Решение диофантовых уравнений

Работу подготовили учащиеся 9 класса
МОУ СОШ №3 городского округа
город Мантурово
Соколов Илья Викторович,
Соколов Дмитрий Викторович.
Руководитель:
Малышева Светлана Юрьевна,
учитель математики высшей категории

Содержание.

- Цели и задачи.
- Биография Диофанта
- Диофантовы уравнения с одной неизвестной
- Диофантовые уравнения первой степени
- Диофантовые уравнения высших степеней
- Другие методы решения диофантовых уравнений

Цели и задачи.

- Цели : научиться находить решения неопределенного диофантового уравнения, если это решение имеется.
- Для достижения наших целей, были поставлены следующие задачи:

1) Изучить литературу о Диофанте, и о диофантовых уравнениях.

2) Понять, как решаются диофантовые уравнения.

3) Найти различные методы их решеня.

4) Систематизировать материал.

5) Выступить с ним на научной конференции.

Биография Диофанта.

Нам неизвестно, кем был Диофант, точные года его жизни. На могиле Диофанта есть стихотворение-загадка, решая которую нетрудно подсчитать, что Диофант прожил 84 года. О времени жизни Диофанта мы можем судить по работам французского исследователя науки Поля Таннри, и это, вероятно, середина III в.н.э.

Наиболее интересным представляется творчество Диофанта. «Труды его подобны сверкающему огню среди полной непроницаемой тьмы». [Стройк] До нас дошло 7 книг из 13, которые были объединены в «Арифметику». Стиль и содержание этих книг резко отличаются от классических античных сочинений по теории чисел и алгебре, образцы которых мы знаем по «Началам» Евклида, леммам из сочинений Архимеда и Аполлония. «Арифметика», несомненно, явилась результатом многочисленных исследований, многие из которых остались нам неизвестны. Мы можем только гадать о её корнях и изумляться богатству и красоте её методов и результатов.

«Арифметика» Диофанта – это сборник задач (их всего 189), каждая из которых снабжена решением и необходимым пояснением. В собрание входят весьма разнообразные задачи, а их решение часто в высшей степени остроумно. Диофант практиковался в нахождении решений неопределенных уравнений вида , или систем таких уравнений. Типично для Диофанта, что его интересуют только положительные целые и рациональные решения. Иррациональные решения он называет «невозможными» и тщательно подбирает коэффициенты так, чтобы получились искомые положительные, рациональные решения. Поэтому, обычно, произвольное неопределенное уравнение (но, как правило, все-таки с целыми коэффициентами) получает титул "диофантово", если хотят подчеркнуть, что его требуется решить в целых числах.

Диофантовы уравнения с одной не известной.

В дальнейшем нам потребуются следующие определения

Определение 1. Диофантовым уравнением 1-ой степени (линейным) с n неизвестными называется уравнение вида $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b$,

где все коэффициенты и неизвестные – целые числа и хотя бы одно $a_i\neq0$.

Для сокращения записи условимся далее сокращать фразу линейное диофантово уравнение, как ЛДУ.

Определение 2. Решением ЛДУ называется упорядоченная n - ка целых чисел ((x_1, x_2 … ,x_n)) , такая, что $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b$.

Нашей целью будет научиться находить решения неопределенного уравнения первой степени, если это решение имеется.

Для этого, необходимо ответить на следующие вопросы:

1). Всегда ли ЛДУ имеет решений, найти условия существования решения.

2). Имеется ли алгоритм, позволяющий отыскать решение ЛДУ.

Рассмотрим уравнение

$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x_n = 0$, (2) где a_j Є Z ($j = 0,\ldots,n$), $a_n \neq 0$.

Покажем, каким образом можно определить все рациональные корни уравнения (2 Покажем, каким образом можно определить все рациональные корни уравнения (2) (этот метод позволяет, в частности, решать уравнения вида (2) в целых числах). Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $a_0 \neq 0$. Пусть r - рациональный корень уравнения (2), $r = pq$, где p Є Z, q Є N*, (p, q) = 1. Умножая обе части равенства $a_0 + a_1 p/q + \ldots + a_n (p/q)^n = 0$,

на q^n, получим

$a_0 q^n + a_1 p * q^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p^{n-1} q + a_n p^n = 0$,

следовательно,

$pa_0 q^n$ и $qa_n p^n$.(3)Так как (p,q) = 1, то (p,q^n) = 1, (q,p^n) = 1, поэтому из соотношений (3) следует, что pa_0, qa_n.

