Обратные тригонометрические функции

Работу выполнила:

Ученица 10 А класса

МОУ «Гимназии №125»

Щепеткова Дарья

Рук. Чикрин Е.А.

Историческая справка

- **Тригонометрические функции возникли впервые в связи с исследованиями в астрономии и геометрии. Соотношения отрезков в треугольнике и окружности, являющиеся по существу тригонометрическими функциями, встречаются уже в 3 в. до н. э. в работах математиков Древней Греции – Евклида Тригонометрические функции возникли впервые в связи с исследованиями в астрономии и геометрии. Соотношения отрезков в треугольнике и окружности, являющиеся по существу тригонометрическими функциями, встречаются уже в 3 в. до н. э. в работах математиков Древней Греции – Евклида, Архимеда, Аполлония Пергского и других.**
- **В последующий период математика долгое время наиболее активно развивалась индийскими и арабскими учеными. В трудах по астрономии Ариабхаты появляется термин «ардхаджива». Позднее привилось более краткое название «джива», а при переводе математических терминов в XII в. Это слово было заменено латинским «sinus».**
- **Принципиальное значение имело составление Птолемеем первой таблицы синусов (долгое время она называлась таблицей хорд): появилось практическое средство решения ряда прикладных задач, и в первую очередь задач астрономии.**
- **Слово косинус –это сокращение латинского выражения «complementy sinus»(синус).**
- **Тангенсы возникли в связи с решением задачи об определении длины тени.Тангенс (а также котангенс, секанс и косеканс) введен в X веке Абу-л-Вафой, который составил и первые таблицы для нахождения тангенсов и котангенсов. Однако эти открытия долгое время оставались неизвестными европейским ученым, и тангенсы были заново открыты в XIV в. Т. Бравердином, а позже астрономом Региомонтаном.**
- **Первым автором, который использовал специальные символы для обратных тригонометрических функций был, Бернулли. В 1729 и в1736 годах он писал as и at соответственно вместо arcsin и arctg.Современные обозначения arcsin и arctg появляются в 1772 г. в работах венского математика Шерфера известного французского ученого Лагранжа.Приставка «arc» происходит от латинского «arcus» (лук, дуга), что вполне согласуется со смыслом понятия: arcsin x, например,- это угол**

- Для тригонометрических функций $\sin a, \cos a, tg\, a, ctg\, a$ можно определить обратные функции (*круговые функции*, *аркфункции*). Они обозначаются соответственно $arcctg\, a$, $arctg\, a$, $\arccos a$, $\arcsin a$.

К обратным тригонометрическим функциям обычно относят шесть функций:

- **арксину́с** (обозначение: arcsin)
- **арккó синус** (обозначение: arccos)
- **арктáнгенс** (обозначение: arctg; в иностранной литературе arctan)
- **арккотáнгенс** (обозначение: arcctg; в иностранной литературе arccot или arccotan)
- **арксéканс** (обозначение: arcsec)
- **арккосéканс** (обозначение: arccosec; в иностранной литературе arccsc)

Почему можно определить обратную тригонометрическую функцию.

Теорема о корне:

Пусть функция f возрастает (или убывает) на промежутке I, число a – любое из значений, принимаемых f на этом промежутке. Тогда уравнение F(x)=a имеет единственный корень в промежутке I.

