Неопределенный интеграл

Лекция7

Элементы интегрального исчисления

1. Первообразная и неопределенный интеграл
2. Основные приемы вычисления неопределенных интегралов
3. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен
4. Интегрирование дробно-рациональных функций
5. Интегрирование тригонометрических функций
6. Интегрирование некоторых иррациональностей

ВГУЭС

Неопределенный интеграл, его свойства и вычисление

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, определенной на некотором промежутке, если $F'(x) = f(x)$ для каждого x из этого промежутка.

Например, функция $\cos x$ является первообразной функции $-\sin x$, так как

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Первообразная и неопределенный интеграл

Очевидно, если $F(x)$- первообразная функции $f(x)$, то $F(x)+C$, где C - некоторая постоянная, также является первообразной функции $f(x)$.

Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная функции $f(x)$, то всякая функция вида $\Phi(x)=F(x)+C$ также является первообразной функции $f(x)$ и всякая первообразная представима в таком виде.

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$, определенных на некотором промежутке, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается $\int f(x)dx$.

Первообразная и неопределенный интеграл

Если $F(x)$- некоторая первообразная функции $f(x)$, то пишут $\int f(x)dx = F(x)+C$, хотя правильнее бы писать $\int f(x)dx = \{F(x)+C\}$.

Мы по устоявшейся традиции будем писать $\int f(x)dx = F(x)+C$.

Тем самым один и тот же символ $\int f(x)dx$ будет обозначать как всю совокупность первообразных функции $f(x)$, так и любой элемент этого множества.

Свойства интеграла, вытекающие из определения

Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а его дифференциал-подынтегральному выражению. Действительно:

$$1.(\int f(x)dx)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x);$$

$$2.d\int f(x)dx = (\int f(x)dx)'dx = f(x)dx.$$

Свойства интеграла, вытекающие из определения

Неопределенный интеграл от дифференциала непрерывно дифференцируемой функции равен самой этой функции с точностью до постоянной:

3. $\int d\varphi(x) = \int \varphi'(x)dx = \varphi(x) + C,$

так как $\varphi(x)$ является первообразной для $\varphi'(x)$.

Свойства интеграла

Сформулируем далее следующие свойства неопределенного интеграла:

4. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные, то функция $f_1(x)+f_2(x)$ также имеет первообразную, причем
$\int\left[f_1(x)+f_2(x)\right]dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx$;

5. $\int Kf(x)dx=K\int f(x)dx$;

6. $\int f'(x)dx=f(x)+C$;

7. $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=F[\varphi(x)]+C$.

ВГУЭС

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$.

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

5. $\int e^x dx = e^x + C$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

Таблица неопределенных интегралов

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ ..

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

15. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$.

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C$.

17. $\int shxdx = chx + C$.

18. $\int chxdx = shx + C$.

19. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$.

20. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$.

ВГУЭС

Свойства дифференциалов

При интегрировании удобно пользоваться свойствами:

$$1.\ dx = \frac{1}{a} d(ax)$$

$$2.\ dx = \frac{1}{a} d(ax+b),$$

$$3.\ xdx = \frac{1}{2} dx^2,$$

$$4.\ x^2 dx = \frac{1}{3} dx^3.$$

Примеры

Пример . Вычислить $\int \cos 5x dx$.

Решение. В таблице интегралов найдем

$\int \cos x dx = \sin x + C$.

Преобразуем данный интеграл к табличному, воспользовавшись тем, что $d(ax) = a dx$.

Тогда:

$$\int \cos 5x dx = \int \cos 5x \frac{d(5x)}{5} = \frac{1}{5}\int \cos 5x d(5x) =$$

$$= \frac{1}{5}\sin 5x + C .$$

Примеры

Пример. Вычислить $\int \left(x^2 + 3x^3 + x + 1\right)dx$.

Решение. Так как под знаком интеграла находится сумма четырех слагаемых, то раскладываем интеграл на сумму четырех интегралов:

$$\int \left(x^2 + 3x^3 + x + 1\right)dx = \int x^2 dx + 3\int x^3 dx + \int x dx + \int dx =.$$

$$= \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + C$$

Независимость от вида переменной

При вычислении интегралов удобно пользоваться следующими свойствами интегралов:

Если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то

$\int f(x+b)dx = F(x+b)+C$.

Если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C .$$

Пример

Вычислим

$$\int (2+3x)^5 dx = \frac{1}{3 \cdot 6}(2+3x)^6 + C.$$

Методы интегрирования

Интегрирование по частям

Этот метод основан на формуле $\int udv = uv - \int vdu$.

Методом интегрирования по частям берут такие интегралы:

а) $\int x^n \sin xdx$, где $n = 1,2...k$;

б) $\int x^n e^x dx$, где $n = 1,2...k$;

в) $\int x^n arctgxdx$, где $n = 0,\pm1,\pm2,...\pm k.$;

г) $\int x^n \ln xdx$, где $n = 0,\pm1,\pm2,...\pm k$.

При вычислении интегралов а) и б) вводят обозначения: $x^n = u$, тогда $du = nx^{n-1}dx$, а, например $\sin xdx = dv$,тогда $v = -\cos x$.

При вычислении интегралов в), г) обозначают за u функцию $arctgx$, $\ln x$, а за dv берут $x^n dx$.

ВГУЭС

Примеры

Пример. Вычислить $\int x\cos x dx$.

Решение.

$$\int x\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x, du = dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{vmatrix} =$$

$$x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C \ .$$

Примеры

Пример. Вычислить

$$\int x\ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ \\ dv = xdx, v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C\,.$$

Метод замены переменной

Пусть требуется найти $\int f(x)dx$, причем непосредственно подобрать первообразную для $f(x)$ мы не можем, но нам известно, что она существует. Часто удается найти первообразную, введя новую переменную, по формуле $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi_t' dt$, где $x = \varphi(t)$, а t - новая переменная

Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

Рассмотрим интеграл $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx$,

содержащий квадратный трехчлен в знаменателе подынтегрального выражения. Такой интеграл берут также методом подстановки, предварительно выделив в знаменателе полный квадрат.

Пример

Вычислить $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

Решение. Преобразуем x^2+4x+5,

выделяя полный квадрат по формуле $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Тогда получаем :

$$x^2+4x+5 = x^2+2\cdot x\cdot 2+4-4+5 =$$

$$= \left(x^2+2\cdot 2\cdot x+4\right)+1 = (x+2)^2+1$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \left| \begin{array}{l} x+2=t \\ x=t-2 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= arctgt + C = arctg(x+2) + C.$$

Пример

Найти $$\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+x}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t,\ x = t^{2}, \\ dx = 2tdt \end{array} \right| = \int \frac{1+t}{1+t^{2}}\,2tdt =$$

$$= 2\int \frac{tdt}{1+t^{2}} + 2\int \frac{t^{2}}{1+t^{2}}dt = \int \frac{d(t^{2}+1)}{t^{2}+1} + 2\int \frac{1+t^{2}-1}{1+t^{2}}\,dt =$$

$$= \ln(t^{2}+1) + 2\int dt - 2\int \frac{dt}{1+t^{2}} =$$

$$= \ln(t^{2}+1) + 2t - 2arctgt + C =$$

$$= \ln(x+1) + 2\sqrt{x} - 2arctg\sqrt{x} + C.$$