

*Фестиваль исследовательских и творческих  
работ «Портфолио» 2005-2006*

**Проектная работа по алгебре  
«Решение иррациональных  
уравнений»**

Выполнил: ученик 10 «А» класса  
Морозов Иван

МОУ «Средняя общеобразовательная  
школа №108» г.Трёхгорного  
Челябинской области

В данной работе рассматриваются иррациональные уравнения, а также приёмы их решения, которые будут полезны любым ученикам, особенно для подготовки к ЕГЭ!

С помощью данной работы вы сможете улучшить свои знания по алгебре!

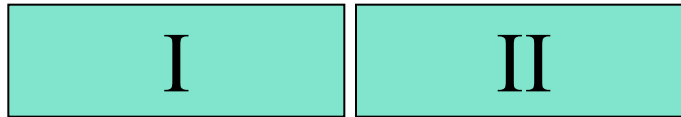
[Меню](#)

# Меню

Применение свойств квадратного корня.



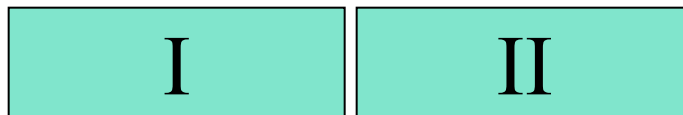
Уравнения содержащие радикал третьей степени.



Введение новой переменной.



Решения, основанные на применении свойств функции.



$$\sqrt{x^2} + \sqrt{(x-2)^2} = 2 \quad (1)$$

т.к.  $\sqrt{y^2} = |y|$  то  $\sqrt{x^2} = |x|$ ;  $\sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$ ;

Исходное уравнение принимает вид  $|x|+|x-2|=2$ ; Оно равносильно уравнению (1). Решим его методом разбития на интервалы. Выражения под знаком корня равны нулю при  $x=0$ ;  $x=2$ .

При  $x < 0$   $|x|=-x$ ;  $|x-2|=2-x$ .

Уравнение (1) принимает вид  $2x=0$ .

Его решением является число 0, но оно не принадлежит данному промежутку.

При  $0 \leq x < 2$   $|x|=x$ ;  $|x-2|=2-x$

Уравнение (1) принимает вид  $0x=0$ .

Его решением являются все числа из промежутка  $[0;2)$ .

При  $2 \leq x$   $|x|=x$ ;  $|x-2|=x-2$

Уравнение (1) принимает вид  $2x=4$

Его решением является число 2

Объединим все решения и получим все допустимые значения  $x$

Ответ  $[0;2]$

назад

$$\sqrt{x^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 5 \quad (1)$$

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2; \quad x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

$$\text{Т.к. } \sqrt{y} = |y| \text{ то } \sqrt{x^2 + 6x + 9} = \sqrt{(x+3)^2} = |x+3|; \quad \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$$

Исходное уравнение принимает вид  $|x+3| + |x-2| = 5$ . Оно равносильно уравнению (1). Решим его методом разбития на интервалы. Выражения под знаком корня равны нулю при  $x = -3$ ;  $x = 2$ .

$$\text{При } x < -3 \quad |x+3| = -3-x; \quad |x-2| = 2-x$$

$$\text{Уравнение (1) принимает вид } -2x = 6$$

Его решением является число 3, но  $3 > -3$ , значит число 3 не подходит

$$\text{При } -3 \leq x < 2 \quad |x+3| = x+3; \quad |x-2| = 2-x$$

$$\text{Уравнение (1) принимает вид } 0x = 0$$

Его решением являются все числа из промежутка  $[-3; 2)$

$$\text{При } 2 \leq x \quad |x+3| = x; \quad |x-2| = x-2$$

$$\text{Уравнение (1) принимает вид } 2x = 4$$

Его решением является число 2

Объединим все решения и получим все допустимые значения  $x$

Ответ  $[-3; 2]$

назад

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1 \quad (1)$$

Сначала найдем ОДЗ. Т.к. выражение под корнем всегда больше или равно нулю, то  $x-1 \geq 0$ , то есть  $x \geq 1$ . Представим уравнение (1) в

$$\sqrt{(x-1)-4\sqrt{x-1}+4} + \sqrt{(x-1)-6\sqrt{x-1}+9} = 1$$

$$\sqrt{(\sqrt{x-1})^2 - 4\sqrt{x-1} + 4} + \sqrt{(\sqrt{x-1})^2 - 6\sqrt{x-1} + 9} = 1$$

