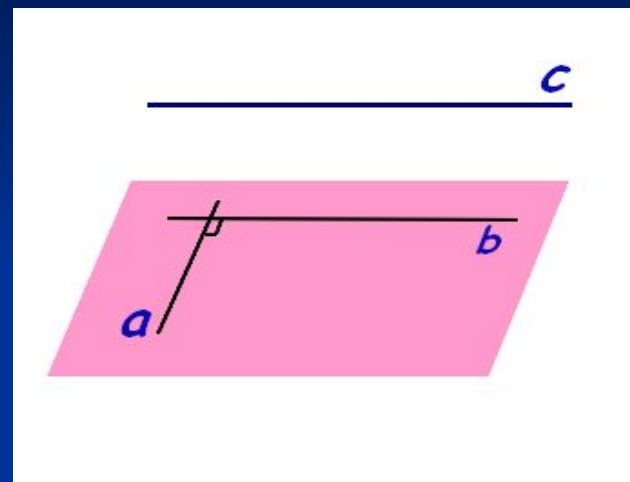


# Перпендикулярность прямой и плоскости

# Перпендикулярные прямые в пространстве

*Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен  $90^\circ$ . Перпендикулярность прямых  $a$  и  $b$  обозначается так:  $a \perp b$ . Перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися.*



На этом рисунке перпендикулярные прямые  $a$  и  $b$  пересекаются, а перпендикулярные прямые  $a$  и  $c$  скрещивающиеся

## Лемма

*Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к этой прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой*

Дано:  $a \parallel b$  и  $a \perp c$ .

Доказать:  $b \perp c$ .

Доказательство:

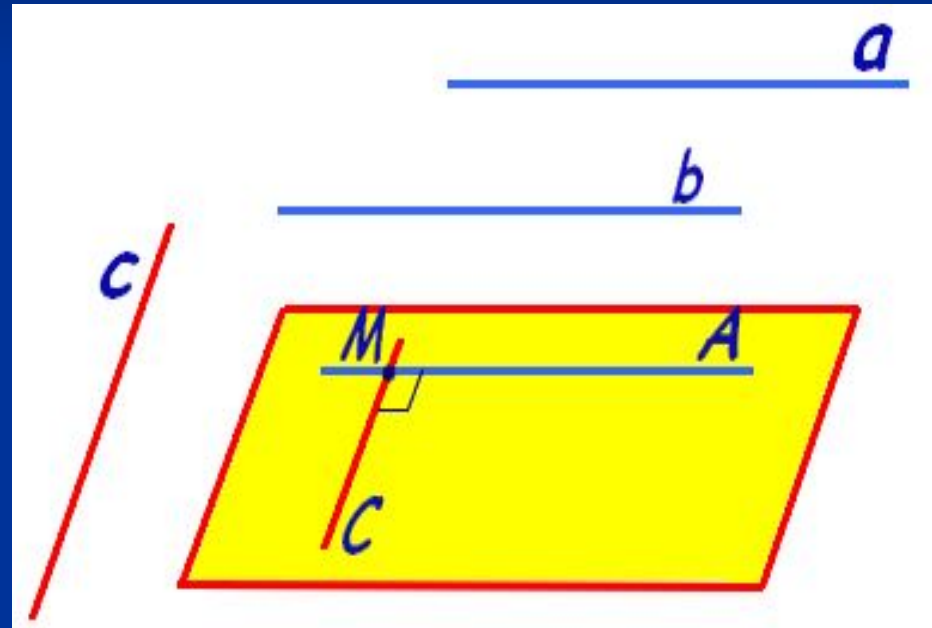
Через произвольную точку  $M$  пространства, не лежащую на данных прямых, проведём прямые  $a$  и  $c$ . Т.к.  $a \perp c$ , то  $\angle AMC = 90^\circ$

Т.к.  $a \parallel b$ ,  $a \parallel MA$ , то  $b \parallel MA$ .

Итак,  $b \parallel MA$ ,  $c \parallel MC$ ,

$\angle AMC = 90^\circ$ , т. е.  $b \perp c$ .

Лемма доказана.