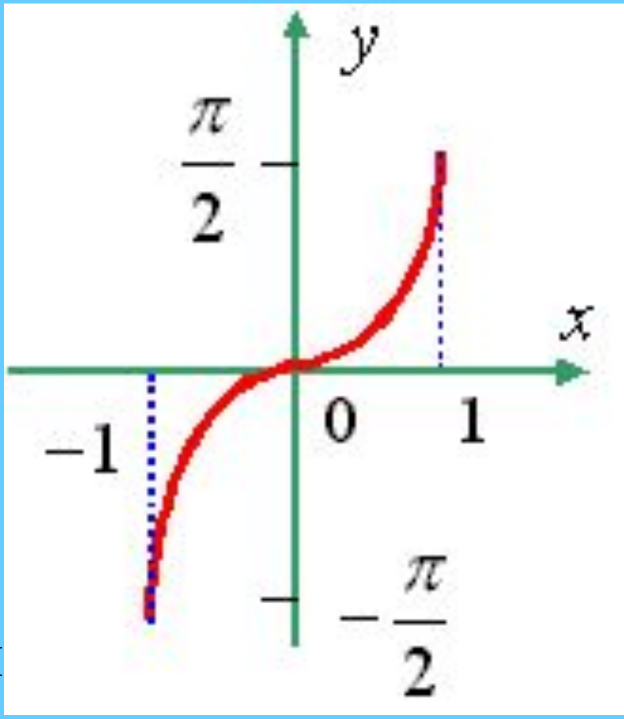
- На промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ монотонна, возрастает, т.е. все значения от -1 до 1 принимает ровно один раз, поэтому можно определить обратную функцию - arcsin x.
- На промежутке $\left[0;\pi\right]$ функция $y = \cos x$ монотонна, убывает, т.е. принимает все значения от -1 до 1 ровно один раз, поэтому можно определить обратную тригонометрическую функцию.
- На интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ функция $y = tgx$ монотонна, возрастает и принимает все значения из R ровно один раз, поэтому можно определить обратную тригонометрическую функцию.
- На интервале $\left(0;\pi\right)$ функция $y = ctgx$ монотонна, убывает , принимает все значения из R ровно один раз, поэтому мы можем определить обратную тригонометрическую функцию.

Арксинус $\angle\alpha$

- **Арксинус** $\angle\alpha$ $(\arcsin a)$-угол из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен а.
- Если $|a|\le 1$, то

$$\arcsin a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = a \\ -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Функция y = arcsin$x$ непрерывна и ограничена на всей своей числовой прямой. Функция y = arcsin$x$ является строго возрастающей.

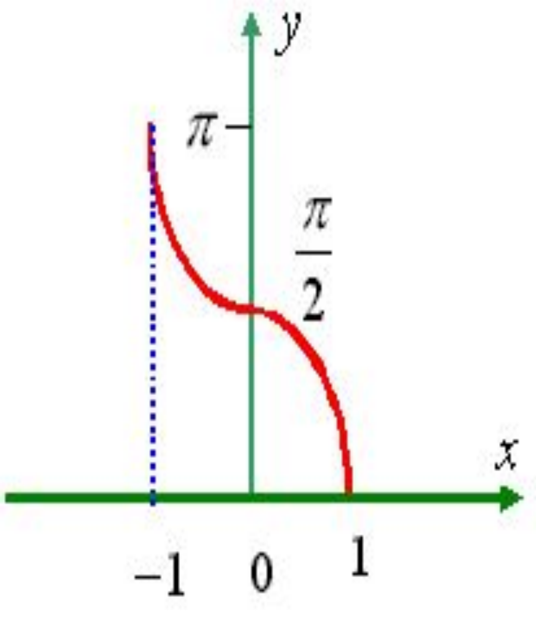


$\boxed{\arcsin(-a) = -\arcsin a}$ --функция нечетная

Таким образом, arcsin$a$, (arctg$a$) - угол первой четверти, если a - положительно, и угол четвертой четверти, если a - отрицательно.

<u>**Арккосинус**</u> $\angle\alpha$

- <u>***Арккосинус***</u> $\angle\alpha$ $(\arccos a)$***-угол*** из промежутка $[0;\pi]$, косинус которого равен а.



- Если $|a|\le 1$, то

$$\arccos a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = a \\ 0 \le t \le \pi \end{cases}$$

- Функция $y = \arccos x$ непрерывна и ограничена на всей своей числовой прямой.
- Функция $y = \arccos x$ является строго убывающей.

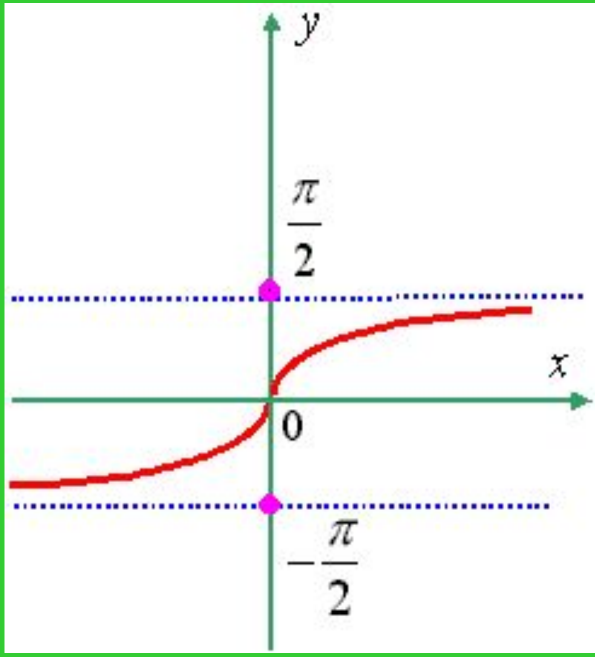
$$\boxed{\arccos(-a) = \pi - \arccos a}$$

- arccos*a* (arctg*a*) - угол первой четверти, если *а* - положительно, и угол второй четверти, если *а* - отрицательно.

