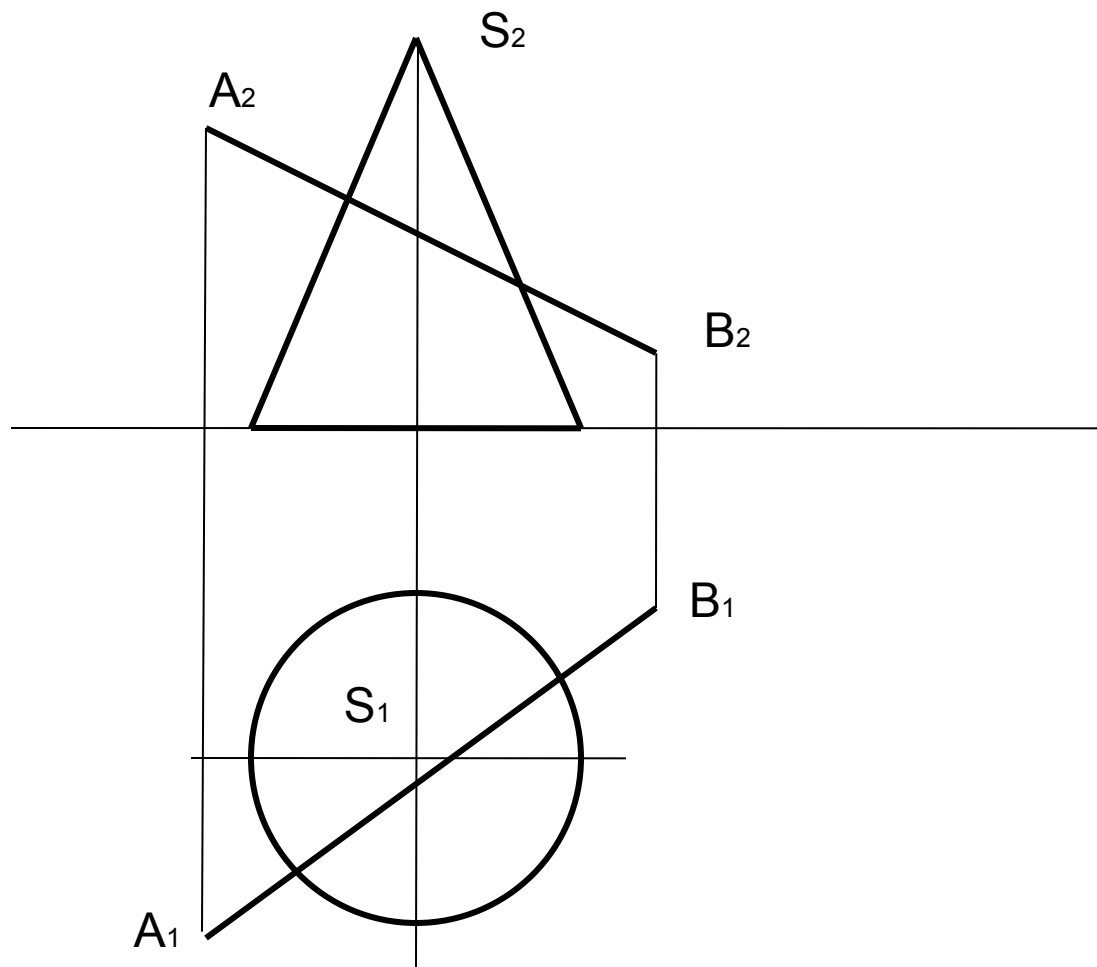


5. Определяем видимость прямой TF относительно многогранника, используя метод конкурирующих точек  $4(4_24_1)$ ,  $5(5_25_1)$ .  
 Участок прямой KR( $K_2R_2, K_1R_1$ ) внутри многогранника Всегда невидим.  
 Показываем видимость сечения



