



Обратные тригонометрические функции

Работу выполнила:

Ученица 10 А класса

МОУ «Гимназии №125»

Щепеткова Дарья

Рук. Чикрин Е.А.

Историческая справка

- Тригонометрические функции возникли впервые в связи с исследованиями в астрономии и геометрии. Соотношения отрезков в треугольнике и окружности, являющиеся по существу тригонометрическими функциями, встречаются уже в 3 в. до н. э. в работах математиков Древней Греции – [Евклида](#) Тригонометрические функции возникли впервые в связи с исследованиями в астрономии и геометрии. Соотношения отрезков в треугольнике и окружности, являющиеся по существу тригонометрическими функциями, встречаются уже в 3 в. до н. э. в работах математиков Древней Греции – Евклида, [Архимеда](#), Аполлония Пергского и других.
- В последующий период математика долгое время наиболее активно развивалась индийскими и арабскими учеными. В трудах по астрономии Ариабхаты появляется термин «ардхаджива». Позднее привилось более краткое название «джива», а при переводе математических терминов в XII в. Это слово было заменено латинским «*sinus*».
- Принципиальное значение имело составление Птолемеем первой таблицы синусов (долгое время она называлась таблицей хорд): появилось практическое средство решения ряда прикладных задач, и в первую очередь задач астрономии.
- Слово косинус – это сокращение латинского выражения «*complementy sinus*» (синус).
- Тангенсы возникли в связи с решением задачи об определении длины тени. Тангенс (а также котангенс, секанс и косеканс) введен в X веке Абу-л-Вафой, который составил и первые таблицы для нахождения тангенсов и котангенсов. Однако эти открытия долгое время оставались неизвестными европейским ученым, и тангенсы были заново открыты в XIV в. Т. Бравердином, а позже астрономом Региомontanом.
- Первым автором, который использовал специальные символы для обратных тригонометрических функций был, Бернулли. В 1729 и в 1736 годах он писал *as* и *at* соответственно вместо *arcsin* и *arctg*. Современные обозначения *arcsin* и *arctg* появляются в 1772 г. в работах венского математика Шерфера известного французского ученого Лагранжа. Приставка «*arc*» происходит от латинского «*arcus*» (лук, дуга), что вполне согласуется со смыслом понятия: *arcsin* x , например, – это угол

- Для тригонометрических функций $\sin a, \cos a, \operatorname{tg} a, \operatorname{ctg} a$ можно определить обратные функции (*круговые функции, аркфункции*). Они обозначаются соответственно $\operatorname{arccctg} a, \operatorname{arctg} a, \operatorname{arccos} a, \operatorname{arcsin} a$.

К обратным тригонометрическим функциям обычно относят шесть функций:

- **арксинус** (обозначение: arcsin)
- **арккосинус** (обозначение: arccos)
- **арктангенс** (обозначение: arctg ; в иностранной литературе arctan)
- **арккотангенс** (обозначение: arcctg ; в иностранной литературе arccot или $\operatorname{arccotan}$)
- **арксеканс** (обозначение: arcsec)
- **арккосеканс** (обозначение: $\operatorname{arccosec}$; в иностранной литературе arccsc)

Почему можно определить обратную тригонометрическую функцию.

Теорема о корне:

Пусть функция f возрастает (или убывает) на промежутке I , число a – любое из значений, принимаемых f на этом промежутке. Тогда уравнение $F(x)=a$ имеет единственный корень в промежутке I .

- На промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ монотонна, возрастает, т.е. принимает все значения от -1 до 1 ровно один раз, поэтому можно определить обратную функцию - $\arcsin x$.
- На промежутке $[0; \pi]$ функция $y = \cos x$ монотонна, убывает, т.е. принимает все значения от -1 до 1 ровно один раз, поэтому можно определить обратную тригонометрическую функцию.
- На интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $y = \operatorname{tg} x$ монотонна, возрастает и принимает все значения из \mathbb{R} ровно один раз, поэтому можно определить обратную тригонометрическую функцию.
- На интервале $(0; \pi)$ функция $y = \operatorname{ctg} x$ монотонна, убывает, принимает все значения из \mathbb{R} ровно один раз, поэтому мы можем определить обратную тригонометрическую функцию.