<u>Арктангенс</u> $\angle\alpha$

- **<u>Арктангенс</u>** $\angle\alpha(arctg\,a)$-угол из интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен а.

$$arctg\,a = x \Leftrightarrow \begin{cases} tg\,x = a \\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

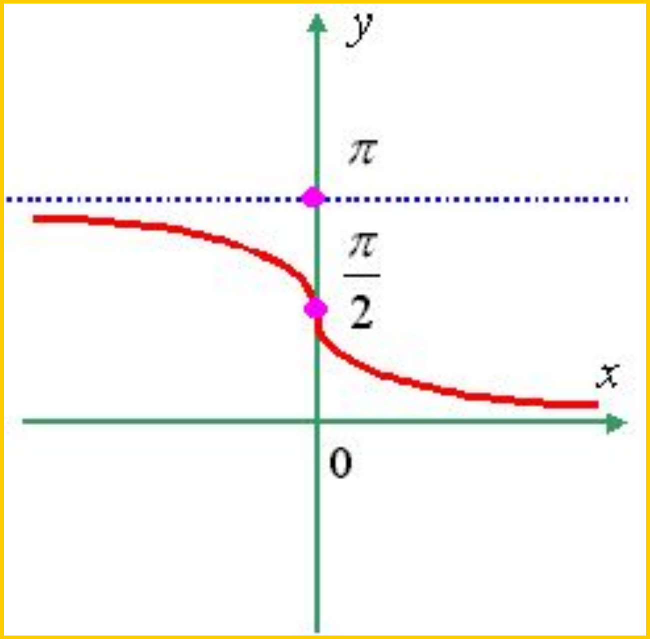


$\boxed{arctg(-a) = -arctg\,a}$ - нечётная функция

- Функций $y = arctgx$ непрерывна и ограничена на всей своей числовой прямой.

- Функция $y = arctgx$ является строго возрастающей.

Арккотангенс $\angle a$



- **Арккотангенс** $\angle a\left(arcctg\, a\right)$-угол из интервала $(0;\pi)$ котангенс которого равен а.

$$arcctg\, a = x \Leftrightarrow \begin{cases} ctg\, x = a \\ 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$arcctg(-a) = \pi - arcctg\, a$$

- Функция $\boldsymbol{y = arcctg}$ непрерывна и ограничена на всей своей числовой прямой.

- Функция $\boldsymbol{y = arcctg}$ является строго убывающей.

Преобразований сумм обратных тригонометрических функций

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2};$$

$$0 \le \arccos x \le \pi$$

$$-\pi \le -\arccos x \le 0$$

$$-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - \arccos x \le \frac{\pi}{2}$$

На промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ функция возрастает, т.е. каждое свое значение принимает ровно один раз, т.е. если на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

$$\sin\varphi = \sin t \Rightarrow \sin(\arcsin x) = x \Rightarrow \varphi = t$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \arccos x) = \cos(\arccos x) = x \Rightarrow \arcsin x - (\frac{\pi}{2} - \arccos x) =$$

$$\boxed{\boldsymbol{\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}}}$$

Аналогично: $\boxed{\boldsymbol{arctga + arcctga = \frac{\pi}{2}}}$

Уравнения и неравенства, левая и правая части которых являются одноименными обратными тригонометрическими функциями

Решение уравнений и неравенств, левая и правая части которых представляют собой одноименные обратные тригонометрические функции различных аргументов, основывается, прежде всего, на таком свойстве этих функций, как монотонность(функции *y* = arcsin *t* и *y* = arctg *t* монотонно возрастают, а функции *y* = arccos *t* и *y* = arcctg *t* монотонно убывают на своих областях определения). Поэтому справедливы следующие равносильные переходы.

$$\text{а) } \arcsin f(x) = \arcsin g(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |\, f(x)\,| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |\, g(x)\,| \leq 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \arcsin f(x) \leq \arcsin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -1, \\ g(x) \leq 1. \end{cases}$$

Замечание. Какой из двух равносильных систем пользоваться при решении уравнений 1а), зависит от того, какое неравенство проще: | *f*(*x*) | £ 1 (тогда используем первую систему), или | *g*(*x*) | £ 1 (в этом случае используем вторую систему).