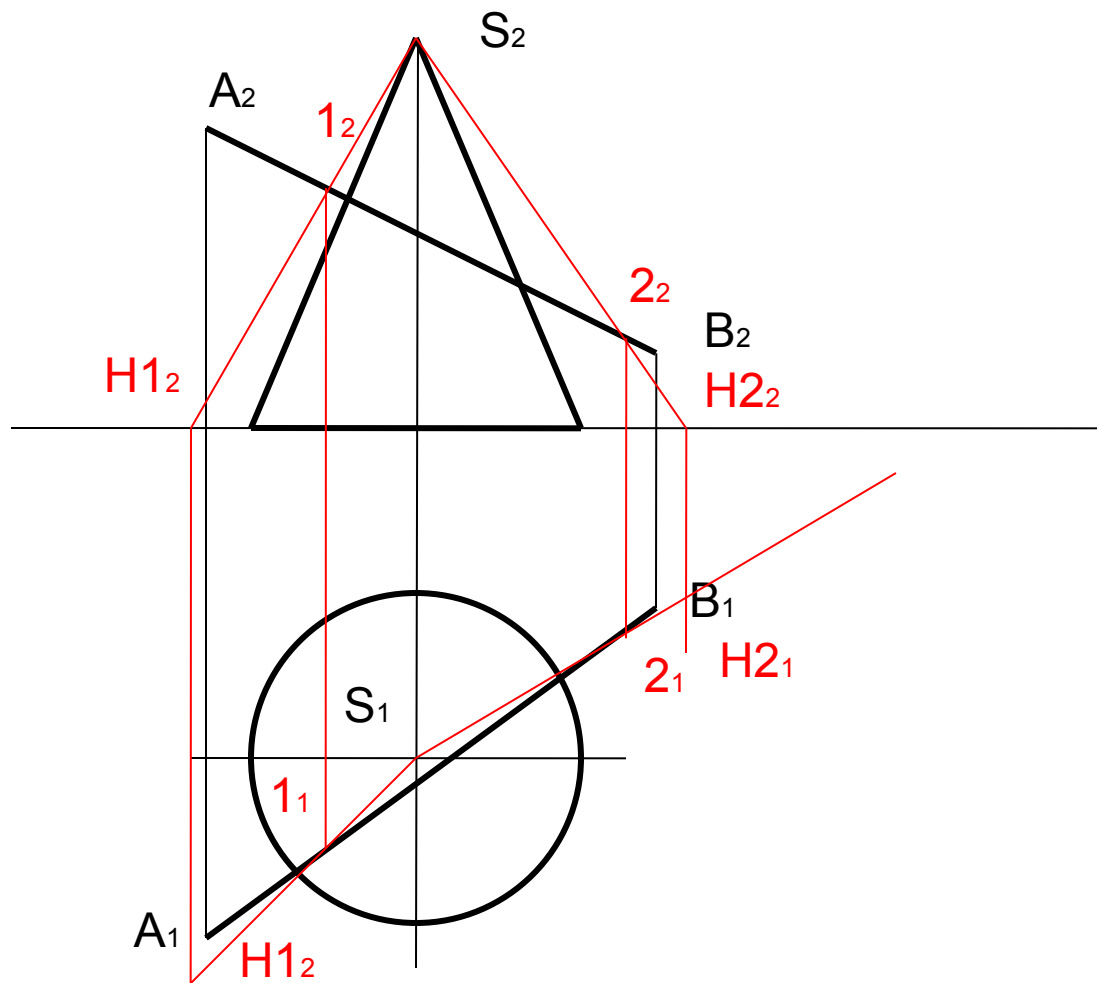


**Задача:** Определить точки пересечения прямой  $AB$  с поверхностью конуса. Показать видимость прямой.

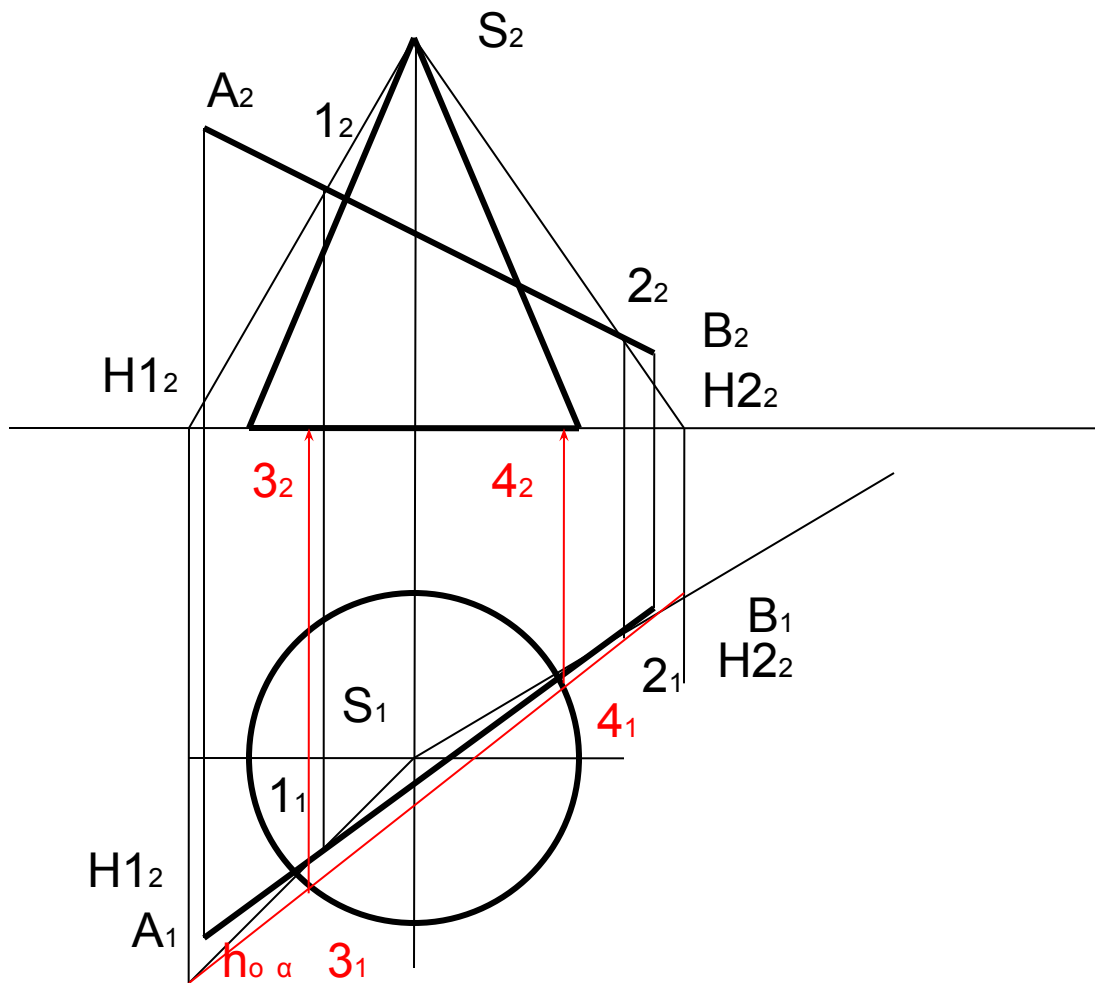




1 Через прямую АВ проводим вспомогательную плоскость. в качестве вспомогательной плоскости принимаем плоскость, проходящую через вершину конуса  $S$ , и две точки 1 и 2, произвольно взятые на прямой АВ. Определяем горизонтальные следы  $H_1$ , ( $H_{21}, H_{11}$ ) и  $H_2$  ( $H_{22}, H_{21}$ ) пересекающихся прямых  $S_1$  и  $S_2$ . Точки 1 и 2 следует выбрать с таким расчетом, чтобы горизонтальные следы  $H_1$  и  $H_2$  получились в пределах чертежа.