Арксинус $\angle \alpha$

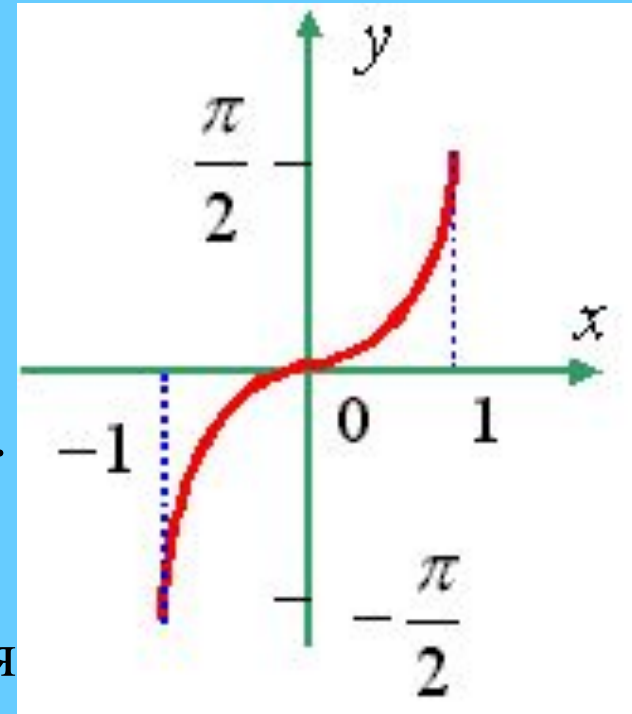
- Арксинус $\angle \alpha$ ($\arcsin a$)-угол из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a .

- Если $|a| \leq 1$, то

$$\arcsin a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = a \\ -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Функция $y = \arcsin x$ непрерывна и ограничена на всей своей числовой прямой. Функция $y = \arcsin x$ является строго возрастающей.

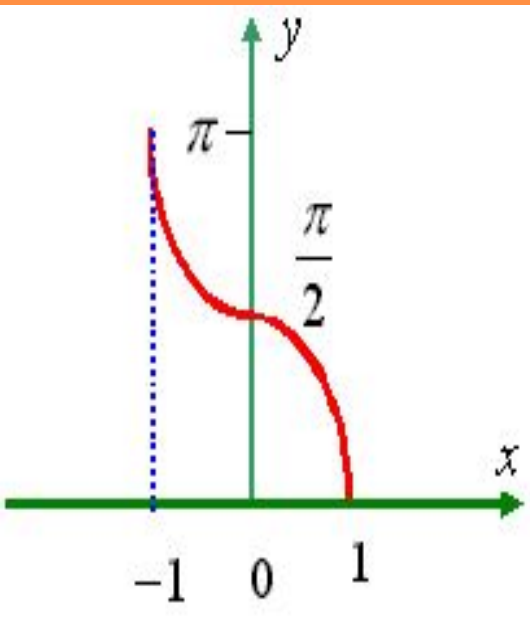
$$\boxed{\arcsin(-a) = -\arcsin a} \text{ -- функция нечетная}$$



Таким образом, $\arcsin a$, ($\arctg a$) - угол первой четверти, если a - положительно, и угол четвертой четверти, если a - отрицательно.

Арккосинус $\angle \alpha$

- Арккосинус $\angle \alpha$ ($\arccos a$)-*угол* из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен a .



- Если $|a| \leq 1$, то

$$\arccos a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = a \\ 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

- Функция $y = \arccos x$ непрерывна и ограничена на всей своей числовой прямой.
- Функция $y = \arccos x$ является строго убывающей.

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

- $\arccos a$ ($\arctg a$) - угол первой четверти, если a - положительно, и угол второй четверти, если a - отрицательно.

