



Прикладные задачи на экстремумы.



Введение.

В мире не происходит ничего, в чем не был бы
виден смысл какого-нибудь максимума или
минимума. *Л. Эйлер.*



Введение.

Решая некоторые задачи, я встретил такие понятия, как «наибольшее значение», «наименьшее значение», «выгодное», «наилучшее», и меня заинтересовало решение таких задач. Оказывается, что в математике исследование задач на максимум и минимум началось очень давно – двадцать пять веков назад. Долгое время к задачам на отыскание экстремумов (с лат. «экстремум» – «крайний») не было единых подходов.



Введение.

Но примерно триста лет назад – были созданы первые общие методы решения и исследования задач на экстремумы. Тогда же выяснилось, что некоторые специальные задачи оптимизации играют очень важную роль в естествознании. Задачи на максимум и минимум на протяжении всей истории математики играли важную роль в развитии этой науки.



Введение.

За всё это время накопилось большое число красивых, важных, ярких и интересных задач в геометрии алгебре и других науках. В решении конкретных задач принимали участие крупнейшие учёные прошлых эпох: Евклид, Архимед, Аполлоний, Герон, Торричелли, Иоганн и Якоб Бернулли, Исаак Ньютон и многие другие. Решение конкретных задач стимулировало развитие теории, и в итоге были выработаны приёмы, позволяющие единым методом решать задачи самой разнообразной природы.



Введение.

В алгебре экстремальные задачи встречаются в темах: «Линейная функция», «Рациональные дроби», «Неравенства», «Системы линейных уравнений и неравенств», «Квадратичная функция», «Последовательности и арифметическая прогрессия». На примере нескольких задач я расскажу о нахождении наибольшего и наименьшего значения в темах «Линейная функция», «Системы линейных неравенств и уравнений», «Рациональные дроби», «Квадратичная функция» и «Геометрия».



Линейная функция.

Наиболее простые, но не менее интересные задачи на экстремумы встречаются в теме «Линейная функция». Вот одна из них:

Имеются ящики, в которые нужно упаковать 78 самоваров. Одни ящики вмещают 3 самовара, другие – 5 самоваров. Какое наименьшее количество ящиков нужно использовать, чтобы упаковать все самовары (недогрузка не допускается)?



Линейная функция.

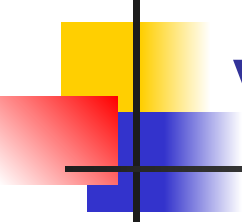
Решение: Обозначим количество одних ящиков через x , а других – через y . Тогда условие задачи даёт неопределённое уравнение вида $3x+5y=78$. Пары чисел $(26; 0)$, $(21; 3)$, $(16; 6)$, $(11; 9)$, $(6; 12)$, $(1; 15)$ являются решениями данного уравнения. $(1; 15)$ – оптимальное решение задачи.

Ответ: нужно использовать 16 ящиков.



Системы линейных уравнений и неравенств.

На соревнованиях каждый стрелок делал 10 выстрелов. За каждое попадание он получал 5 очков, за каждый промах снималось 2 очка. Победителем считался тот, кто набрал не менее 30 очков. Сколько раз стрелок должен был попасть в мишень, чтобы быть в числе победителей?



Системы линейных уравнений и неравенств.

Решение: Обозначив число попаданий через x , число промахов – через y , получим неравенство $5x - 2y \geq 30$. Составим систему

$$\begin{cases} 5x - 2y \geq 30, & 5x - 20 \leq 2x \geq 30, & x > 7, \\ x + y = 10; & y = 10 - x; & y < 3. \end{cases}$$

Решив систему получаем, что $x = \{8, 9, 10\}$; $y = \{2, 1, 0\}$. $(8; 2)$ – оптимальное решение.

Ответ: наименьшее число попаданий – 8.



Рациональные дроби.

