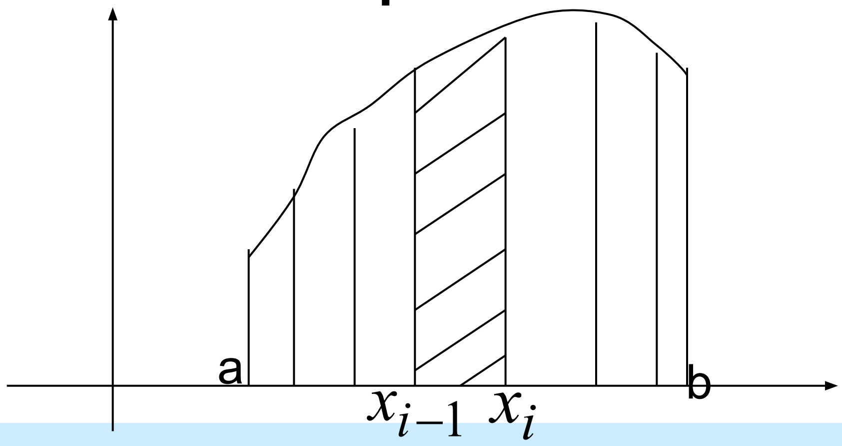
Определенный интеграл

Задача о вычислении площади плоской фигуры

Решим задачу о вычислении площади фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, отрезками прямых $x = a$, $x = b$ и осью Ох.Такую фигуру называют криволинейной трапецией



Задача о вычислении площади плоской фигуры

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей точками $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n = b$.

При этом криволинейная трапеция разобьется на n элементарных криволинейных трапеций. Заменим каждую такую криволинейную трапецию прямоугольником с основанием $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, где $i = 1,2,..,n$ и высотой $h = f\left(\overline{x_i}\right)$, где $\overline{x_i}$ -произвольно выбранная внутри отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ точка.

ВГУЭС

Задача о вычислении площади плоской фигуры

Площадь прямоугольника будет равна $\Delta S_i = f\left(\overline{x_i}\right)\Delta x_i$, а площадь всей криволинейной фигуры приблизительно будет равна сумме площадей всех прямоугольников:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}\right)\Delta x_i \ .$$

Определенный интеграл

Определение.

Выражение $\sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}\right)\Delta x_i$, где

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, называется

интегральной суммой функции $f(x)$

на отрезке $[a,b]$.

Определенный интеграл

Определение.

Если существует конечный $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}\right)\Delta x_i$, не зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части, ни от выбора точек $\overline{x_i} \in [x_{i-1}, x_i]$, то этот предел называется определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Определенный интеграл

Замечание.

С геометрической точки зрения

при $f(x) \geq 0$ $\int_a^b f(x)dx$ равен

площади криволинейной трапеции

Теорема о существовании определенного интеграла

Теорема.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$ существует и конечен, т.е.

существует и конечен $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$;

2. $\int_a^b dx = b - a$;

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

4. $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$;

Свойства определенного интеграла

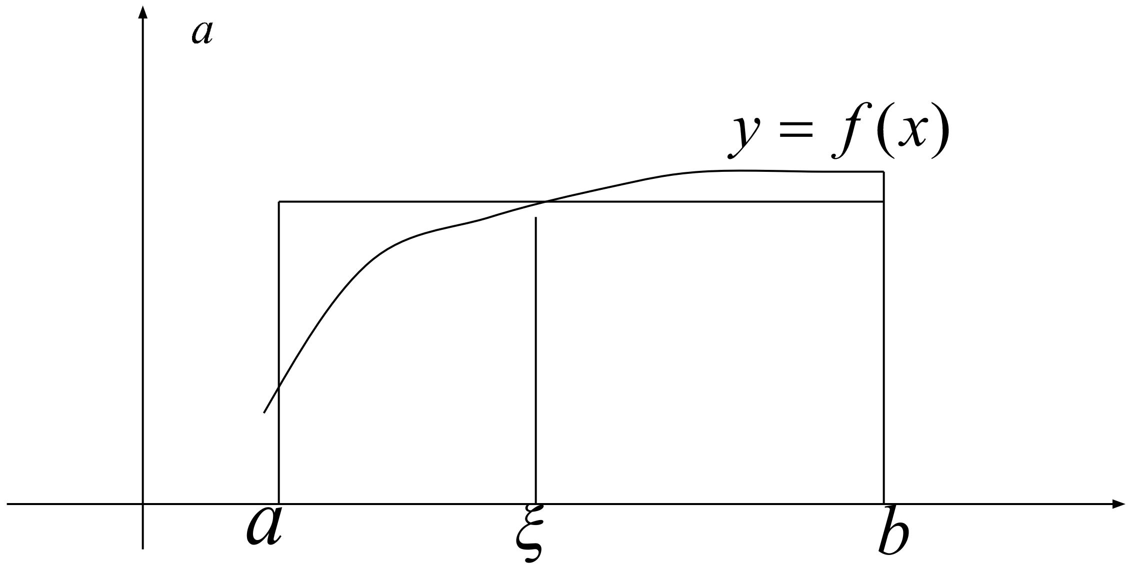
5. $\int\limits_a^b Kf(x)dx = K\int\limits_a^b f(x)dx$;

6. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$;

7. $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$, если $f(x) \geq 0$.

Теорема о среднем

Если функция непрерывна на $[a,b]$, то существует такая точка $\xi \in [a,b]$, что $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$



Вычисление определенного интеграла

Теорема.

Пусть $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Эту формулу называют формулой Ньютона-Лейбница, из которой следует, что для вычисления определенного интеграла необходимо найти первообразную подынтегральной функции.

Пример

Вычислить $\int\limits_0^3 e^{-\frac{x}{3}}dx$.

$$\int\limits_0^3 e^{-\frac{x}{3}}dx = \int\limits_0^3 e^{-\frac{1}{3}\cdot x}dx = -3e^{-\frac{1}{3}\cdot x}\Bigg|_0^3 = -3\left(e^{-\frac{1}{3}\cdot 3} - e^{-\frac{1}{3}\cdot 0}\right) =$$

$$= -3\left(e^{-1} - 1\right) = -3\left(\frac{1}{e} - 1\right) = -3\,\frac{1-e}{e}$$

Вычисление интеграла

Теорема (Замена переменной в определенном интеграле).

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, а функция $x=\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha,\beta]$, причем $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\ .$$

Пример

$$\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x+1} = t \\ x+1 = t^2 \\ x = t^2 - 1,\, dx = 2tdt \\ x = 0,\, t = 1 \\ x = 3,\, t = 2 \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{t^2 - 1}{t} 2tdt =$$

$$= \int_1^2 2\left(t^2 - 1\right)dt = 2\int_1^2 \left(t^2 - 1\right)dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_1^2 = 2\left[\left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right] =$$

$$= 2\left(\frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1\right) = 2\left(\frac{7}{3} - 1\right) = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

Теорема (Интегрирование по частям в определенном интеграле).

Если функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ и их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b u\,dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du .$$

Пример

$$\int_1^e \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{vmatrix} = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \frac{dx}{x} =$$

$$= x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = e \ln e - \ln 1 - x \Big|_1^e = e - e + 1 = 1$$

Несобственный интеграл

Замечание.

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ не является определенным интегралом.

Считается по определению, что

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$. Если этот предел

конечен, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, называемый

несобственным, сходится.

Если же этот предел не является конечным, то интеграл расходится.

Пример

. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+4}$$

(или установить его расходимость)

. $$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} \ln(x^2+4)\Big|_0^b =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}(\ln(b^2+4) - \ln 4) = \infty$$

Этот несобственный интеграл расходится.

Пример

Несобственный интеграл

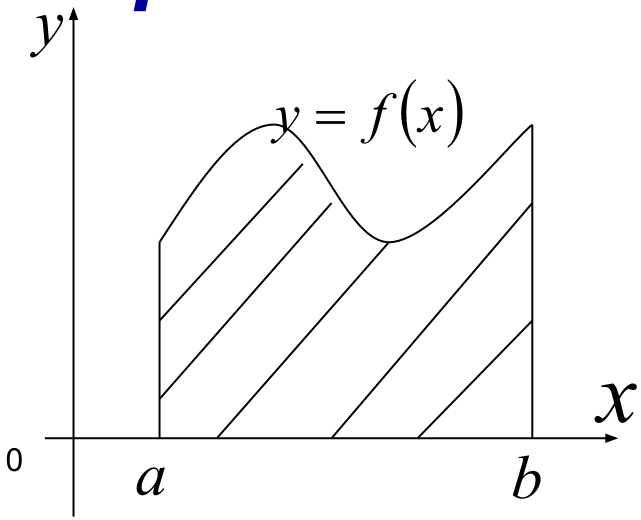
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2} arctg \frac{b}{2} = \frac{1}{2} arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2\cdot 2} = \frac{\pi}{4}$$