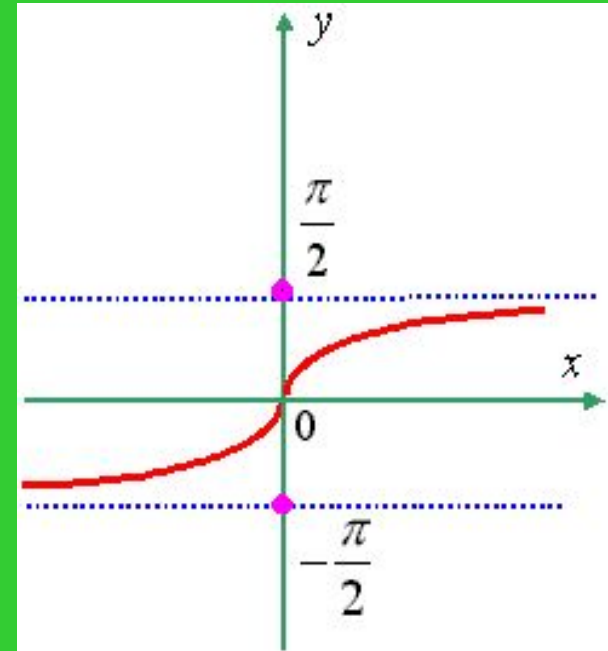
Арктангенс $\angle \alpha$

- Арктангенс $\angle \alpha$ ($\arctg a$)-угол из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a .

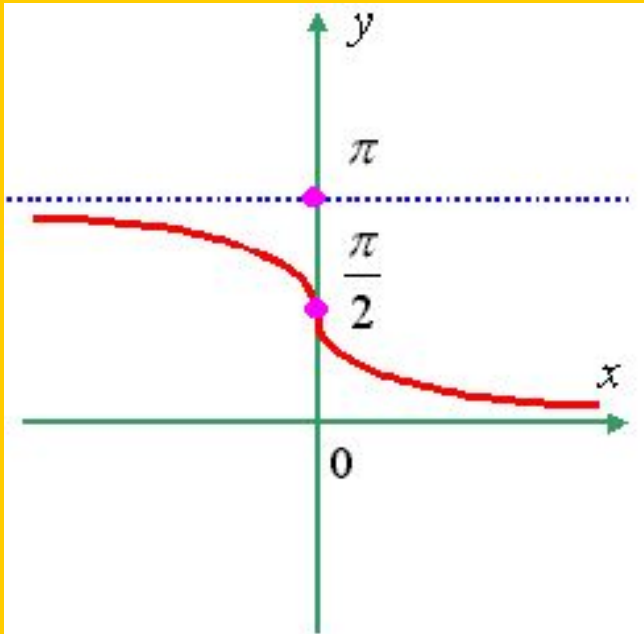
$$\arctg a = x \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = a \\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\arctg(-a) = -\arctg a$ - нечётная функция

- Функций $y = \arctg x$ непрерывна и ограничена на всей своей числовой прямой.
- Функция $y = \arctg x$ является строго возрастающей.



Арккотангенс $\angle a$



- Арккотангенс $\angle a$ ($\text{arcsctg } a$)-угол из интервала $(0; \pi)$ котангенс которого равен a .

$$\text{arcsctg } a = x \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ctg } x = a \\ 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$\text{arcsctg}(-a) = \pi - \text{arcsctg } a$$

- Функция $y = \text{arcsctg}$ непрерывна и ограничена на всей своей числовой прямой.
- Функция $y = \text{arcsctg}$ является строго убывающей.

Преобразований сумм обратных тригонометрических функций

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \arccos x \leq \pi$$

$$-\pi \leq -\arccos x \leq 0$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \arccos x \leq \frac{\pi}{2}$$

На промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция возрастает, т.е. каждое свое значение принимает ровно один раз, т.е. если на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\sin \varphi = \sin t \Rightarrow \sin(\arcsin x) = x \Rightarrow \varphi = t$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x \Rightarrow \arcsin x - \left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) =$$

$$\boxed{\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}}$$

Аналогично:

$$\boxed{\arctg a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}}$$

Уравнения и неравенства, левая и правая части которых являются одноименными обратными тригонометрическими функциями

Решение уравнений и неравенств, левая и правая части которых представляют собой одноименные обратные тригонометрические функции различных аргументов, основывается, прежде всего, на таком свойстве этих функций, как монотонность (функции $y = \arcsin t$ и $y = \operatorname{arctg} t$ монотонно возрастают, а функции $y = \arccos t$ и $y = \operatorname{arcctg} t$ монотонно убывают на своих областях определения). Поэтому справедливы следующие равносильные переходы.

$$a) \arcsin f(x) = \arcsin g(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |f(x)| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |g(x)| \leq 1; \end{cases}$$

$$b) \arcsin f(x) < \arcsin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) \geq -1, \\ g(x) \leq 1. \end{cases}$$

Замечание. Какой из двух равносильных систем пользоваться при решении уравнений 1а), зависит от того, какое неравенство проще: $|f(x)| \leq 1$ (тогда используем первую систему), или $|g(x)| \leq 1$ (в этом случае используем вторую систему).