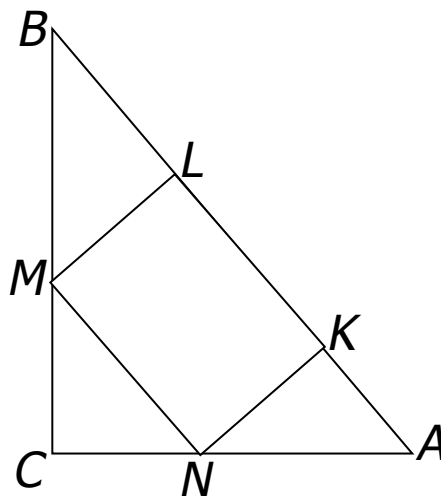
На автомобиле новые шины. Шина на заднем колесе выдерживает пробег в 24000 км, а шина на переднем колесе – в 16000 км. Какой максимальный путь можно совершить на этих шинах?

Решение: Износ шины на заднем колесе будет равен $1/16000$ км, а износ шины на переднем колесе – $1/24000$ км. Износ шин на обоих колёсах равен: $1/16000 + 1/24000 = 1/9600$.

Максимальный путь равен $1/(1/9600) \cdot 2 = 19200$ (км).

Квадратичная функция.

А вот геометрическая задача на составление квадратичной функции: В прямоугольный треугольник с гипотенузой 16 см и углом 60° вписан прямоугольник, основание которого лежит на гипотенузе. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?





Квадратичная функция.

Решение: $AB=16$ см. $NK:KA=\operatorname{tg}60^0=\sqrt{3}$. По свойству пропорции получаем: $KA=x\sqrt{3}/3$. Треугольник ABC подобен треугольнику MVL по двум углам. Составим отношение между сторонами треугольников: $VL:BC=ML:AC$. По теореме Пифагора $BC=8\sqrt{3}$. Находим, что $VL=x\sqrt{3}$. $KL=16-4x\sqrt{3}/3$. Площадь прямоугольника находим по формуле:

$$S=x(16-4\sqrt{3}x/3)=-4\sqrt{3}x^2/3+16x=-4\sqrt{3}/3(x-2\sqrt{3})^2+16\sqrt{3}$$

Площадь будет наибольшей при $x=2\sqrt{3}$. Значит, $KL=16(4\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}):3=8$ (см). Ответ: $2\sqrt{3}$ см



Метод оценки.

Некоторые задачи на экстремумы решаются методом оценки. В методе оценки следует коснуться неравенства Коши для нескольких переменных:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n) / n.$$

На одном из предприятий стоимость x деталей, изготовленных рабочим сверхурочно, определяется по формуле $y = 0,1x^2 + 0,5x + 2$. Определите количество деталей, при котором себестоимость одной детали была бы наименьшей.



Метод оценки.

Решение: Найдём среднее арифметическое для $0,1x^2$, $0,5x$ и 2 : $(0,1x^2 + 0,5x + 2)/x = 0,5 + 0,1x + 2/x$. Из трёх величин одна постоянная ($0,5$), а две другие – переменные. Среднее геометрическое для переменных $0,1x$ и $2/x$ равно $\sqrt{0,2}$. Используя неравенство Коши для двух переменных получаем: $0,5 + (2/x + 0,1x) \geq 0,5 + 2\sqrt{0,8}$; $0,5 + (2/x + 0,1x) \geq 0,5 + \sqrt{0,8}$. Левая часть неравенства принимает наименьшее значение равное $0,5 + \sqrt{0,8}$.



Метод оценки.

Решаем уравнение $0,1x^2 - \sqrt{0,8}x + 2 = 0$;
 $D = 0,8 - 0,8 = 0$; $x = \sqrt{0,8}/0,2 = \sqrt{20}$. Но так как x – это количество деталей, то $x = 4$ или $x = 5$.

Ответ: 4 или 5 деталей.