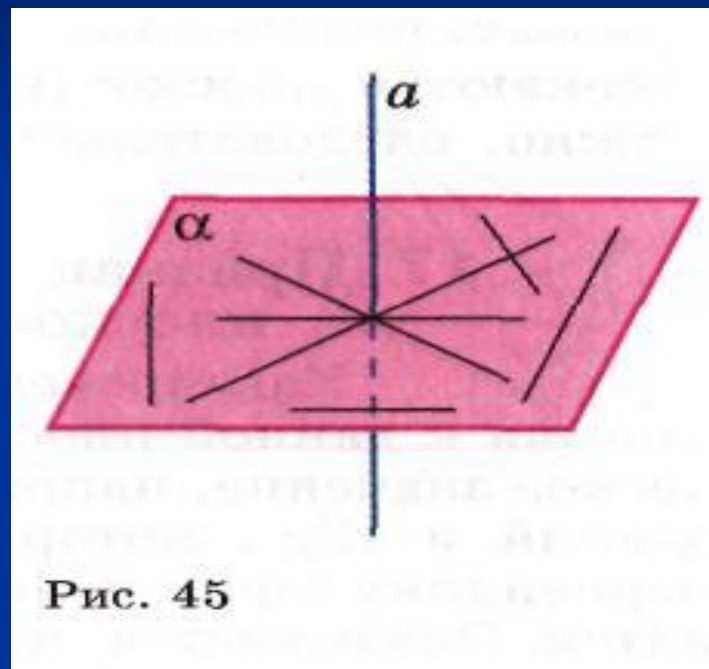


# Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости

Прямая называется *перпендикулярной к плоскости*, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Перпендикулярность прямой  $a$  и плоскости  $\alpha$  обозначается так:

$$a \perp \alpha.$$



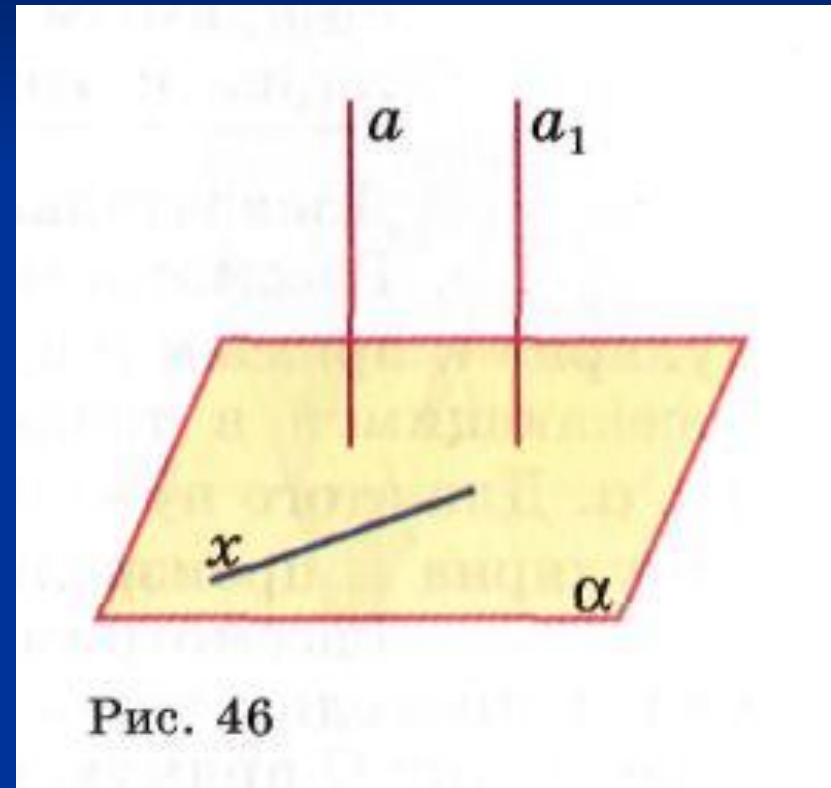
**Теорема:** Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

*Дано:*  $a \parallel a_1$ ,  $a \perp \alpha$ .

*Доказать:*  $a_1 \perp \alpha$

*Доказательство:*

Проведем какую-нибудь прямую  $x$  в плоскости  $\alpha$ . Так как  $a$  перпендикулярна  $\alpha$ , то  $a$  перпендикулярна  $x$ . По лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей  $a_1$  перпендикулярна  $x$ . Таким образом, прямая  $a_1$  перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости  $\alpha$ , т. е.  $a_1$  перпендикулярна  $\alpha$ . Теорема доказана.



# Теорема: Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

Дано:  $a \perp \alpha, b \perp \alpha$  (а)

Доказать:  $a \parallel b$ .

Доказательство:

Через какую-нибудь точку  $M$  прямой  $b$  проведем прямую  $b_1$ , параллельную прямой  $a$ . По предыдущей теореме  $b_1 \perp \alpha$ . Докажем, что прямая  $b_1$  совпадает с прямой  $b$ . Тем самым будет доказано, что  $a \parallel b$ . Допустим, что прямые  $b$  и  $b_1$  не совпадают. Тогда в плоскости  $\beta$ , содержащей прямые  $b$  и  $b_1$ , через точку  $M$  проходят две прямые, перпендикулярные к прямой  $c$ , по которой пересекаются плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  (б). Но это невозможно, следовательно,  $a \parallel b$ . Теорема доказана.

