

Основные тригонометрические формулы

Подготовила ученица 10 класса: Панькина Диана
Учитель: Малянов Иван Иванович
Сосновская СОШ 2012 г.

Основные формулы тригонометрии и их свойства

Дадим определения тригонометрическим функциям синуса, косинуса, тангенса и котангенса. Возьмем любой прямоугольный треугольник. Из курса геометрии мы знаем, что у него есть два катета и гипотенуза, причем угол между двумя катетами прямой - то есть равен 90° , или $\pi/2$ радиан.

Рассмотрим угол α , который образован одним из катетов и гипотенузой.

Из определений тригонометрических функций сразу же следуют **тригонометрические тождества:**

Синусом угла α называется отношение длин противолежащего катета к гипотенузе.

Косинусом угла α называется отношение длин прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенсом угла α называется отношение длин противолежащего катета к прилежащему.

Котангенсом угла α называется отношение длин прилежащего катета к противолежащему.

**А это основные
тригонометрические формулы,
которыми пользуются учащиеся
во время решения
тригонометрических задач.**



Связь между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Тригонометрические функции двойного и половинного аргумента

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2\operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

Формулы, что выражают тригонометрические функции через тангенс половинного угла

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

Тригонометрические функции суммы и разности углов

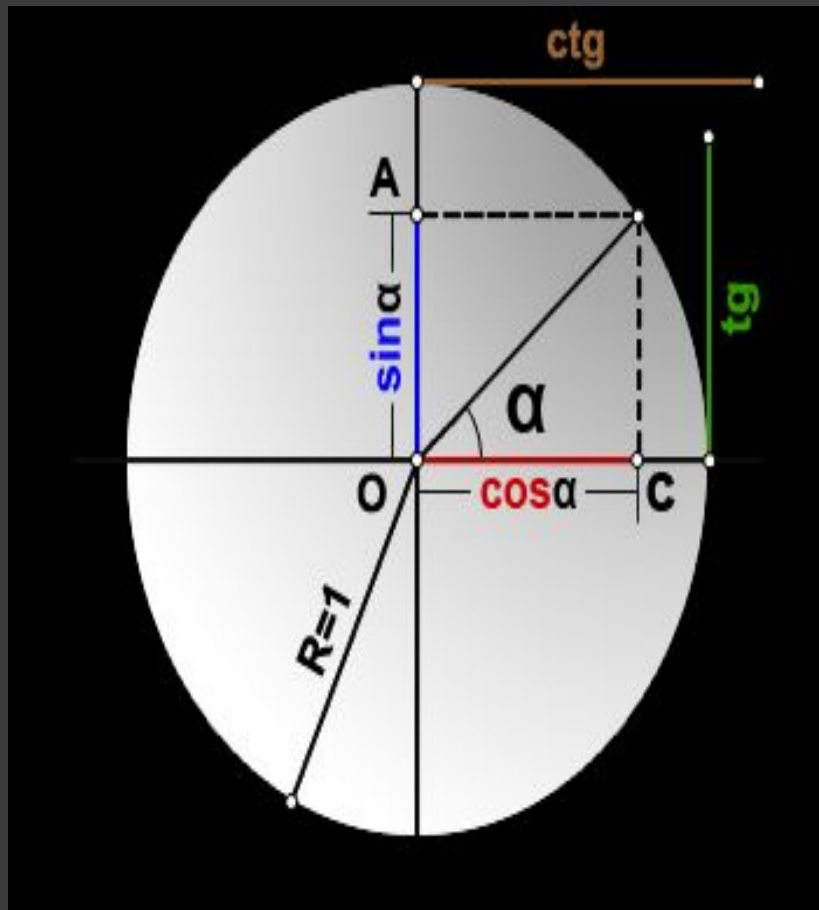
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}$$

Значения синуса, косинуса, тангенса, котангенса



$$\begin{aligned}\sin(\alpha) &= OA \\ \cos(\alpha) &= OC \\ \text{tg}(\alpha) &= DE \\ \text{ctg}(\alpha) &= MK \\ R = OB &= 1\end{aligned}$$

Пример решения тригонометрического уравнения при помощи тригонометрической формулы

Пример 1. $\sin 3x = \sin x$.

Решение. Перенесем $\sin x$ в левую часть уравнения и полученную разность преобразуем в произведение. $\sin 3x - \sin x = 0$; $2\sin x \cdot \cos 2x = 0$.

Из условия равенства нулю произведения получим два простейших уравнения.

$$\sin x = 0 \text{ или } \cos 2x = 0.$$

$$x_1 = \pi n, n \in \mathbb{Z}, x_2 = \pi/4 + \pi n/2, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x_1 = \pi n, n \in \mathbb{Z}, x_2 = \pi/4 + \pi n/2, n \in \mathbb{Z}$.