Примеры

- **Пример 1.** Решить уравнение

$$\arcsin(3x^2 - 4x - 1) = \arcsin(x + 1)$$

Решение. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 3x^2 - 4x - 1 = x + 1, \\ |x + 1| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 5x - 2 = 0, \\ |x + 1| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \\ x - \frac{1}{3} \\ |x + 1| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Замечание. Решать неравенство, входящее в систему не обязательно. Достаточно проверить, удовлетворяют ли неравенству найденные корни уравнения.

- **Пример 2.** Решить неравенство $3\arcsin 2x < 1$.

Решение.

$$3\arcsin 2x < 1 \Leftrightarrow \arcsin 2x < \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \arcsin 2x < \arcsin \left(\sin \frac{1}{3} \right) \Leftrightarrow -1 \leq 2x < \sin \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \sin \frac{1}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \sin \frac{1}{3} \right).$$

||

$$\text{a) } \arccos f(x) = \arccos g(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |f(x)| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |g(x)| \leq 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \arccos f(x) < \arccos g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ g(x) \geq -1, \\ f(x) \leq 1. \end{cases}$$

Замечание. Какой из двух равносильных систем пользоваться при решении уравнений 2а), зависит от того, какое неравенство проще: $|f(x)| \leq 1$ (тогда используем первую систему), или $|g(x)| \leq 1$ (в этом случае используем вторую систему).

- Пример 3. Решить неравенство

$$\arccos(x^2 - 3) \leq \arccos(x + 3)$$

- Решение.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 \geq x + 3, \\ x + 3 \geq -1, \\ x^2 - 3 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0, \\ x^2 \leq 4, \\ x \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x - 3)(x + 2) \geq 0, \\ (x - 2)(x + 2) \leq 0, \\ x \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$

Ответ: $\{-2\}$.

- **Пример 4. Решить уравнение**

$$\arccos(4x^2 - 3x - 2) + \arccos(3x^2 - 8x - 4) = \pi$$

- **Решение.** Так как $\pi - \arccos t = \arccos(-t)$, то имеет место следующая цепочка равносильных преобразований:

$$\begin{aligned} \arccos(4x^2 - 3x - 2) &= \pi - \arccos(3x^2 - 8x - 4) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \arccos(4x^2 - 3x - 2) &= \arccos(-3x^2 + 8x + 4) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 3x - 2 = -3x^2 + 8x + 4, \\ |4x^2 - 3x - 2| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 - 11x - 6 = 0, \\ |4x^2 - 3x - 2| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{3}{7} \\ |4x^2 - 3x - 2| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{7}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{3}{7}\right\}$.

III

a) $\operatorname{arctg} f(x) = \operatorname{arctg} g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x);$

б) $\operatorname{arctg} f(x) \leq \operatorname{arctg} g(x) \Leftrightarrow f(x) \leq g(x).$

IV

a) $\operatorname{arcctg} f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x);$

б) $\operatorname{arcctg} f(x) \leq \operatorname{arcctg} g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x).$

- **Пример 5.** Решить неравенство

$$\operatorname{arcctg}(8x^2 - 6x - 1) \leq \operatorname{arcctg}(4x^2 - x + 8)$$

Решение. Неравенство равносильно следующему:

$$8x^2 - 6x - 1 \geq 4x^2 - x + 8 \Leftrightarrow 4x^2 - 5x - 9 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq \frac{9}{4} \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{9}{4}; +\infty\right)$.

Уравнения и неравенства, левая и правая части которых являются разноименными обратными тригонометрическими функциями

- При решении уравнений и неравенств, левая и правая части которых являются разноименными обратными тригонометрическими функциями, пользуются известными тригонометрическими тождествами. Рассуждения здесь могут быть примерно следующими. Пусть требуется решить уравнение $\arcsin f(x) = \arccos g(x)$. Предположим, что x_0 – решение этого уравнения.
- Обозначим $\arcsin f(x_0) = \arccos g(x_0)$ через a .
- Тогда $\sin a = f(x_0)$, $\cos a = g(x_0)$,