Геометрические приложения определенного интеграла

Вычисление площадей

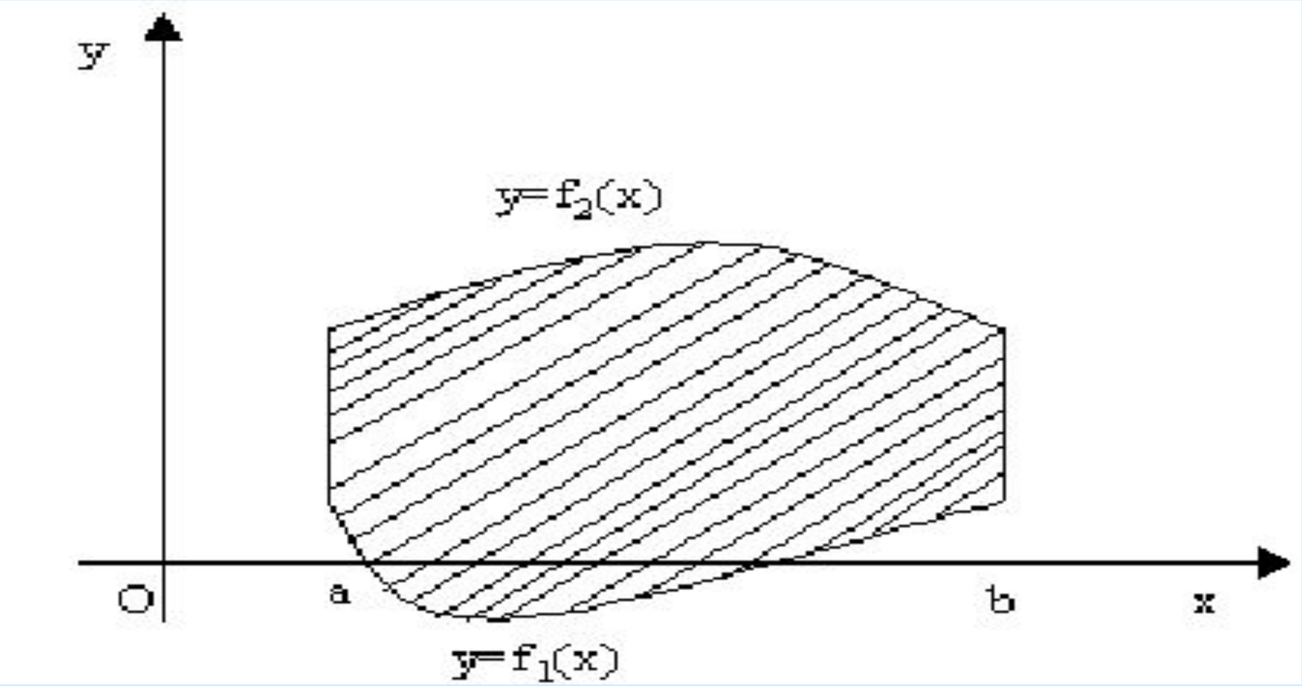
Площадь фигуры в декартовых координатах.



Площадь такой фигуры, называемой криволинейной трапецией, вычисляют по формуле $S = \int_a^b f(x)dx$.

Вычисление площадей

Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $f_1(x) \le f_2(x)$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ определяется по формуле $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$



Вычисление площадей

В случае ***параметрического задания кривой***, площадь фигуры, ограниченной прямыми $x = a, x = b$, осью Ох и кривой

$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$ вычисляют по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)dt,$$