Примеры

- **Пример 1.** Решить уравнение

$$\arcsin\left(3x^2-4x-1\right)=\arcsin\left(x+1\right)$$

Решение. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 3x^2-4x-1=x+1, \\ |x+1|\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-5x-2=0, \\ |x+1|\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \\ |x+1|\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Замечание. Решать неравенство, входящее в систему не обязательно. Достаточно проверить, удовлетворяют ли неравенству найденные корни уравнения.

- **Пример 2.** Решить неравенство **3arcsin 2*x* < 1.**

Решение.

$$3\arcsin 2x < 1 \Leftrightarrow \arcsin 2x < \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \arcsin 2x < \arcsin\left(\sin\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow -1 \leqslant 2x < \sin\frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{1}{2}\sin\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sin\frac{1}{3}\right).$

II

а) $\arccos f(x) = \arccos g(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |f(x)| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |g(x)| \le 1; \end{cases}$$

б) $\arccos f(x) \leqslant \arccos g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ g(x) \ge -1, \\ f(x) \le 1. \end{cases}$

Замечание. Какой из двух равносильных систем пользоваться при решении уравнений 2а), зависит от того, какое неравенство проще: $| f(x) |$ £ 1 (тогда используем первую систему), или $| g(x) |$ £ 1 (в этом случае используем вторую систему).

- Пример 3. Решить неравенство

$$\arccos\left(x^2-3\right)\le \arccos\left(x+3\right)$$

- Решение.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3\ge x+3, \\ x+3\ge -1, \\ x^2-3\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-6\ge 0, \\ x^2\le 4, \\ x\ge -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$, \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+2)\ge 0, \\ (x-2)(x+2)\le 0, \\ x\ge -4 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2.$$

Ответ: $\{-2\}$.

- Пример 4. Решить уравнение

$$\arccos\left(4x^2-3x-2\right)+\arccos\left(3x^2-8x-4\right)=\pi$$

- Решение. Так как $\pi-\arccos t=\arccos(-t)$, то имеет место следующая цепочка равносильных преобразований:

$$\arccos\left(4x^2-3x-2\right)=\pi-\arccos\left(3x^2-8x-4\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\arccos\left(4x^2-3x-2\right)=\arccos\left(-3x^2+8x+4\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2-3x-2=-3x^2+8x+4,\\ \left|4x^2-3x-2\right|\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x^2-11x-6=0,\\ \left|4x^2-3x-2\right|\le 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-\dfrac{3}{7}\end{array}\right.\\ \left|4x^2-3x-2\right|\le 1\end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{3}{7}.$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{3}{7}\right\}$.

III

а) arctg $f(x)$ = arctg $g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$;

б) acrtg $f(x) \leq$ arctg $g(x) \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$.

IV

а) arcctg $f(x)$ = arcctg $g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$;

б) arcctg $f(x) \leq$ arcctg $g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$.

- **Пример 5.** Решить неравенство

$$\operatorname{arcctg}\left(8x^2-6x-1\right)\le \operatorname{arcctg}\left(4x^2-x+8\right)$$

Решение. Неравенство равносильно следующему:

$$8x^2-6x-1\geqslant 4x^2-x+8 \Leftrightarrow 4x^2-5x-9\geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -1 \\ x\ge \dfrac{9}{4}. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;-1]\cup\left[\dfrac{9}{4};+\infty\right).$

Уравнения и неравенства, левая и правая части которых являются разноименными обратными тригонометрическими функциями

- При решении уравнений и неравенств, левая и правая части которых являются разноименными обратными тригонометрическими функциями, пользуются известными тригонометрическими тождествами. Рассуждения здесь могут быть примерно следующими. Пусть требуется решить уравнение arcsin $f(x)$ = arccos $g(x)$. Предположим, что $x0$ – решение этого уравнения.
- Обозначим arcsin $f(x0)$ = arccos $g(x0)$ через a.
- Тогда sin a = $f(x0)$, cos a = $g(x0)$,