Поскольку рациональных чисел вида r = p/q, таких что (p,q) = 1, pa_0, qa_n, конечное число, то за конечное число шагов можно выбрать те из них, которые являются решением уравнения (2, конечное число, то за конечное число шагов можно выбрать те из них, которые являются решением уравнения (2). Как следует из приведенных выше рассуждений, других решений уравнение (2) иметь не может.

Диофантовы уравнения первой степени.

Перейдем теперь к решению в целых числах уравнений первой степени или так называемых линейных уравнений, т. е. уравнений вида
$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$,(6)где $a_j \in Z$ ($j = 1,2,\ldots,n$), $b \in Z$.
Предположим, что не все числа a_j ($j = 1,\ldots,n$) равны нулю. Очевидно, для существования решения в целых числах уравнения (6) необходимо, чтобы $(a_1,\ldots,a_n)b$. Покажем, что это условие является и достаточным.
Положив перейдем к равносильному

уравнению $a_1'x_1 + \ldots + a_n'x_n = b'$ (7), где $(a_1', \ldots, a_n') = 1$. Пусть a_i' a_j'- два ненулевых числа, таких, что $|a_i'| \neq |a_j'|$. Для определенности предположим, что $i < j$, $|a_i'| > |a_j'|$. Разделив с остатком a_i' на a_j', получим представление $a_i' = a_j'q + r$. Заменив a_i'на $a_j'q + r$ в уравнении (7), приведем его к виду
$a_1' x_1 + \ldots + rx_i + \ldots + a_j'(x_j + qx_i) + \ldots + a_n'x_n = b'$. (8) Перепишем

уравнение (8) в виде a_k', $k \neq i$ x_k, $k \neq j$,

$a_1''x_1 + \ldots + a_n''x_n'' = b'$, (9), где $a_k'' =$ $x_k'' =$
. r, $k \neq i$ $x_{j+} q x_j$, $k = j$,

Очевидно, что решения уравнения (7Очевидно, что решения уравнения (7) и (9Очевидно, что решения уравнения (7) и (9). связаны между собой взаимно однозначным соответствием и, таким образом, решив уравнение (9Очевидно, что р∈шения уравнения (7) и (9). связаны между собой взаимно однозначным соответствием и, таким образом, решив уравнение (9), несложно найти все решения уравнения (7). С другой стороны отметим, что □ k, i $\{1,\dots,n\}$, $k \neq i$

$a_k'' = a_k'$, $|a_i''| < |a_i'|$.

Отметим также, что

$(a_1'', \dots, a_n'') = (a_1', \dots, a_i' - a_{j\cdot}'q, \dots, a_n') = (a_1', \dots, a_n') = 1.$.

Следовательно, за конечное число шагов уравнение (7) приведется к виду $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b'$ (**10**), где числа ($i = 1,\dots,n$), которые не равны нулю, равны между собой по абсолютной величине. Из соотношения следует, что числа ($i = 1,\dots,n$) могут принимать только значения 0,±1, причем не все из них равны нулю. Предположим, для определенности, . Тогда уравнение (10) имеет следующее решение:

где $t_2, t_3, \dots, t$ - произвольные целые числа. Отсюда, учитывая проведенные замены, получается и решение уравнения (7- произвольные целые числа. Отсюда, учитывая проведенные замены, получается и решение уравнения (7). Отметим, что при получении решения уравнения (10) использовался лишь факт, что , поэтому, при выполнении алгоритма

Диофантовы уравнения высших степеней.

1. Метод разложения на множители

Доказать: что уравнение $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 30$ не имеет решений в целых числах.

Решение:

Разложив левую часть на множители, приведем уравнение к виду $(x - y)(y - z)(z - x) = 10$.

Заметим, что $(x - y) + (y - z) + (z - x) = 0$. С другой стороны, делителями 10 являются числа ±1, ±2, ±5, ±10. Нетрудно проверить, что сумма любых трех чисел из этого множества, дающих в произведении 10, не будет равняться 0.