где пределы интегрирования определяют из уравнений

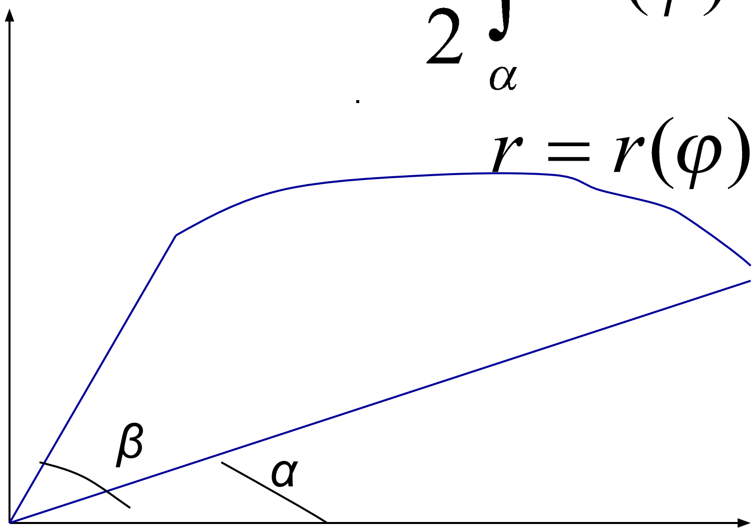
$$a = \varphi(t_1), b = \varphi(t_2).$$

Вычисление площадей

Площадь полярного сектора вычисляют по формуле

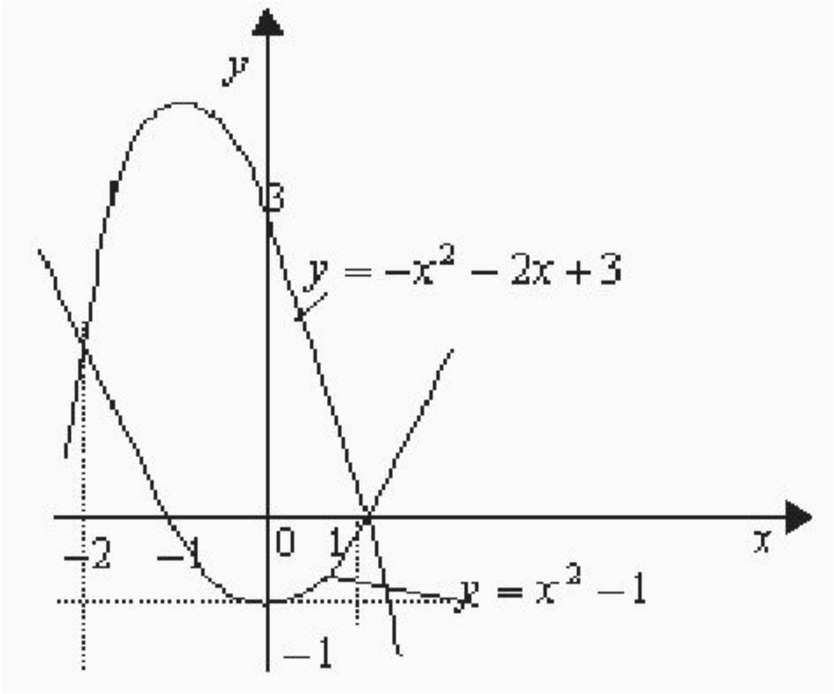
$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi$$

$$r = r(\varphi)$$



Примеры

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 - 2x + 3$ и $y = x^2 - 1$



Продолжение

Получим

$$S = \int_{-2}^{1}\left[\left(-x^2 - 2x + 3\right) - \left(x^2 - 1\right)\right]dx = \int_{-2}^{1}\left(-2x^2 - 2x + 4\right)dx =$$

$$= -2\int_{-2}^{1}\left(x^2 + x - 2\right)dx = -2\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= -2\left[\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) - \left(-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4\right)\right] = -2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + \frac{8}{3} - 6\right) =$$

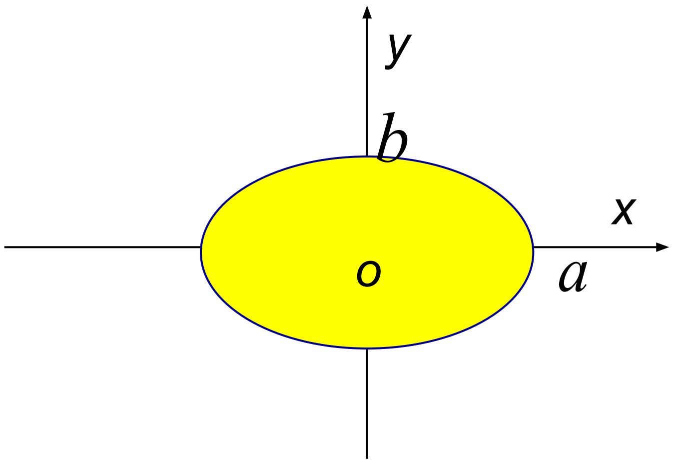
$$= -2\left(3 - 8 + \frac{1}{2}\right) = -2\left(-\frac{9}{2}\right) = 9$$