откуда $f^2(x_0)+g^2(x_0)=1$

- Итак, arcsin $f(x)$ = arccos $g(x)$ $\Rightarrow$ $f^2(x)+g^2(x)=1$ (1)

Рассуждая аналогично, можно получить следующие переходы:

$$(2)\quad arctg\, f(x) = arcctg\, g(x) \Rightarrow f(x)g(x) = 1$$

(*использована формула* $tg\alpha\, ctg\alpha = 1$)

$$(3)\quad \arcsin f(x) = arcctg\, g(x) \Rightarrow f^2(x) = \frac{1}{g^2(x)+1}$$

(*использована формула* $\sin^2\alpha = \frac{1}{ctg^2\alpha + 1}$)

$$(4)\quad arctg\, f(x) = \arccos g(x) \Rightarrow \frac{1}{f^2(x)+1} = g^2(x)$$

(*использована формула* $\cos^2\alpha = \frac{1}{tg^2\alpha + 1}$)

$$(5)\quad \arcsin f(x) = arctg\, g(x) \Rightarrow f^2(x) = \frac{g^2(x)}{g^2(x)+1}$$

(*использована формула* $\sin^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{tg^2\alpha + 1}$)

$$(6)\quad \arccos f(x) = arcctg\, g(x) \Rightarrow f^2(x) = \frac{g^2(x)}{g^2(x)+1}$$

(*использована формула* $\cos^2\alpha = \frac{ctg^2\alpha}{ctg^2\alpha + 1}$)

Замечание. Корнем каждого из уравнений (1)–(4) может быть только такое число $x0$, для которого $f(x_0) \geq 0$ и $g(x_0) \geq 0$. В противном случае множество значений левой и правой частей уравнения не пересекаются.

Примеры

Пример 6. Решить уравнение $\arccos\dfrac{7x+6}{13} = \arcsin\dfrac{4x+1}{13}$.

Решение.

$$\arccos\frac{7x+6}{13} = \arcsin\frac{4x+1}{13} \overset{(1)}{\Rightarrow} \left(\frac{7x+6}{13}\right)^2 + \left(\frac{4x+1}{13}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 65x^2 + 78x - 143 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{143}{65}. \end{array}\right.$$

Корень $x = -\dfrac{143}{65}$ является посторонним.

Ответ: {1}.

Пример 7. Решить уравнение $\arcsin\frac{\sqrt{3x+2}}{2}=\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{2}{x+1}}$.

- Решение.

$$\arcsin\frac{\sqrt{3x+2}}{2}=\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{2}{x+1}}\overset{(4)}{\Rightarrow}\frac{3x+2}{4}=\frac{1}{1+\frac{2}{x+1}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+7x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{3}\\x=-2.\end{array}\right.$$

Корень x = – 2 является посторонним.

Ответ: $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Пример 8. Решить уравнение arctg (2sin x) = arcctg (cos x).

Решение.

$$\operatorname{arctg}(2\sin x) = \operatorname{arcctg}(\cos x) \overset{(2)}{\Rightarrow} 2\sin x \cos x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n_1,\ \ n_1 \in Z \\ x = \dfrac{5}{4}\pi + 2\pi n_2,\ \ n_2 \in Z. \end{array}\right.$$

Корни вида $x = \frac{5}{4}\pi + 2\pi n_2,\ n_2 \in Z$ являются посторонними.

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{4} + 2\pi n_1 \,\middle|\, n_1 \in Z \right\}.$

- При решении неравенств, левая и правая части которых представляют собой разноименные обратные тригонометрические функции, целесообразно использовать метод интервалов, а в некоторых случаях учитывать свойства монотонных функций.
- Пример 9. Решить неравенство $\arcsin\frac{x+2}{5} < \arccos\frac{3x+1}{5}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \arcsin\frac{x+2}{5} - \arccos\frac{3x+1}{5}$

и решим неравенство f(x) ≤ 0 методом интервалов.