откуда
$$f^2(x_0) + g^2(x_0) = 1$$

- Итак, $\arcsin f(x) = \arccos g(x) \Leftrightarrow f^2(x) + g^2(x) = 1$ (1)

Рассуждая аналогично, можно получить следующие переходы:

$$(2) \quad \operatorname{arctg} f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Rightarrow f(x)g(x) = 1$$

(использована формула $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1$)

$$(3) \quad \operatorname{arcsin} f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Rightarrow f^2(x) = \frac{1}{g^2(x)+1}$$

(использована формула $\sin^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}$)

$$(4) \quad \operatorname{arctg} f(x) = \operatorname{arccos} g(x) \Rightarrow \frac{1}{f^2(x)+1} = g^2(x)$$

(использована формула $\cos^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$)

$$(5) \quad \operatorname{arcsin} f(x) = \operatorname{arctg} g(x) \Rightarrow f^2(x) = \frac{g^2(x)}{g^2(x)+1}$$

(использована формула $\sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$)

$$(6) \quad \operatorname{arccos} f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Rightarrow f^2(x) = \frac{g^2(x)}{g^2(x)+1}$$

(использована формула $\cos^2 \alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}$)

Замечание. Корнем каждого из уравнений (1)–(4) может быть только такое число x_0 , для которого

$$f(x_0) \geq 0 \quad \text{и} \quad g(x_0) \geq 0.$$

В противном случае множество значений левой и правой частей уравнения не пересекаются.

Примеры

Пример 6. Решить уравнение $\arccos \frac{7x+5}{13} = \arcsin \frac{4x+1}{13}$.

Решение.

$$\arccos \frac{7x+5}{13} = \arcsin \frac{4x+1}{13} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \left(\frac{7x+5}{13} \right)^2 + \left(\frac{4x+1}{13} \right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 65x^2 + 78x - 143 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{143}{65} \end{cases}$$

Корень $x = -\frac{143}{65}$ является посторонним.

Ответ: $\{1\}$.

Пример 7. Решить уравнение

$$\arcsin \frac{\sqrt{3x+2}}{2} = \operatorname{arccotg} \sqrt{\frac{2}{x+1}}.$$

• Решение.

$$\begin{aligned} \arcsin \frac{\sqrt{3x+2}}{2} = \operatorname{arccotg} \sqrt{\frac{2}{x+1}} &\stackrel{(4)}{\Rightarrow} \frac{3x+2}{4} = \frac{1}{1+\frac{2}{x+1}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x^2 + 7x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ x = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Корень $x = -2$ является посторонним.

Ответ: $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Пример 8. Решить уравнение $\operatorname{arctg}(2\sin x) = \operatorname{arcctg}(\cos x)$.

Решение.

$$\operatorname{arctg}(2\sin x) = \operatorname{arcctg}(\cos x) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} 2\sin x \cos x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n_1, n_1 \in \mathbf{Z} \\ x = \frac{5}{4}\pi + 2\pi n_2, n_2 \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Корни вида $x = \frac{5}{4}\pi + 2\pi n_2, n_2 \in \mathbf{Z}$ являются посторонними.

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{4} + 2\pi n_1 \mid n_1 \in \mathbf{Z} \right\}$.

- При решении неравенств, левая и правая части которых представляют собой разноименные обратные тригонометрические функции, целесообразно использовать метод интервалов, а в некоторых случаях учитывать свойства монотонных функций.

- Пример 9. Решить неравенство

$$\arcsin \frac{x+2}{5} < \arccos \frac{3x+1}{5}.$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \arcsin \frac{x+2}{5} - \arccos \frac{3x+1}{5}$$

и решим неравенство $f(x) \leq 0$ методом интервалов.

1) Найдем $D(f)$. Для этого решим систему

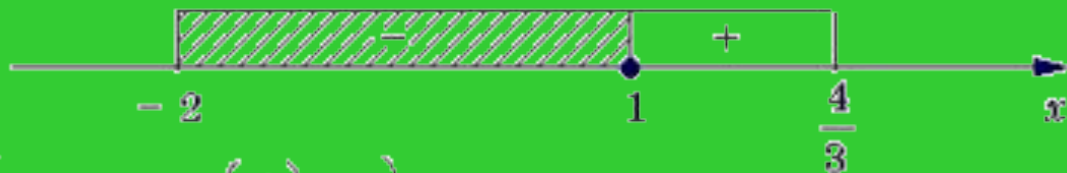
$$\begin{cases} \left| \frac{x+2}{5} \right| \leq 1, \\ \left| \frac{3x+1}{5} \right| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 \leq x \leq 3, \\ -2 \leq x \leq \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq \frac{4}{3}.$$