2. Использование четности

Доказать, что уравнение $x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz = 0$, (13)
в целых числах не имеет решений, не равных нулю одновременно.
Решение:
Предположим, что числа x, y, z, не равные одновременно нулю, являются решением исходного уравнения. Видно, что число x - четное. Подстановка $x = 2x1$ дает
$$4x_1^3 + y^3 + 2z^3 - 6x_1yz = 0.$$
Отсюда следует, что число y - четное, $y = 2y1$. Учитывая это, получим
$$2x_1^3 + 4y_1^3 + z^3 - 6x_1y_1z = 0.$$
Следовательно, z - также четное число. После подстановки $z = 2z1$ уравнение принимает вид
$$x_1^3 + 2y_1^3 + 4z_1^3 - 6x_1y_1z_1 = 0.$$
Рассуждая аналогично, доказывается, что для любого n N
$2^n | x$, $2^n | y$, $2^n | z$. Противоречие.

Другие методы решения диофантовых уравнений

Задача:

Доказать, что уравнение

$x^3 + y^3 + z^3 = 2$

имеет бесконечно много решений в целых числах.

Решение:

Положим $x = a + b$, $y = a - b$. Тогда $x^3 + y^3 = 2a^3 + 6ab^2$. С учетом последнего равенства исходное уравнение принимает вид

$2a^3 + 6ab^2 + z^3 = 2$.

Положив $a = 1$, получим $z^3 = -6b^2$. Положим теперь $b = 6t^3$. Отсюда $z = -6t^2$, $x = 1 + 6t^3$, $y = 1 - 6t^3$. Таким образом, получено бесконечное множество решений исходного уравнения, соответствующих целочисленным значениям параметра t

$\in$

Задача:

Доказать, что уравнение

$X^2 - 2y^2 = 1$ (14) имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

Решение:

Нетрудно заметить, что (3,2) - одно из решений исходного уравнения. С другой стороны из тождества

$(x^2 + 2y^2)^2 - 2(2xy)^2 = (x2 - 2y2)2$

следует, что если (x, y) - решение уравнения (14), то пара $(x2 + 2y2, 2xy)$ также является его решением. Используя этот факт, рекуррентно определим бесконечную последовательность (xn, yn) различных решений исходного уравнения:

$(x_1, y_1) = (3,2)$ и $x_n+1 = x_n^2 + 2y_n^2$, $y_n+1 = 2x_ny_n$, n $\in$ N

Задача:

Доказать, что уравнение

$x(x + 1) = 4y(y + 1)$

неразрешимо в целых положительных числах.

Решение:

Нетрудно заметить, что исходное уравнение равносильно уравнению

$x^2 + x + 1 = (2y + 1)^2$.

Следовательно, $x^2 < (2y + 1)^2 < (x + 1)^2$ или $x < 2y + 1 < x + 1$.

Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Задача: решить в целых числах уравнение.

Решение:

Заметим, что слагаемые в левой части уравнения имеют одинаковый знак, а поскольку их сумма положительна, то каждое слагаемое также положительно. Применяя неравенство Коши, получим

Следовательно, $xyz = 1$. Отсюда получим, что решениями могут быть только тройки (1,1,1), (1,-1,-1), (-1,-1,1), (-1,1,-1). Проверкой убеждаемся, что каждая из них действительно является решением исходного уравнения.

Задача: Доказать, что уравнение

не имеет решений в целых положительных числах.

Решение:

Положим $d = (x, y)$, $x_1 = x/d$, $y_1 = y/d$. Так как

$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$,

следовательно,

$x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2 = d^2x_1^2y_1^2$. (15)Отсюда получаем, что

$x_1 | y_1$, $y_1 | x_1$.

Учитывая, что $(x_1, y_1) = 1$, делаем вывод, что $x_1 = y_1 = 1$. Таким образом, уравнение (15) принимает вид

$d2 = 3$,

Отсюда следует требуемое утверждение.

Задача:
Доказать, что уравнение
$x^2 + 1 = py$,
где p - простое число вида 4k+3, неразрешимо в целых числах.
Решение:
Предположим, что исходное уравнение разрешимо в целых числах. Тогда
$x^2 + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$.
Но, согласно малой теореме Ферма,
$-1 \equiv (-1)^{2k+1} \equiv (x2)^{2k+1} \equiv x^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$.
Полученное противоречие доказывает неразрешимость исходного уравнения в Z.

Задача: решить в целых числах уравнение
$2x3 + xy - 7 = 0$.
Решение:
Из условия следует, что x должен быть делителем числа 7. Т. е. возможные значения x находятся среди чисел {±1, ±7}. Перебрав эти возможности, получаем решение уравнения: (1,5), (-1,-9), (7,-97), (-7,-99