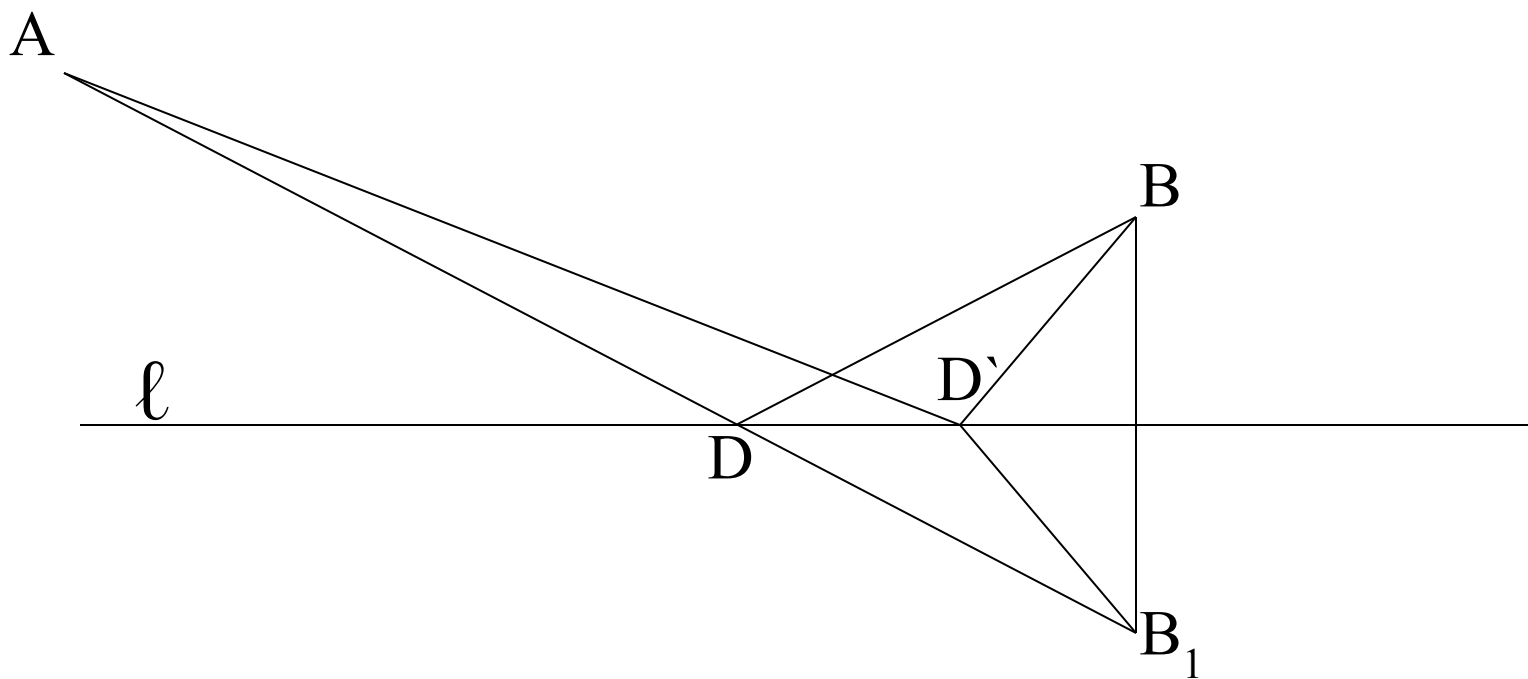
Геометрия.

Основу задач по геометрии на максимум и минимум составляют задачи на преобразование плоскости. Основной задачей является старинная задача, написанная в I веке до н. э. Вот как она звучит:

Даны две точки A и B по одну сторону от прямой ℓ . Требуется найти на ℓ такую точку D , чтобы сумма расстояний от A до D и от B до D была наименьшей.



Геометрия.





Геометрия.

Решение: Пусть точка B_1 – точка, симметричная точке B относительно прямой ℓ . Соединим A с B_1 . Тогда точка D пересечения AB_1 с прямой ℓ – искомая. Действительно, для любой точки D' , отличной от D , имеет место неравенство: $AD' + D'B_1 > AB_1$ (т.к. в треугольнике сумма двух сторон больше третьей стороны); $AD' + D'B > AD + DB$.



Заключение.

Я коснулся только нескольких задач на экстремумы, так как задачи на экстремумы встречаются в природе, сельском хозяйстве, в различных областях промышленности. Большое число задач оптимизации возникает в космонавтике, химической промышленности и технике. Это задачи управления технологическими процессами, приборами и системами. Траектории света и радиоволн, движения маятников и планет, течения и многие другие движения являются решениями некоторых задач на максимум и минимум.