1) Найдем D(f). Для этого решим систему

$$\begin{cases} \frac{|x+2|}{5} \le 1, \\ \frac{|3x+1|}{5} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 \le x \le 3, \\ -2 \le x \le \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}.$$

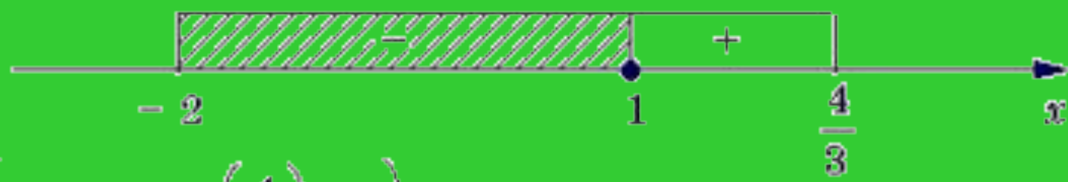
2) Найдем нули $f(x)$. Для этого решим уравнение

$$\arcsin\frac{x+2}{5} = \arccos\frac{3x+1}{5} \overset{(1)}{\Rightarrow} \left(\frac{x+2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3x+1}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Корень $x = -2$ является посторонним

3) Решим неравенство $f(x) \le 0$ методом интервалов.



$\left(f(2) < 0;\ f\left(\frac{4}{3}\right) > 0 \right).$

Ответ: $[-2;\ 1]$.

Замечание 4. Заметим, что найдя корень уравнения $\frac{x+2}{5} = \arccos\frac{3x+1}{5}$, можно было не обращаться к методу интервалов, а воспользоваться тем, что функция $y = \arcsin\frac{x+2}{5}$ является монотонно возрастающей, а функция $y = \arccos\frac{3x+1}{5}$ монотонно убывающей на отрезке $\left[-2;\ \frac{4}{3}\right]$. . Поэтому решением исходного неравенства является промежуток $[-2;\ 1]$. Следует, однако, понимать, что метод интервалов является более универсальным, – ведь его можно применять и в тех случаях, когда использование свойств монотонных функций не приводит к искомому результату.

- При решении уравнений и неравенств данного типа, содержащих параметры, становится актуальным вопрос о равносильности преобразований. Чтобы преобразования (1)–(4) сделать равносильными, следует учесть естественные ограничения, связанные с областями определения обратных тригонометрических функций и множествами их значений (см. замечание 3). Так, например,

$$\arcsin f(x) = \arccos g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(x) + g^2(x) = 1, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$$

$$\operatorname{arctg} f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\, g(x) = 1, \\ f(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\, g(x) = 1, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Замена переменной

- Некоторые уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции, можно свести к алгебраическим, сделав соответствующую замену переменной. При этом следует помнить о естественных ограничениях на вводимую переменную, связанных с ограниченностью обратных тригонометрических функций.

Пример 10. Решить уравнение $12\operatorname{arctg}^2\frac{x}{2}=\pi\left(3\pi+5\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right).$

Решение. Обозначим $\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$ через t; $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$.

После преобразований получим уравнение

$$12t^2-5\pi t-3\pi^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{3}{4}\pi\\ t=-\frac{\pi}{3}.\end{array}\right.$$

Поскольку $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$, то $t=-\frac{\pi}{3}$,

откуда $\operatorname{acrtg}\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\frac{x}{2}=-\sqrt{3}\Leftrightarrow x=-2\sqrt{3}.$

Ответ: $\left\{-2\sqrt{3}\right\}.$

Пример 11.

Решить неравенство **$\arccos^2 x - 3\arccos x + 2 \geq 2$**

Решение. Пусть $\arccos x = t$, $0 \leq t \leq \pi$. Тогда

Поскольку

$$0 \leqslant t \leqslant \pi, \text{ то } \left[\begin{array}{l} 2 \leq t \leq \pi \\ 0 \leq t \leq 1, \end{array}\right.$$

откуда

$$\left[\begin{array}{l} 2 \leq \arccos x \leq \pi \\ 0 \leq \arccos x \leq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leq x \leq \cos 2 \\ \cos 1 \leq x \leq 1. \end{array}\right.$$

Ответ: [– 1; cos 2] И [cos 1; 1].

Иногда свести уравнение или неравенство к алгебраическому можно с помощью тождества

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (|x| \leqslant 1).$$

- **Пример 12.**
- Решить уравнение $$\arcsin x \arccos x = \frac{\pi^2}{18}.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующему:

$$\arcsin x\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = \frac{\pi^2}{18} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18\arcsin^2 x - 9\pi\arcsin x + \pi^2 = 0.$$

Пусть arcsin x = t, $|t| \leqslant \frac{\pi}{2}$

$$18t^2 - 9\pi t + \pi^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{3} \\ t = \frac{\pi}{6}. \end{array}\right.$$

Тогда

Поэтому $\left[\begin{array}{l} \arcsin x = \frac{\pi}{3} \\ \arcsin x = \frac{\pi}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right.$

Ответ: $\left\{\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$

- **IV. Использование свойств монотонности и ограниченности обратных тригонометрических функций**
- Решение некоторых уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции, основывается исключительно на таких свойствах этих функций, как монотонность и ограниченность. При этом используются следующие теоремы.