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = 1$$

$$|\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| = 1 \quad (2)$$

Решим полученное уравнение методом интервалов. Выражения под знаком модуля обращаются в ноль при  $x = 5$  и  $x = 10$

$$\text{при } x < 5 \quad |\sqrt{x-1}-2| = 2 - \sqrt{x-1}; \quad |\sqrt{x-1}-3| = 3 - \sqrt{x-1}$$

Тогда Уравнение принимает вид  $2\sqrt{x-1} = 2$

оно равносильно уравнению (2) его решением является число 5. Но  $5 = 5$ , поэтому на данном промежутке корень не подходит

$$\text{при } 5 \leq x < 10 \quad |\sqrt{x-1}-2| = \sqrt{x-1}-2; \quad |\sqrt{x-1}-3| = 3 - \sqrt{x-1}$$

Тогда Уравнение принимает вид  $0\sqrt{x-1} = 0$

оно равносильно уравнению (2) его решением являются числа на промежутке от 5 до 10

$$\text{при } 5 \leq x \quad |\sqrt{x-1}-2| = \sqrt{x-1}-2; \quad |\sqrt{x-1}-3| = \sqrt{x-1}-3$$

Тогда Уравнение (2) принимает вид  $2\sqrt{x-1} = 6$

оно равносильно уравнению (2) его решением являются число 10

Объединим все значения  $x$  и получим что  $x \in [5;10]$

Ответ  $[5;10]$

назад

$$\sqrt[3]{14+x} + \sqrt[3]{14-x} = 4 \quad (1)$$

Данное уравнение содержит радикалы третьей степени поэтому. При решении таких уравнений удобно пользоваться формулами:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

Область определения уравнения (1) является множеством всех действительных чисел. Возведем обе части уравнения в куб и получим уравнение равносильное данному:

$$14 + x + 14 - x + 3 \sqrt[3]{(14+x)(14-x)} \left( \sqrt[3]{14+x} + \sqrt[3]{14-x} \right) = 64 \quad (2)$$

$$3 \sqrt[3]{196 - x^2} \left( \sqrt[3]{14+x} + \sqrt[3]{14-x} \right) = 36 \quad (3)$$

Так как  $\sqrt[3]{14+x} + \sqrt[3]{14-x} = 4$  поэтому из уравнения (3) следует

$$3 \sqrt[3]{196 - x^2} \cdot 4 = 36 \text{ или } \sqrt[3]{196 - x^2} = 3$$

Возведя это уравнение в куб получим уравнение, ему равносильное  $196 - x^2 = 27$

$$x^2 = 196 - 27 \quad x_{1,2} = \pm 13$$

Так как в процессе преобразования уравнения (1) мы получили «цепочку» равносильных уравнений то решения последующего уравнения являются решениями уравнения (1).

Ответ: -13; 13

назад

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x-8} \quad (1)$$

Данное уравнение содержит радикалы третьей степени поэтому. При решении таких уравнений удобно пользоваться формулами:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

ОДЗ  $x$  - любое т.к. нечетная степень корней.

Возведем обе части уравнения в третью степень

$$x + 3 \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 * \sqrt[3]{x-16} + 3 \sqrt[3]{x} * \left(\sqrt[3]{x-16}\right)^2 + x - 16 = x - 8$$

$$x + 3 \sqrt[3]{x} * \sqrt[3]{x-16} \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16}\right) + x - 16 = x - 8$$

$$3 \sqrt[3]{x(x-16)} * \sqrt[3]{x-8} = 8 - x,$$

$$27x(x-16)(x-8) = (8-x)^3$$

$$(x-8)(27x(x-16) + (x-8)^2) = 0$$

$$x-8 = 0 \text{ или } 28x^2 - 28 * 16x + 64 = 0$$

$$x = 8$$

$$7x^2 - 7 * 16x + 16 = 0$$

$$D = (7 * 16)^2 - 7 * 16$$

$$x_1 = \frac{56 - 21\sqrt{21}}{7}; \quad x_2 = \frac{56 + 21\sqrt{21}}{7} \quad x_3 = 8$$

Так как в процессе преобразования уравнения (1) мы получили «цепочку» равносильных уравнений то решения последующего уравнения являются решениями уравнения (1).

Ответ:

$$x_1 = \frac{56 - 21\sqrt{21}}{7}; \quad x_2 = \frac{56 + 21\sqrt{21}}{7} \quad x_3 = 8$$

назад



$$2x^2 + 3x + \sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 33 \quad (1)$$

Введем новую переменную . Пусть  $\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = U$ , тогда  $2x^2 + 3x + 9 = U^2$ ;  
 $2x^2 + 3x = U^2 - 9$ .