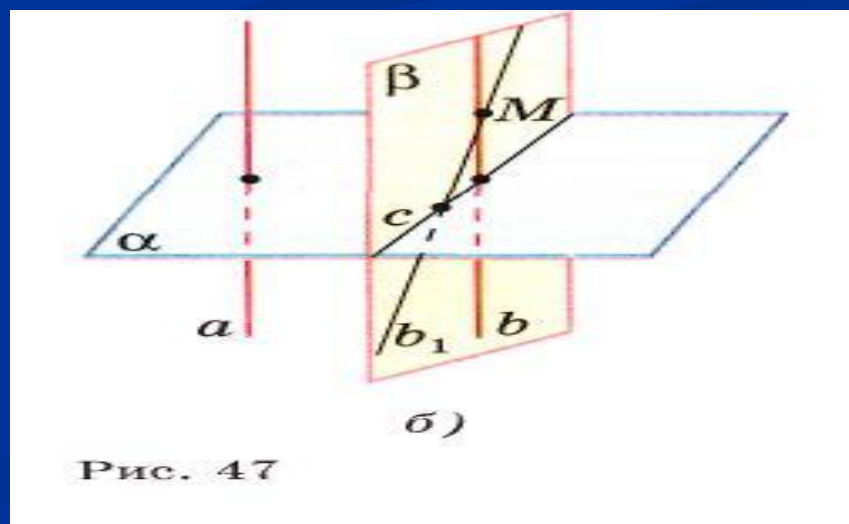
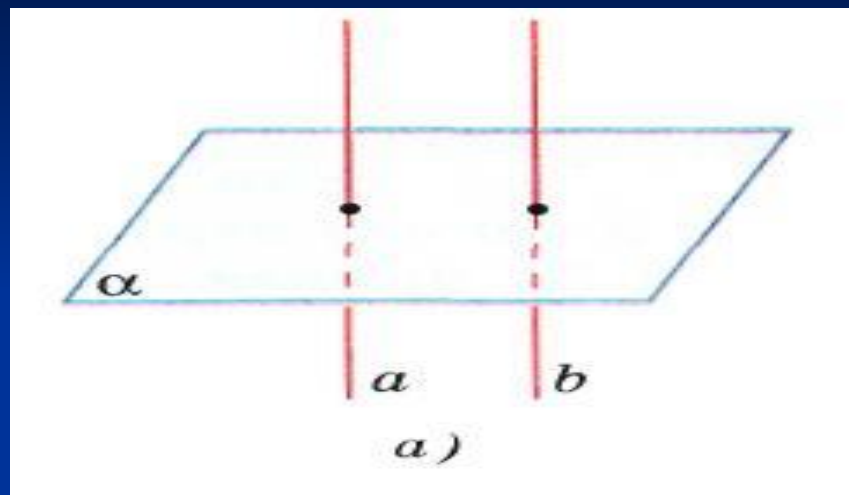


Рис. 47

# Признак перпендикулярности прямой и плоскости

**Теорема:** Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Дано:  $a \perp p$ ,  $a \perp q$ ,  $p$  и  $q$  лежат в плоскости  $\alpha$ .

$p \cap q = O$ . Доказать:  $a \perp \alpha$

**Доказательство:**

Рассмотрим случай, когда прямая  $a$  проходит через т.  $O$  (рис. а).

Проведём через т.  $O$  прямую  $l$ , параллельную прямой  $m$ .

Отметим на прямой  $a$  точки  $A$  и  $B$ , чтобы  $AO=OB$ , и проведём в плоскости  $\alpha$  прямую, пересекающие прямые  $p$ ,  $q$ , и  $l$  соответственно в т.  $P$ ,  $Q$ , и  $L$ .

Т.к.  $p$  и  $q$  – серединные перпендикуляры к отрезку  $AB$ , то  $AP=BP$  и  $AQ=BQ$ . Следовательно,  $\triangle APQ = \triangle BPQ$  по трём сторонам, поэтому углы  $APQ$  и  $BPQ$  равны