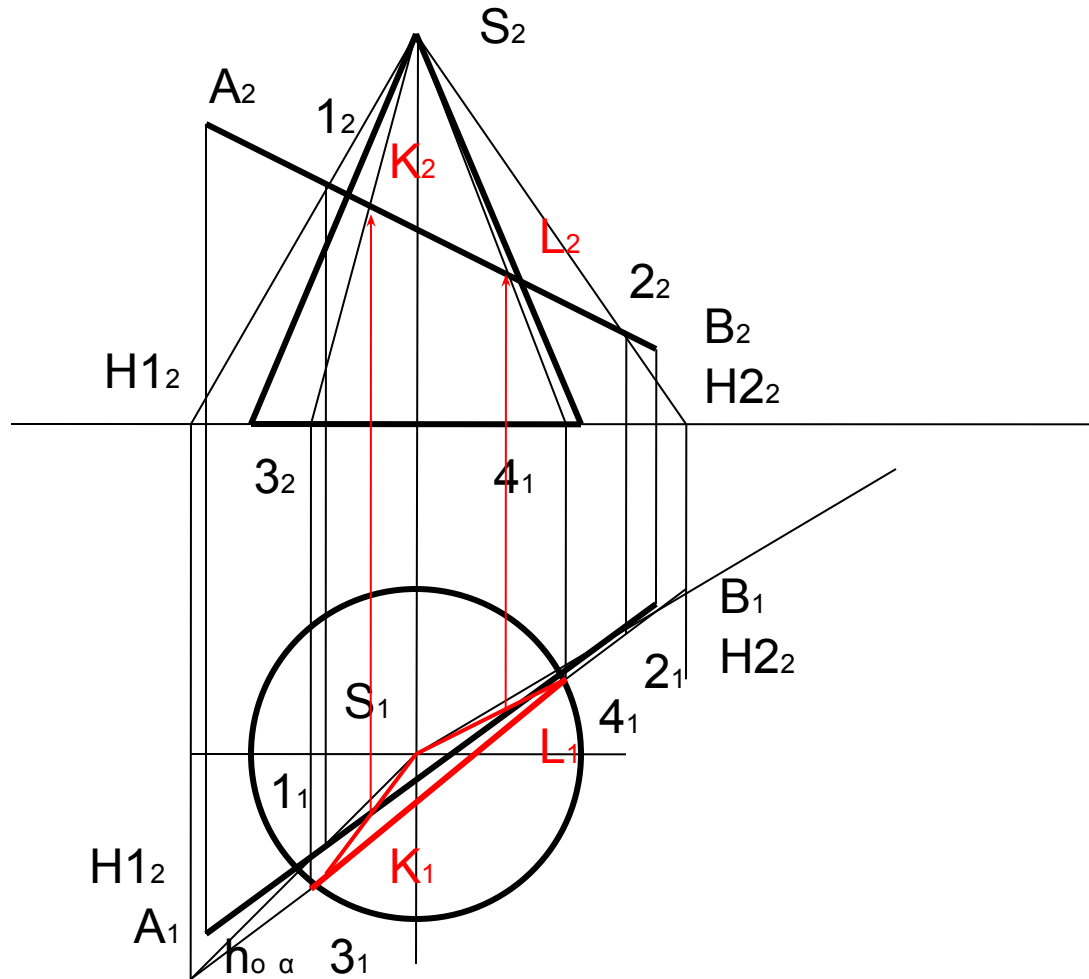


2. Через гориз. следы прямых ( $n_1$  и  $n_r$ ) проводим горизонтальный след  $h_{o\alpha}$  плоскости  $\alpha$ . Так как конус своим основанием расположен на плоскости, определяем точки 3 и 4 — пересечения основания со следом