Примеры

Найти площадь эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

Параметрические уравнения эллипса

$x = a\cos t,\ y = b\sin t.$



$$S = 4\int_{\pi/2}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt =$$

$$= 4ab\int_{0}^{\pi/2}\sin^2 t dt = 4ab\int_{0}^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}4ab(t-\frac{1}{2}\sin 2t)_{0}^{\pi/2} = 2ab\frac{\pi}{2} = \pi ab.$$

Пример

Площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ и лежащей вне круга радиуса $r = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} a^2 \cos 2\varphi d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} \frac{a^2}{2} d\varphi = \left(\frac{1}{4}a^2 \sin 2\varphi - \frac{1}{4}a^2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/6} =$$

$$= \frac{1}{4}a^2\left(\sin\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{a^2}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{a^2}{8}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$S = \frac{a^2}{2}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$

Вычисление длины дуги

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то длина ее дуги

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt,$$

где t_1, t_2 –значения параметра, соответствующие концам дуги .

Длина дуги в декартовых координатах

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$, где *a, b*–абсциссы начала и конца дуги $(a < b)$.

Если кривая задана уравнением $x = g(y)$, то $l = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2}\, dy$, где *c, d*–ординаты начала и конца дуги $(c < d)$

Длина дуги в полярных координатах

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, то

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi$$

,

где α, β –значения полярного угла, соответствующие концам дуги .

Примеры

Вычислить длину дуги кривой $y=\sqrt{x^3}$ от точки $O(0,0)$ до $B(4,8)$.

$$y'=\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

, тогда

$$l=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx=\frac{4}{9}\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}d\left(1+\frac{9}{4}x\right)=$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$$

Вычисление объема тела вращения.

Объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, отрезком оси абсцисс $a \le x \le b$ и прямыми $x = a, x = b$, вычисляется по формуле $V_x = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$.

Вычисление объема тела вращения

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривой $x = g(y)$, отрезком оси ординат $c \le y \le d$ и прямыми $y = c, y = d$, вычисляется по формуле

$$V_y = \pi \int_c^d (g(y))^2 \, dy \quad .$$

Вычисление объема тела вращения

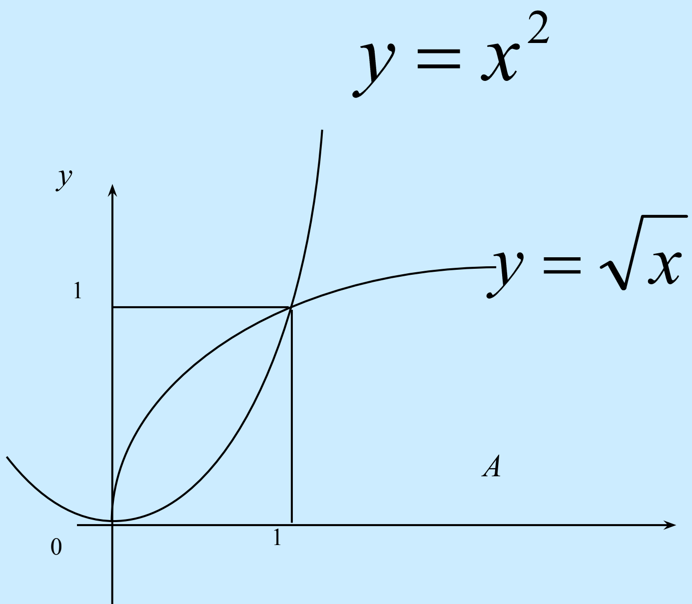


Рис. 14

Искомый объем можно найти как разность объемов, полученных вращением вокруг оси *Ox* криволинейных трапеций, ограниченных линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$

Решение

Тогда $$V_x = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx - \pi \int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx =$$

$$= \pi \int_0^1 x dx - \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 - \pi \cdot \frac{x^5}{5}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$$