- **Теорема 1.** Если функция $y = f(x)$ монотонна, то уравнение $f(x) = c$ ($c = \text{const}$) имеет не более одного решения.

- **Теорема 2.** Если функция $y = f(x)$ монотонно возрастает, а функция $y = g(x)$ монотонно убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного решения.

- **Теорема 3.** Если $\min\limits_{X} f(x) = c = \max\limits_{X} g(x)$ ($c = \text{const}$), то на множестве X уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = c, \\ g(x) = c. \end{cases}$$

Пример 13. Решить уравнение 2arcsin $2x$ = 3arccos x.

- **Решение.** Функция $y = 2\arcsin 2x$ является монотонно возрастающей, а функция $y = 3\arccos x$ – монотонно убывающей. Число $x = 0{,}5$ является, очевидно, корнем данного уравнения. В силу теоремы 2 этот корень – единственный.
- **Ответ:** {0,5}.

Пример 14. Решить уравнение $\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+x} + \arcsin\sqrt{x^2+x+1} = \frac{\pi}{2}$.

- **Решение.** Пусть $x^2 + x = t$. Тогда уравнение примет вид

$$\operatorname{arctg}\sqrt{t} + \arcsin\sqrt{t+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Функции $z = \sqrt{t}$, $z = \sqrt{t+1}$, $y = \operatorname{arctg} z$ являются монотонно возрастающими. Поэтому функция $y = \operatorname{arctg}\sqrt{t} + \arcsin\sqrt{t+1}$ также является монотонно возрастающей. В силу теоремы 1 уравнение $\operatorname{arctg}\sqrt{t} + \arcsin\sqrt{t+1} = \frac{\pi}{2}$ имеет не более одного корня. Очевидно, что $t = 0$ является корнем этого уравнения. Поэтому

$$x^2 + x = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1. \end{array}\right.$$

- Ответ: {– 1; 0}.

Пример 15. Решить неравенство

$$\arccos x + \arccos x\sqrt{2} + \arccos x\sqrt{3} < \frac{3}{4}\pi.$$

- Решение.

Левая часть неравенства представляет собой монотонно убывающую на отрезке $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ функцию

$$f(x) = \arccos x + \arccos x\sqrt{2} + \arccos x\sqrt{3}.$$

Уравнение $f(x) = \frac{3}{4}\pi$ в силу теоремы 1 имеет не более одного корня. Очевидно, что $x = \frac{1}{2}$ – корень этого уравнения.

Поэтому решением неравенства $f(x) = \frac{3}{4}\pi$ является отрезок $\left[\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

- Ответ: $\left[\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

- **Пример 16**. Решить уравнение

arcsin (x(x + y)) + arcsin (y(x + y)) = □.

- Решение. Поскольку arcsin $t \leqslant \frac{\pi}{2}$ при $|t| \leqslant 1$,

- то левая часть уравнения не превосходит $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$. Знак равенства возможен, лишь если каждое слагаемое левой части равно $\frac{\pi}{2}$. Таким образом, уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \arcsin(x(x+y)) = \frac{\pi}{2}, \\ \arcsin(y(x+y)) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+y) = 1, \\ y(x+y) = 1. \end{cases}$$

Решение последней системы не представляет труда.

- *Ответ:* $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

Уравнения и неравенства с параметрами.

Пример 1. Решить уравнение с параметром а:

$$\arcsin(ax^2 - ax + 1) + \arcsin x = 0.$$

- Решение. Уравнение равносильно уравнению

$$\arcsin(ax^2 - ax - 1) = -\arcsin x \quad \Leftrightarrow$$

$$\arcsin(ax^2 - ax - 1) = \arcsin(-x) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 - ax - 1 = -x, \\ |-x| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 - (a-1)x - 1 = 0, \\ |x| \le 1. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

1) а = 0. В этом случае система примет вид: $\begin{cases} x - 1 = 0, \\ |x| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

2) $a \neq 0$. В этом случае уравнение системы является квадратным. Его корни:

$$x_1 = 1 \text{ и } x_2 = -\frac{1}{a}.$$

Так как $|x| \le 1$, то $\left|-\frac{1}{a}\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow |a| \geqslant 1.$

Если а = – 1, то $x_2 = x_1 = 1.$ Если $a \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$ то уравнение имеет два корня.