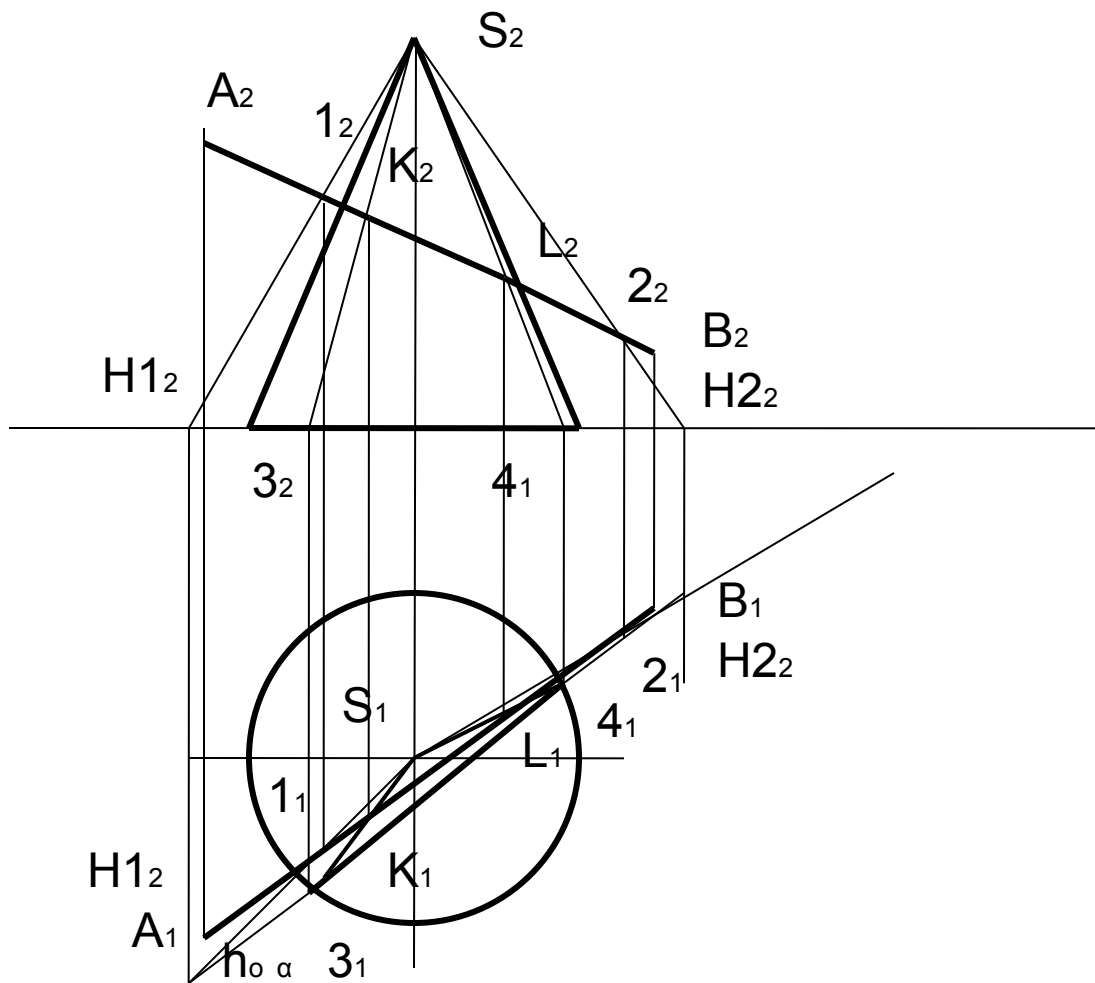


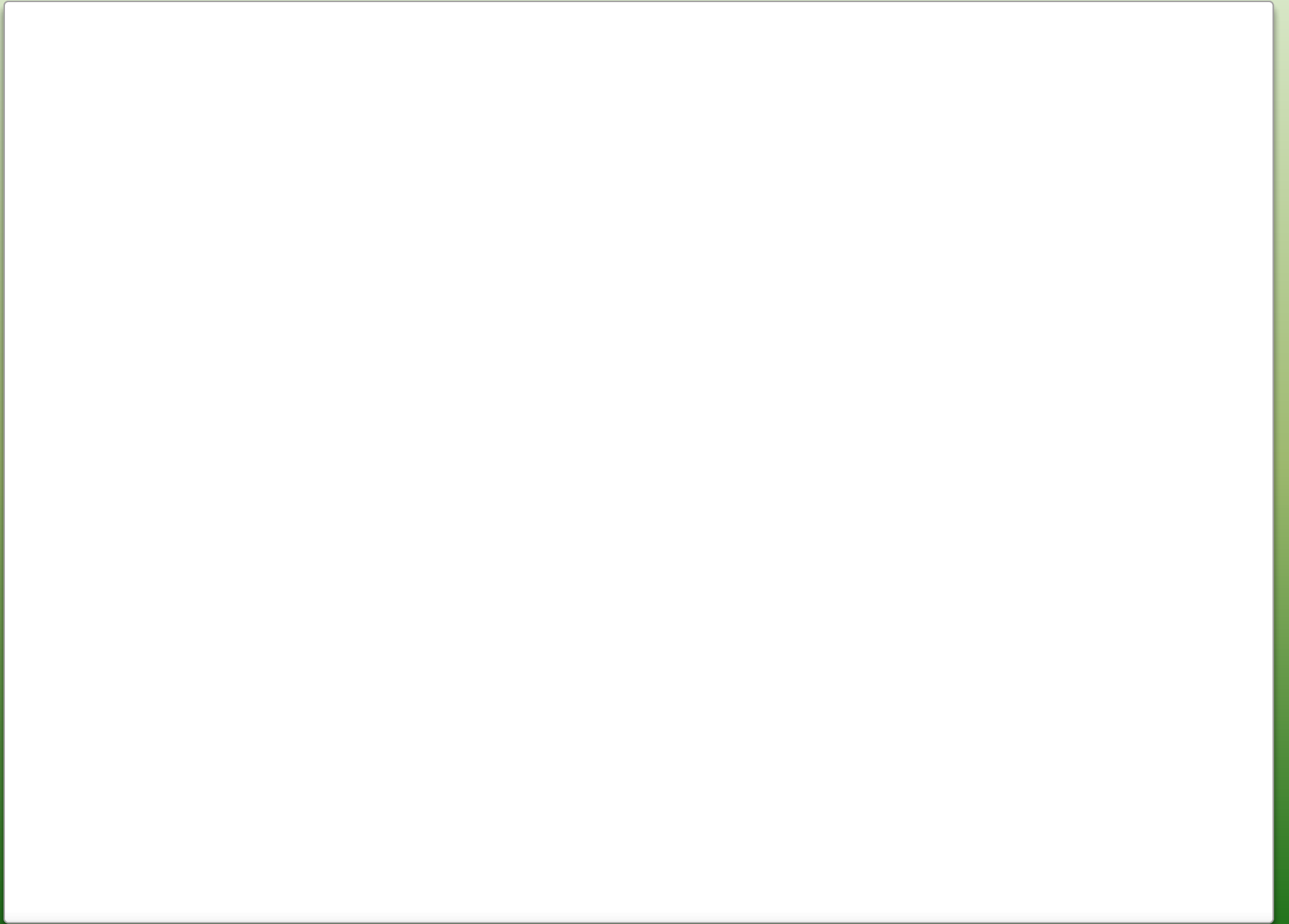


3. Определяем линию пересечения вспомогательной плоскости  $\alpha$  с конусом - это образующие  $S_3$  и  $S_4$ .

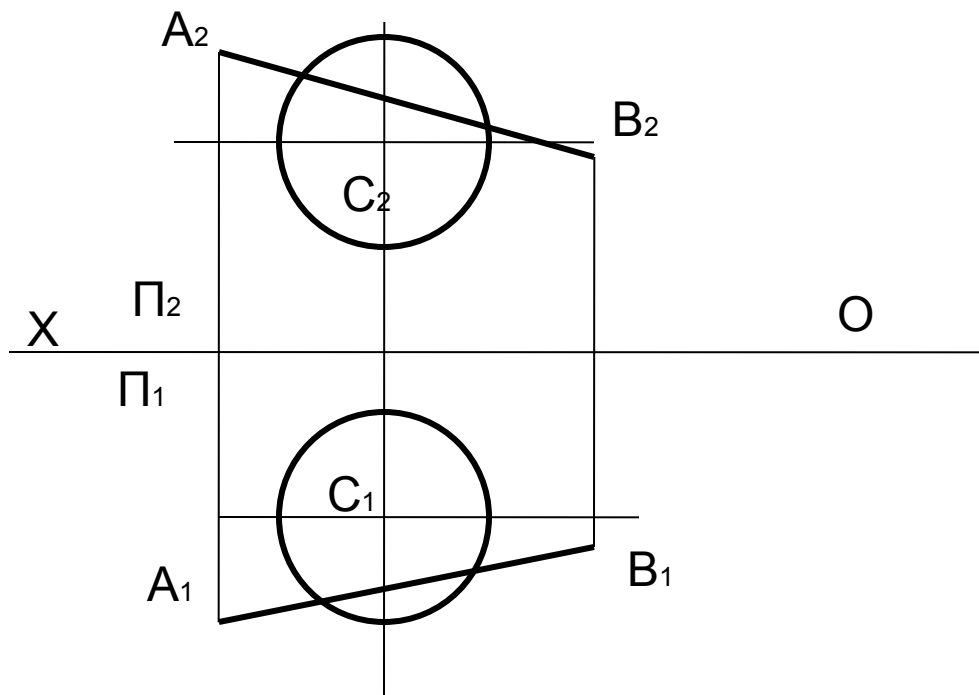


В пересечении образующих  $S3$  и  $S4$  с заданной прямой определяем искомые Точки.  $AB \cap S3 = K$   $AB \cap S4 = L$ . Определяем видимость прямой линии  $AB$ .