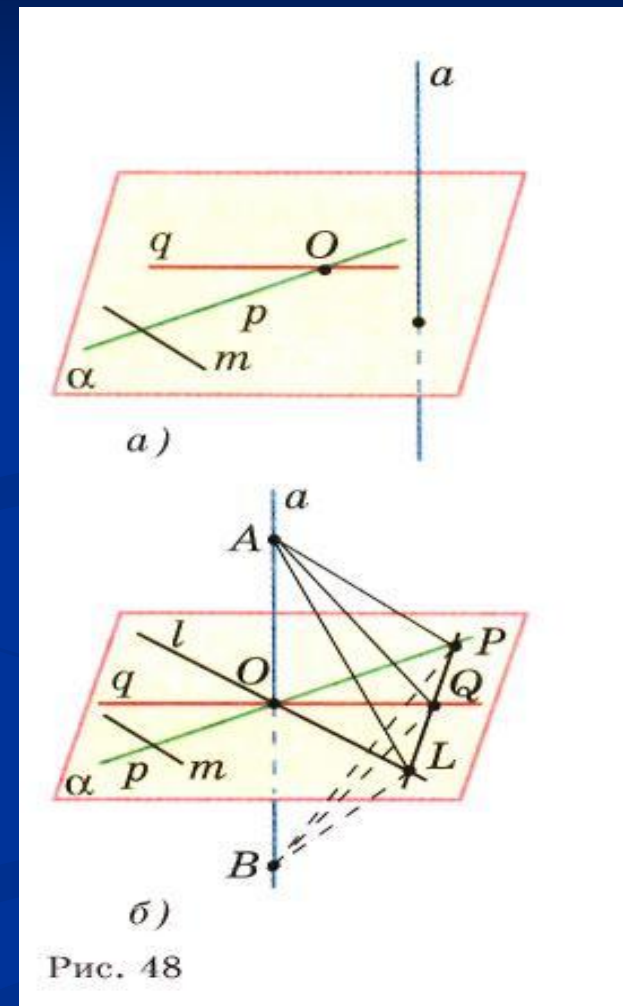
$\triangle APQ = \triangle BPQ$ , поэтому  $AL=BL$ . Следовательно  $\triangle ABL$  – равнобедренный и  $l \perp a$ . Т.к.  $l \parallel m$ ,  $l \perp a$ , то  $m \perp a$ . Итак  $a \perp \alpha$ .

Рассмотрим случай, когда прямая  $a$  не проходит через т.  $O$ .

Проведём через т.  $O$  прямую  $a_1$ ,  $a_1 \parallel a$ . По лемме

$a_1 \perp p$  и  $a_1 \perp q$ , поэтому  $a_1 \perp \alpha$ . Отсюда,  $a \perp \alpha$ .

Теорема доказана.



# Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости

**Теорема:** Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости и притом только одна.

**Доказательство:** Данную плоскость обозначим  $\alpha$ , а произвольную точку пространства — буквой  $M$ . **Докажем:** 1) через точку  $M$  проходит прямая, перпендикулярная к плоскости  $\alpha$ ; 2) такая прямая только одна.

1) Проведем в плоскости  $\alpha$  произвольную прямую  $a$  и рассмотрим плоскость  $\beta$ , проходящую через точку  $M$  и перпендикулярную к прямой  $a$ . Обозначим буквой  $b$  прямую, по которой пересекаются плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ . В плоскости  $\beta$  через точку  $M$  проведем прямую  $c$ , перпендикулярную к прямой  $b$ . Прямая  $c$  и есть искомая прямая. В самом деле, она перпендикулярна к плоскости  $\alpha$ , т.к. перпендикулярна к двум пересекающимся прямым этой плоскости ( $c \perp b$  по построению и  $c \perp a$ , так как  $\beta \perp \alpha$ ).

2) Предположим, что через точку  $M$  проходит еще одна прямая (обозначим ее через  $c_1$ ), перпендикулярная к плоскости  $\alpha$ . Тогда  $c_1 \parallel c$ , что невозможно, т.к. прямые  $c_1$  и  $c$  пересекаются в точке  $M$ . Т.о., через точку  $M$  проходит только одна прямая, перпендикулярная плоскости  $\alpha$ . Теорема доказана.

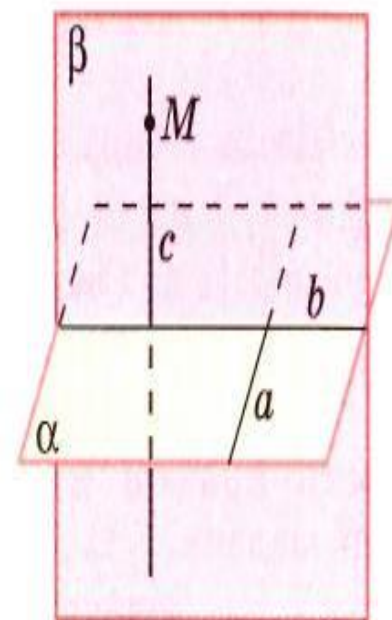


Рис. 50



# Авторы:

Александрова Аня 10Б

Васильева Катя 10Б

Васильева Надя 10Б

Гаврилова Настя 10Б

Егорова Люда 10Б

Научный консультант : учитель математики  
СОШ №6 г.Чебоксары  
Маркова З.Г.

2008г