- Ответ:

$a \in (-\infty; -1) \cup [1; \infty)$ $x = 1$ и $x = -\frac{1}{a};$

при при а = – 1 и а = 0 х = 1;

при прочих а решений нет.

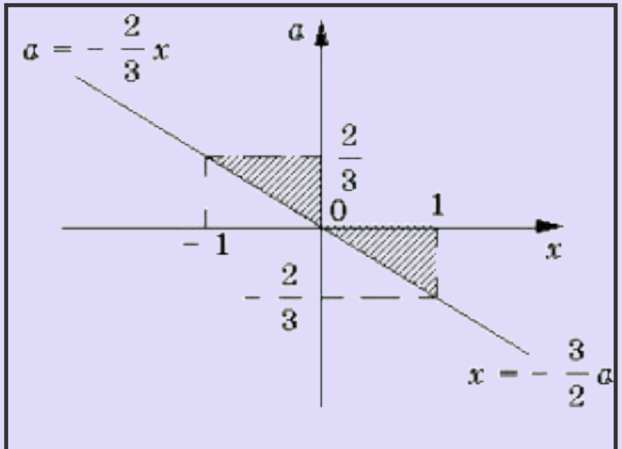


Рис. 1

- **Пример 2**. Решить неравенство с параметром а:

$$\arccos(3ax + 1) \le \arccos(2x + 3a\ \ 1).$$

- Решение. Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 3ax + 1 \ge 2x + 3a - 1, \\ 2x + 3a - 1 \ge -1, \\ 3ax + 1 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3a - 2)x \ge 3a - 2, \\ x \ge -\frac{3}{2}a, \\ ax \le 0. \end{cases}$$

Решать последнюю систему можно графо-аналитическим методом, учитывая то, что

при $a > \frac{2}{3}$ первое неравенство системы равносильно неравенству $x \ge 1$,

при $a < \frac{2}{3}$ – неравенству $x \ge 1$,

при $a = \frac{2}{3}$ решением первого неравенства является любое действительное число.

Множество всех точек (x; a) плоскости Оха, удовлетворяющих системе, показано на рис. 1 штриховкой.

Ответ:

при $|a| > \frac{2}{3}$ решений нет;

при $a = -\frac{2}{3}$ $x = 1$;

при $a \in \left(-\frac{2}{3}; 0\right]$ $x \in \left[-\frac{3}{2}a; 1\right]$;

при $a \in \left(0; \frac{2}{3}\right]$ $x \in \left[-\frac{3}{2}a; 0\right]$.

- **Пример 3.** Решить уравнение с параметром а:

  arcctg (x – 2a) = arctg (2x – a).
- Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}(x-2a)(2x-a)=1,\\ x-2a>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-5ax+2a^2-1=0,\\ x>2a.\end{cases}$$

Графиком квадратного трехчлена $\mathbf{f(x)=2x^2-5ax+2a^2-1}$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Поскольку f(2a) = – 1 < 0, то при любом а уравнение f(x) = 0 имеет ровно 2 корня, между которыми и заключено число 2a.

Поэтому только больший корень f(x) удовлетворяет условию x > 2a.

Это корень $x=\dfrac{5a+\sqrt{9a^2+8}}{4}.$

- **Ответ:** при любом а $x=\dfrac{5a+\sqrt{9a^2+8}}{4}.$

Список используемой литературы

1. Коломогоров «алгебра начало анализа»
2. Вельмушкина, Н. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции [Текст] / Н. Вельмушкина // Математика / Прил. к ПС, 2004. – №6. – С.26-27.
3. В.С. Крамор, П.А Михайлов " Тригонометрические функции ." Москва "Просвещение " 1983г.
4. В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович . " Практикум по решению математических задач. " Москва "Просвещение " 1984г.
5. А.П. Ершова , В. В. Голобородько " Алгебра . Начала анализа. " "ИЛЕКСА " Москва 2003г
6. Кожеуров, П.Я. Тригонометрия [Текст] / П.Я. Кожеуров. – М.: Физматгиз, 1963. – 320с.
7. Савин, А. Тригонометрия [Текст] / А. Савин // Квант, 1996. – №4.