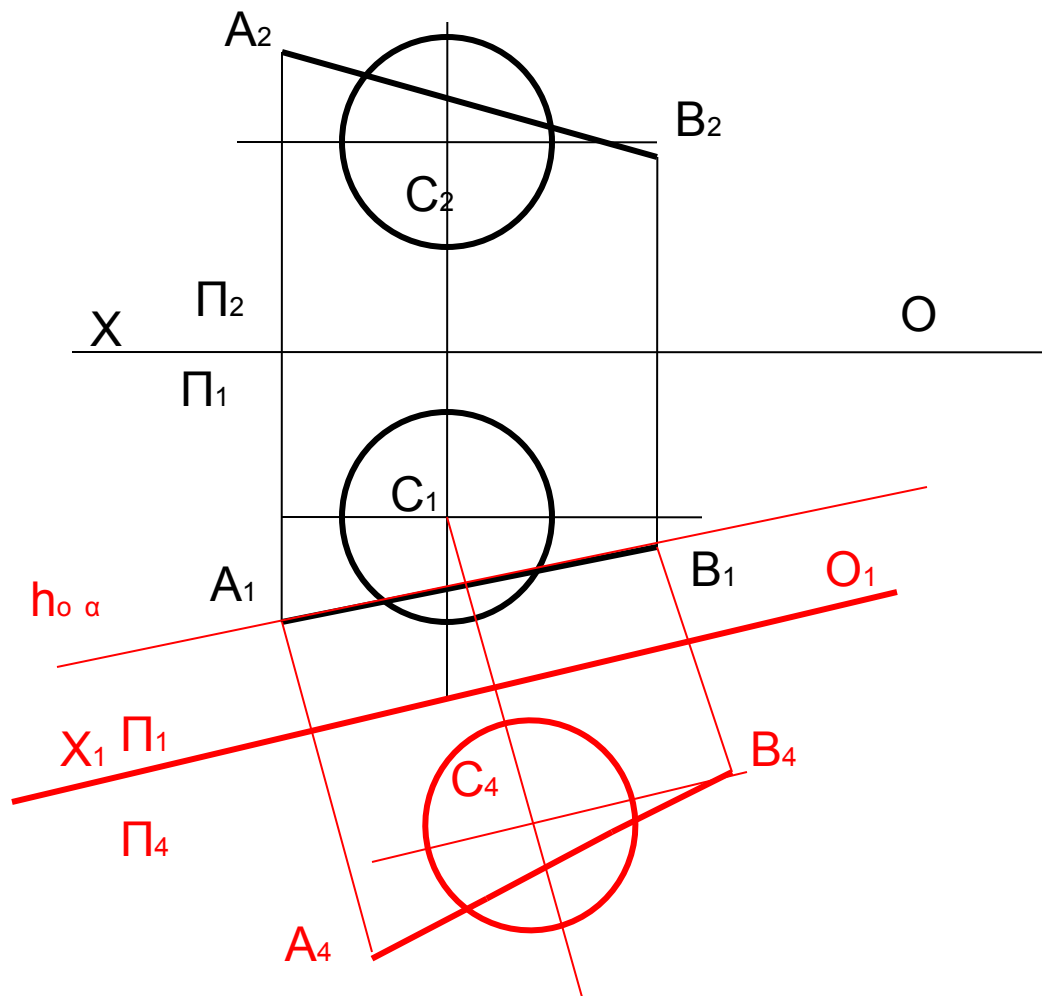




**Задача :** *Определить точки пересечения прямой АВ с поверхностью сферы, показать видимость прямой.*



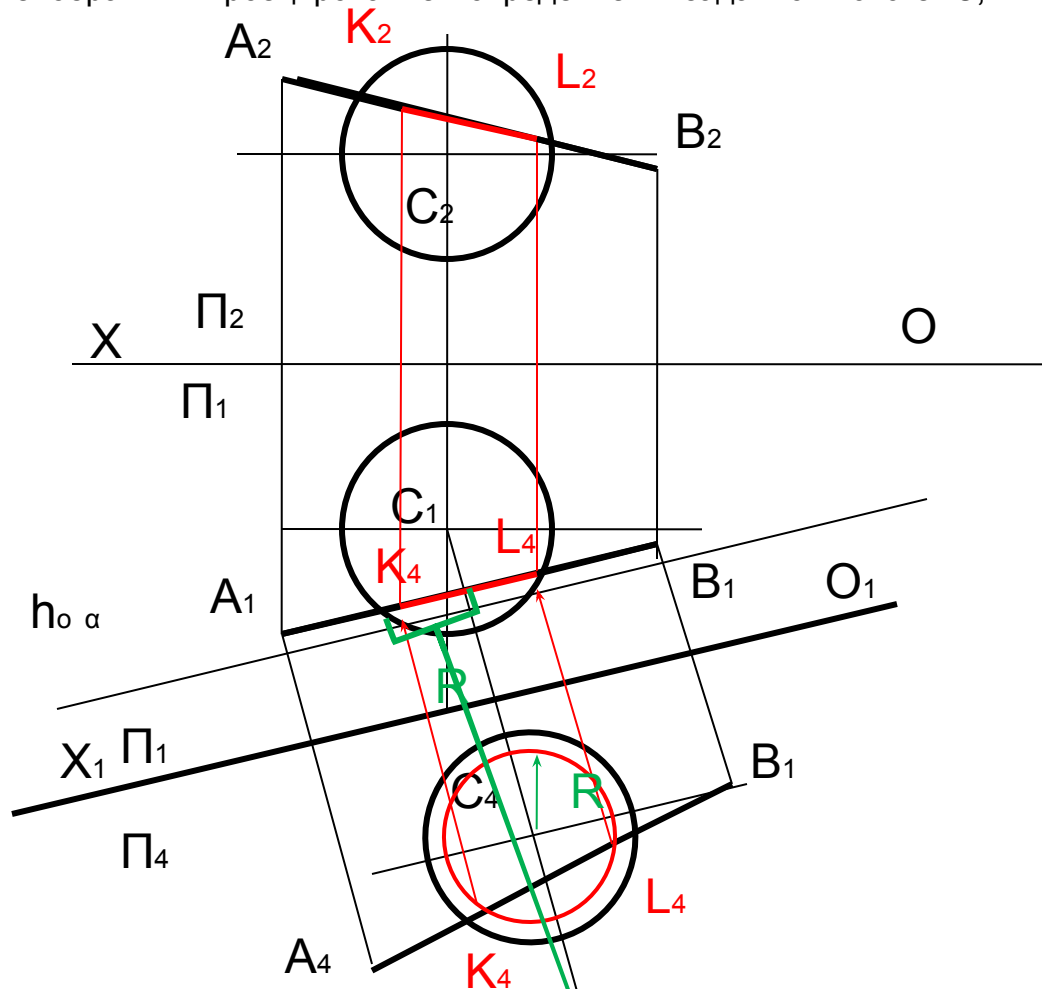
1. Через прямую АВ проводим пл.  $\alpha$   $\Pi_1$  (след  $h_{0\alpha}$  совпадает с горизонтальной проекцией прямой  $A_1B_1$ ). ( $\alpha \perp \Pi_1$ )  $\cap$  ( $A_1B_1 \subset h_{0\alpha}$ ).



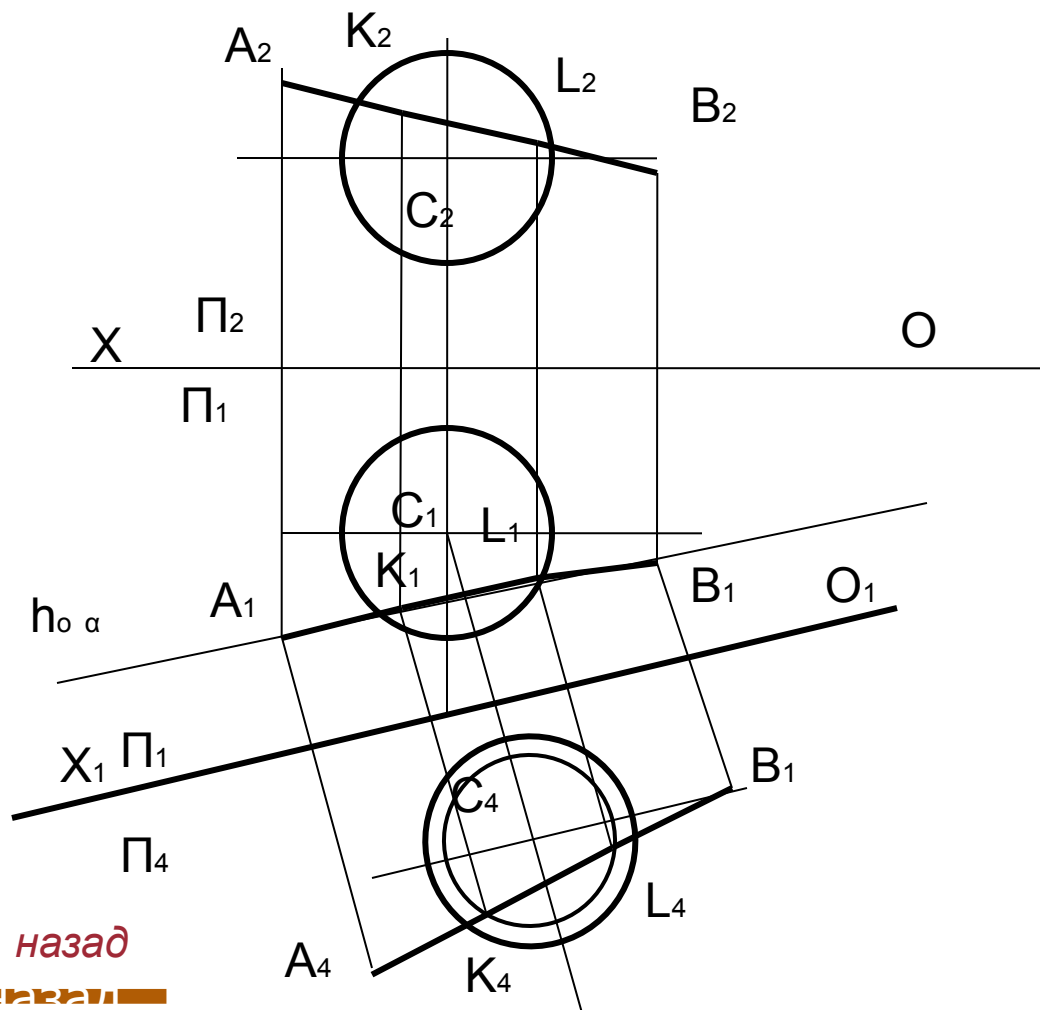


Любая плоскость пересекающая поверхность сферы, пересекает, по окружности, проекции которой при донном расположении прямой проецируются на пл. П2 в виде эллипса. Чтобы избежать построения эллипса. применим метод перемены пл. проекций, заменив пл. П<sub>1</sub> пл. П4 // A1 B1 Тогда ось O1, X1 будет // A1B1

2. Проецируем на пл. П4 заданную прямую АВ и сферу. Тогда сечение сферы пл. α на пл. П4 изобразится в виде окружности радиуса R. 3. В пересечении полученного сечения с прямой АВ и определяются искомые точки K<sub>4</sub>L<sub>4</sub> (K<sup>4</sup>,L<sup>4</sup>) которые обратным проецированием определяем в заданной системе,