2) Найдем нули $f(x)$. Для этого решим уравнение

$$\begin{aligned} \arcsin \frac{x+2}{5} = \arccos \frac{3x+1}{5} &\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \left(\frac{x+2}{5} \right)^2 + \left(\frac{3x+1}{5} \right)^2 = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Корень $x = -2$ является посторонним

3) Решим неравенство $f(x) \leq 0$ методом интервалов.



$$\left(f(-2) < 0; f\left(\frac{4}{3}\right) > 0 \right).$$

Ответ: $[-2; 1]$.

Замечание 4. Заметим, что найдя корень уравнения $\frac{x+2}{5} = \arccos \frac{3x+1}{5}$,

можно было не обращаться к методу интервалов, а воспользоваться тем, что функция $y = \arcsin \frac{x+2}{5}$

является монотонно возрастающей, а функция $y = \arccos \frac{3x+1}{5}$

монотонно убывающей на отрезке $\left[-2; \frac{4}{3}\right]$. Поэтому решением исходного неравенства является промежуток $[-2; 1]$. Следует, однако, понимать, что

метод интервалов является более универсальным, – ведь его можно применять и в тех случаях, когда использование свойств монотонных функций не приводит к искомому результату.

- При решении уравнений и неравенств данного типа, содержащих параметры, становится актуальным вопрос о равносильности преобразований. Чтобы преобразования (1)–(4) сделать равносильными, следует учесть естественные ограничения, связанные с областями определения обратных тригонометрических функций и множествами их значений (см. замечание 3). Так, например,

$$\arcsin f(x) = \arcsin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(x) + g^2(x) = 1, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$$

$$\operatorname{arctg} f(x) = \operatorname{arctg} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) g(x) = 1, \\ f(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) g(x) = 1, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Замена переменной

- Некоторые уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции, можно свести к алгебраическим, сделав соответствующую замену переменной. При этом следует помнить о естественных ограничениях на вводимую переменную, связанных с ограниченностью обратных тригонометрических функций.

Пример 10. Решить уравнение $12\operatorname{arctg}^2 \frac{x}{2} = \pi \left(3\pi + 5\operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right)$.

Решение. Обозначим $\operatorname{arctg} \frac{x}{2}$ через t ; $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

После преобразований получим уравнение

$$12t^2 - 5\pi t - 3\pi^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{4}\pi \\ t = -\frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Поскольку $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, то $t = -\frac{\pi}{3}$,

откуда $\operatorname{arctg} \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -2\sqrt{3}$.

Ответ: $\{-2\sqrt{3}\}$.

Пример 11.

Решить неравенство $\arccos^2 x - 3\arccos x + 2 \geq 2$

Решение. Пусть $\arccos x = t$, $0 \leq t \leq \pi$. Тогда

Поскольку

$$0 \leq t \leq \pi, \text{ то } \begin{cases} 2 \leq t \leq \pi \\ 0 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

откуда
$$\begin{cases} 2 \leq \arccos x \leq \pi \\ 0 \leq \arccos x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq \cos 2 \\ \cos 1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Ответ: $[-1; \cos 2]$ И $[\cos 1; 1]$.

Иногда свести уравнение или неравенство к алгебраическому можно с помощью тождества

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (|x| \leq 1).$$

- **Пример 12.**

- Решить уравнение

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi^2}{18}.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующему:

$$\arcsin x \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x \right) = \frac{\pi^2}{18} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18\arcsin^2 x - 9\pi\arcsin x + \pi^2 = 0.$$

Пусть $\arcsin x = t$, $|t| \leq \frac{\pi}{2}$

$$18t^2 - 9\pi t + \pi^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{3} \\ t = \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Тогда

$$\text{Поэтому } \begin{cases} \arcsin x = \frac{\pi}{3} \\ \arcsin x = \frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

- **IV. Использование свойств монотонности и ограниченности обратных тригонометрических функций**
- Решение некоторых уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции, основывается исключительно на таких свойствах этих функций, как монотонность и ограниченность. При этом используются следующие теоремы.
- **Теорема 1.** Если функция $y = f(x)$ монотонна, то уравнение $f(x) = c$ ($c = \text{const}$) имеет не более одного решения.
- **Теорема 2.** Если функция $y = f(x)$ монотонно возрастает, а функция $y = g(x)$ монотонно убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного решения.
- **Теорема 3.** Если $\min_x f(x) = c = \max_x g(x)$ ($c = \text{const}$), то на множестве X уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе
$$\begin{cases} f(x) = c, \\ g(x) = c. \end{cases}$$

Пример 13. Решить уравнение $2\arcsin 2x = 3\arccos x$.