Подставим эти значения в уравнение (1) и он примет вид  $U^2 - 9 + U = 33$ . (2)

Т.к. число  $U$  находится под знаком корня то  $U \geq 0$ . Теперь решим уравнение (2)

$$U^2 + U - 42 = 0$$

$$D = 1 + 4 * 42$$

$$D = 169$$

$$U_{12} = \frac{-1 \pm 13}{2}$$

$$U_1 = -7 \quad U_2 = 6$$

Т.к.  $U \geq 0$  то корень  $U_1 = -7$  не удовлетворяет условию . Значит  $\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 6$

$$2x^2 + 3x + 9 = 36$$

$$2x^2 + 3x - 27 = 0$$

$$D = 3^2 + 27 * 2 * 4$$

$$D = 225$$

$$X_{12} = \frac{-3 \pm 15}{4}$$

$$X_1 = -4.5 \quad X_2 = 3$$

Ответ :  $X_1 = -4.5 \quad X_2 = 3$

назад

$$\sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{2x^2 + 2x + 9} \quad (1)$$

Введем новую переменную  $x^2 + x = U$ , тогда уравнение (1) примет вид  $\sqrt{U+4} + \sqrt{U+1} = \sqrt{2U+9}$  (2)

Т.к. выражение под знаком корня всегда больше или равно нулю то  $U \geq -1$ .

Возведем обе части уравнения в квадрат получим:

$$U+4 + U+1 + 2\sqrt{(U+4)(U+1)} = 2U+9$$

$$2\sqrt{(U+4)(U+1)} = 4$$

$$\sqrt{(U+4)(U+1)} = 2$$

$$(U+4)(U+1) = 4$$

$$U^2 + 5U + 4 = 4$$

$$U^2 + 5U = 0$$

$$U(U+5) = 0$$

$$U_1 = -5 \quad U_2 = 0$$

Т.к.  $U \geq -1$  то значение  $U_1 = -5$  не подходит. Теперь подставим значение  $U$ , получим что  $x^2 + x = 0$ ;

$$x(x+1) = 0$$

$$U_1 = -1 \quad U_2 = 0$$

Проверим подстановкой удовлетворяют ли найденные корни исходному уравнению. Убеждаемся что  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = 0$  удовлетворяют уравнению.

Ответ: -1; 0

назад

$$\sqrt{x^2 - 5x + 6} + \log_2 \sqrt{x^2 - 6x + 13} = 1$$

Т.к.  $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$  арифметический квадратный корень то  $\sqrt{x^2 - 5x + 6} \geq 0$

Для отценки выражения  $\log_2 \sqrt{x^2 - 6x + 13}$ ,

преобразуем его :  $\log_2 \sqrt{x^2 - 6x + 13} = \log_2 \sqrt{(x-3)^2 + 4} \geq \log_2 \sqrt{4} = \log_2 2 \geq 1$ .

Т.к. первое слагаемое ограничено с низу нулем, а второе ограничено снизу единицей то их сумма ограничена с низу единицей.

Тогда левая часть уравнения становится равной правой части, то есть единице, только тогда, когда первое слагаемое равно нулю, а второе слагаемое - 1.

Таким образом исходное уравнение равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 5x + 6} = 0 \\ \log_2 \sqrt{x^2 - 6x + 13} = 1 \end{cases}$$

Общим корнем этой системы являются число 3

Ответ: 3

назад

$$3\sqrt{x^2 - 9} + 4\sqrt{x^2 - 16} + 5\sqrt{x^2 - 25} = \frac{120}{x}$$

Т.к. в левой части стоит сумма арифметических квадратных корней, то эта сумма неотрицательна, а значит и в правой части уравнения должно стоять неотрицательное число, откуда следует что  $x \geq 0$ . Область определения уравнения принадлежит промежутку  $[5; +\infty)$

При  $x \geq 5$  функция

$$f(x) = 3\sqrt{x^2 - 9} + 4\sqrt{x^2 - 16} + 5\sqrt{x^2 - 25}$$

При  $x \geq 5$  функция  $g(x) = 120/x$  является функцией убывающей, а следовательно  $g(x) \leq f(x) = 24$

Таким образом получаем систему из двух уравнений  $f(x) \geq 24$  и  $g(x) \leq 24$  откуда следует что единственным решением является число 5.

Ответ: 5

назад