### 3. Определяем видимость прямой





ЗАДАЧИ

**Задача** По заданным координатам точек А; В; С; D; E; F;G; К построить их горизонтальные, фронтальные и профильные проекции. Определить, в каких октантах расположены точки;

точка	координаты		
	X	Y	Z
A	-40	35	50
B	25	-20	30
C	-30	-10	-35
D	50	20	40
E	70	15	-15
F	85	-30	-10
G	-10	60	-70
K	-50	-15	20

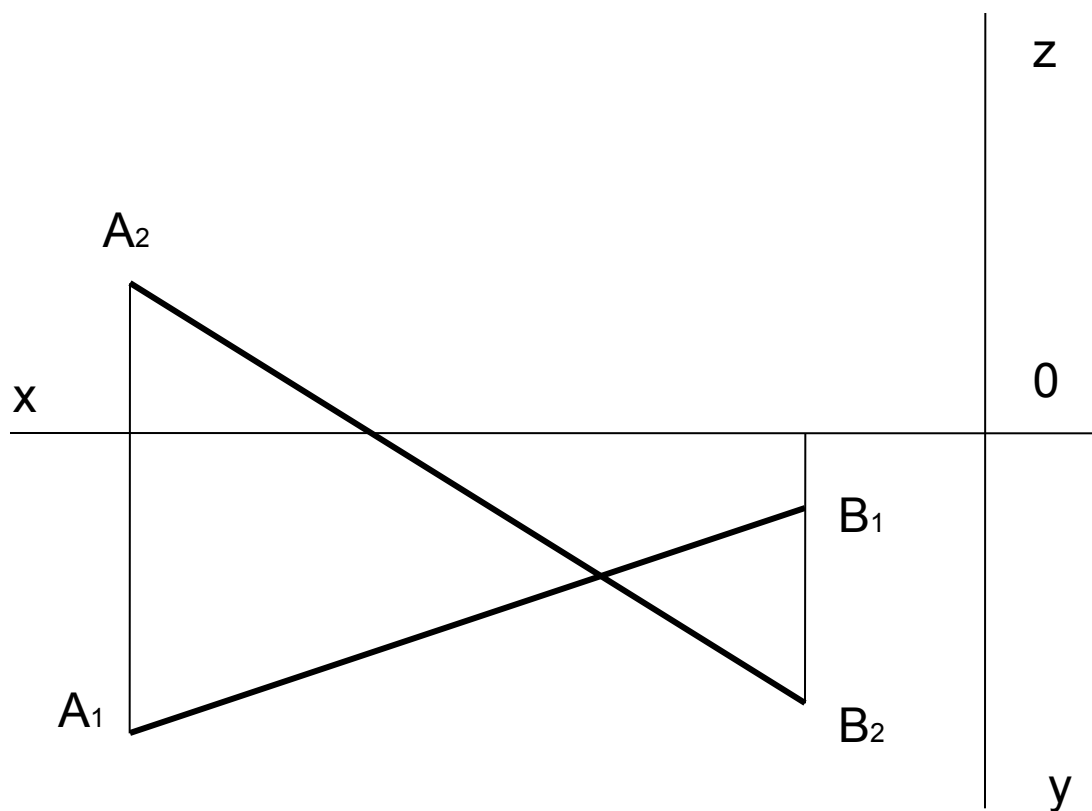


**Задача** Построить проекции отрезка прямой A B по заданным координатам его концов. Найти следы прямой.

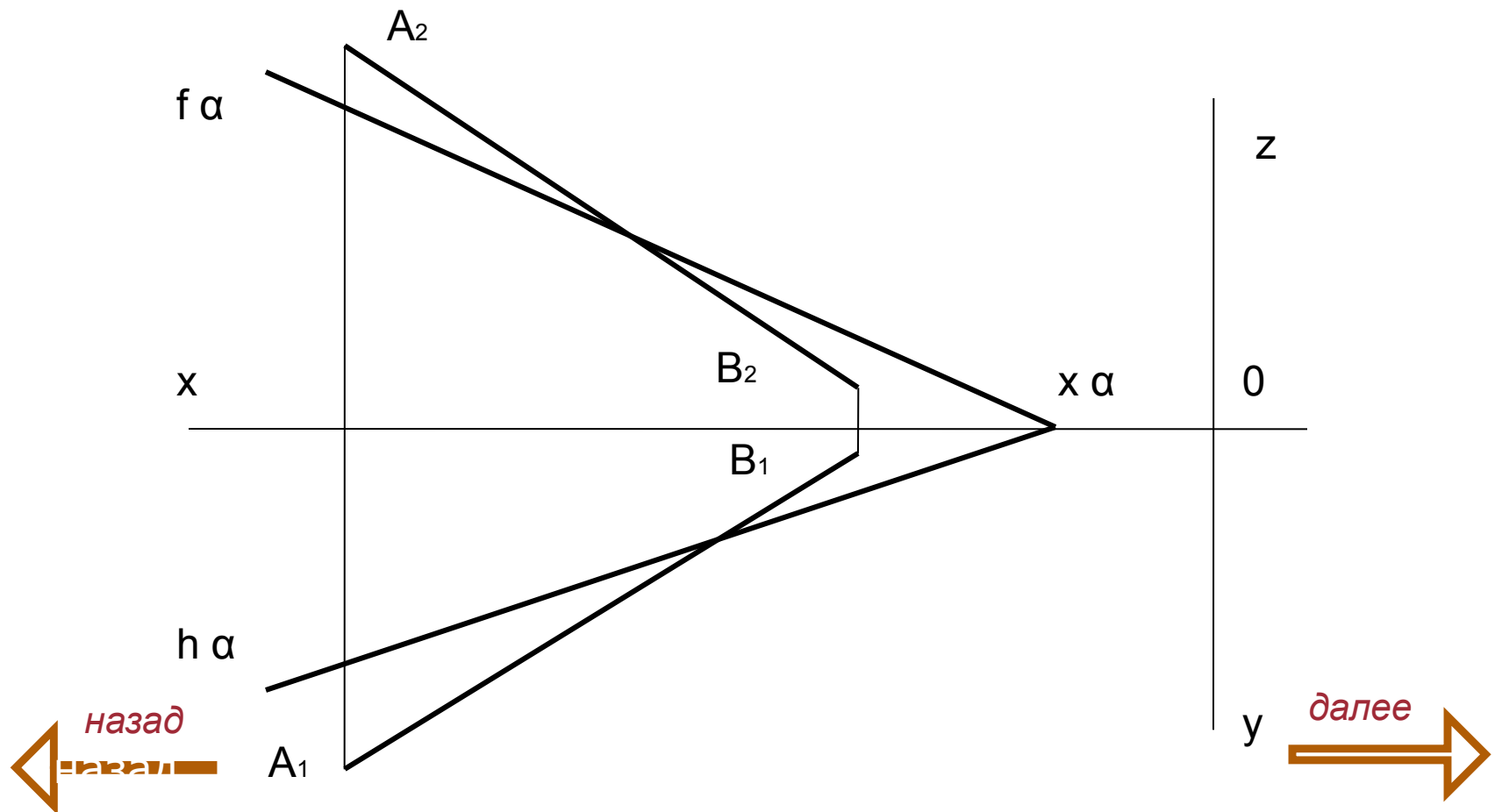
точка	координаты		
	X	Y	Z
A	70	-20	30
B	10	-50	40