- **Решение.** Функция $y = 2\arcsin 2x$ является монотонно возрастающей, а функция $y = 3\arccos x$ – монотонно убывающей. Число $x = 0,5$ является, очевидно, корнем данного уравнения. В силу теоремы 2 этот корень – единственный.
- **Ответ:** $\{0,5\}$.

Пример 14. Решить уравнение $\operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + x} + \arcsin \sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{\pi}{2}$.

- **Решение.** Пусть $x^2 + x = t$. Тогда уравнение примет вид

$$\operatorname{arctg} \sqrt{t} + \arcsin \sqrt{t + 1} = \frac{\pi}{2}.$$

Функции $z = \sqrt{t}$, $z = \sqrt{t + 1}$, $y = \operatorname{arctg} z$ являются монотонно возрастающими.

Поэтому функция $y = \operatorname{arctg} \sqrt{t} + \arcsin \sqrt{t + 1}$ также является монотонно возрастающей. В силу теоремы 1 уравнение $\operatorname{arctg} \sqrt{t} + \arcsin \sqrt{t + 1} = \frac{\pi}{2}$ имеет не более одного корня. Очевидно, что $t = 0$ является корнем этого уравнения. Поэтому

$$x^2 + x = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1. \end{cases}$$

- **Ответ:** $\{-1; 0\}$.

Пример 15. Решить неравенство

$$\arccos x + \arccos x\sqrt{2} + \arccos x\sqrt{3} < \frac{3}{4}\pi.$$

- Решение.

Левая часть неравенства представляет собой монотонно убывающую на отрезке $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ функцию

$$f(x) = \arccos x + \arccos x\sqrt{2} + \arccos x\sqrt{3}.$$

Уравнение $f(x) = \frac{3}{4}\pi$ в силу теоремы 1 имеет не более одного корня. Очевидно, что $x = \frac{1}{2}$ – корень этого уравнения.

Поэтому решением неравенства является отрезок $\left[\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

$$f(x) = \frac{3}{4}\pi$$

- Ответ: $\left[\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

- **Пример 16.** Решить уравнение

$$\arcsin (x(x + y)) + \arcsin (y(x + y)) = \pi.$$

- Решение. Поскольку $\arcsin t < \frac{\pi}{2}$ при $|t| < 1$,

- то левая часть уравнения не превосходит $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$. Знак равенства возможен, лишь если каждое слагаемое левой части равно $\frac{\pi}{2}$. Таким образом, уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \arcsin (x(x + y)) = \frac{\pi}{2}, \\ \arcsin (y(x + y)) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x + y) = 1, \\ y(x + y) = 1. \end{cases}$$

Решение последней системы не представляет труда.

- *Ответ:* $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$

Уравнения и неравенства с параметрами.

Пример 1. Решить уравнение с параметром a :

$$\arcsin(ax^2 - ax + 1) + \arcsin x = 0.$$

- Решение. Уравнение равносильно уравнению

$$\arcsin(ax^2 - ax - 1) = -\arcsin x \Leftrightarrow$$

$$\arcsin(ax^2 - ax - 1) = \arcsin(-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 - ax - 1 = -x, \\ | -x | \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 - (a-1)x - 1 = 0, \\ | x | \leq 1. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

1) $a = 0$. В этом случае система примет вид: $\begin{cases} x - 1 = 0, \\ | x | \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

2) $a \neq 0$. В этом случае уравнение системы является квадратным. Его корни:

$$x_1 = 1 \text{ и } x_2 = -\frac{1}{a}.$$

Так как $|x| \leq 1$, то $\left| -\frac{1}{a} \right| \leq 1 \Leftrightarrow |a| \geq 1.$