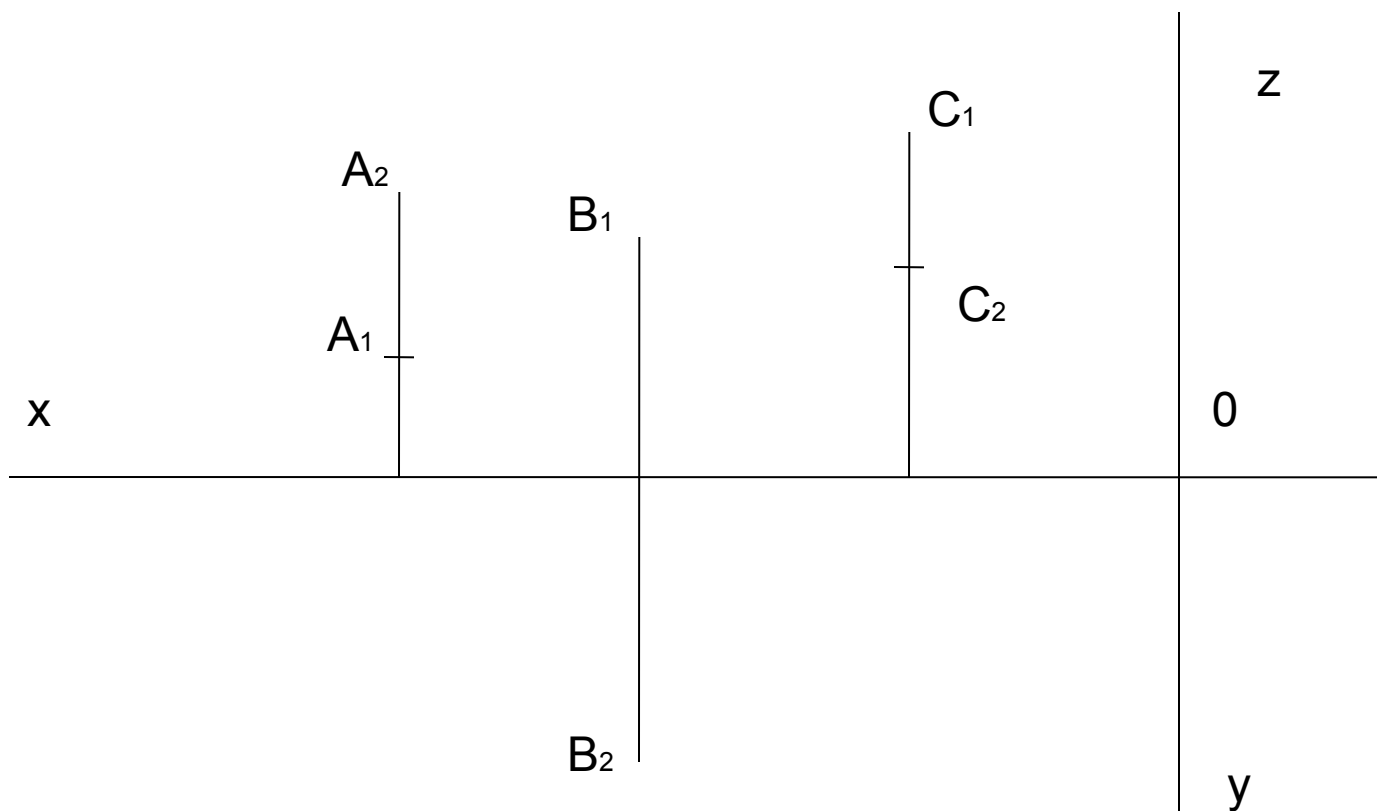
**Задача** . Определить натуральную длину отрезка прямой АВ и углы наклона этой прямой к плоскостям проекций  $\pi_1$  и  $\pi_2$



**Задача** Определить точку пересечения прямой  $AB$  с плоскостью  $a$ .  
Через точку  $A$  провести прямую  $AC$ , параллельную плоскости  $a$ . Решить вопрос видимости прямой  $AB$ .



**Задача** Построить следы плоскости  $a$ , заданной тремя точками  $A, B, C$ . В плоскости  $a$  построить горизонталь, отстоящую на расстоянии двух единиц от горизонтальной плоскости  $\pi_1$  и фронталь отстоящую на расстоянии трех единиц от фронтальной плоскости проекций  $\pi_2$ .





**Задача** По заданным координатам вершин построить проекции треугольников ABC и DEF. Определить линию их пересечения. Решить вопрос видимости объектов.

Точки	Координаты		
	X	Y	Z
A	160	85	20
B	75	95	95
C	25	5	10
D	145	5	70
E	25	65	80
F	40	90	5



**Задача** . Определить точки пересечения прямой, заданной отрезком АВ, с поверхностью. Решить вопрос видимости прямой