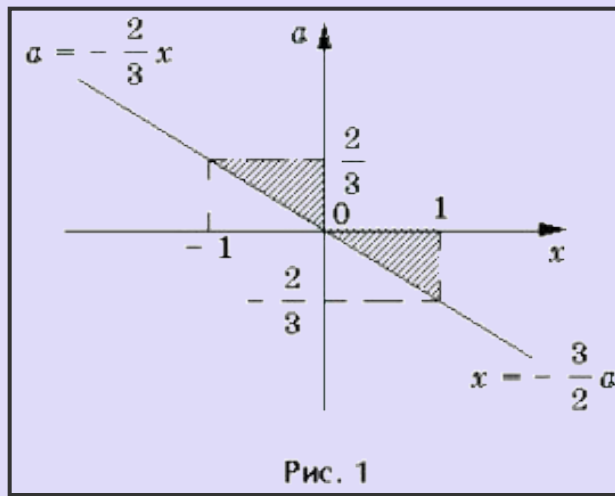
Если $a = -1$, то $x_2 = x_1 = 1$. Если $a \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$ то уравнение имеет два корня.

- Ответ:

$$a \in (-\infty; -1) \cup [1; \infty) \quad x = 1 \text{ и } x = -\frac{1}{a};$$

при $a = -1$ и $a = 0$ $x = 1$;

при прочих a решений нет.



• **Пример 2.** Решить неравенство с параметром a :
 $\arccos(3ax + 1) \leq \arccos(2x + 3a - 1)$.

• Решение. Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 3ax + 1 \geq 2x + 3a - 1, \\ 2x + 3a - 1 \geq -1, \\ 3ax + 1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3a - 2)x \geq 3a - 2, \\ x \geq -\frac{3}{2}a, \\ ax \leq 0. \end{cases}$$

Решать последнюю систему можно графо-аналитическим методом, учитывая то, что при $a > \frac{2}{3}$ первое неравенство системы равносильно неравенству $x \geq 1$, при $a < \frac{2}{3}$ – неравенству $x \leq 1$, при $a = \frac{2}{3}$ решением первого неравенства является любое действительное число. Множество всех точек $(x; a)$ плоскости Oxa , удовлетворяющих системе, показано на рис. 1 штриховкой.

Ответ:

при $|a| > \frac{2}{3}$ решений нет;
 при $a = -\frac{2}{3}$ $x = 1$;

при $a \in \left(-\frac{2}{3}; 0\right)$ $x \in \left[-\frac{3}{2}a; 1\right]$;

при $a \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$ $x \in \left[-\frac{3}{2}a; 0\right]$.

- **Пример 3.** Решить уравнение с параметром a :

$$\operatorname{arctg}(x - 2a) = \operatorname{arctg}(2x - a).$$

- Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (x - 2a)(2x - a) = 1, \\ x - 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5ax + 2a^2 - 1 = 0, \\ x > 2a. \end{cases}$$

Графиком квадратного трехчлена $f(x) = 2x^2 - 5ax + 2a^2 - 1$

является парабола, ветви которой направлены вверх. Поскольку $f(2a) = -1 < 0$, то при любом a уравнение $f(x) = 0$ имеет ровно 2 корня, между которыми и заключено число $2a$.

Поэтому только больший корень $f(x)$ удовлетворяет условию $x > 2a$.

Это корень
$$x = \frac{5a + \sqrt{9a^2 + 8}}{4}.$$

- **Ответ:** при любом a
$$x = \frac{5a + \sqrt{9a^2 + 8}}{4}.$$

Список используемой литературы

1. Коломогоров «алгебра начало анализа»
2. Вельмушкина, Н. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции [Текст] / Н. Вельмушкина // Математика / Прил. к ПС, 2004. – №6. – С.26-27.
3. В.С. Крамор, П.А Михайлов " Тригонометрические функции ." Москва "Просвещение " 1983г.
4. В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович . " Практикум по решению математических задач. " Москва "Просвещение " 1984г.
5. А.П. Ершова , В. В. Голобородько " Алгебра . Начала анализа. " "ИЛЕКСА " Москва 2003г
6. Кожеуров, П.Я. Тригонометрия [Текст] / П.Я. Кожеуров. – М.: Физматгиз, 1963. – 320с.
7. Савин, А. Тригонометрия [Текст] / А. Савин // Квант, 1996. – №4.