

РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Урок №4. Решение полных квадратных уравнений (общая формула)

Автор: Ильина Юлия Валерьевна

ГОУ лицей №373

«Экономический лицей»

Санкт-Петербург

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

Удобно домножить ур-е на 2

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot (-1) \cdot 2$$

$$D = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

верно

неверно

Квадратные уравнения в Древнем Вавилоне (4000 лет назад)

Необходимость решать уравнения не только первой, но и второй степени еще в древности была вызвана потребностью решать задачи, связанные с нахождением площадей земельных участков и с земляными работами военного характера, а также с развитием астрономии и самой математики. Квадратные уравнения умели решать около 2000 лет до нашей эры вавилоняне. Применяя современную алгебраическую запись, можно сказать, что в их клинописных текстах встречаются, кроме неполных, и такие, например, полные квадратные уравнения:

$$x^2 + x = \frac{3}{4}, \quad x^2 - x = 14\frac{1}{2}.$$

Правило решения этих уравнений, изложенное в вавилонских текстах, совпадает по существу с современным, однако неизвестно, каким образом дошли вавилоняне до этого правила.

Почти все найденные до сих пор клинописные тексты приводят только задачи с решениями, изложенными в виде рецептов, без указаний относительно того, каким образом они были найдены. Несмотря на высокий уровень развития алгебры в Вавилоне, в клинописных текстах отсутствуют понятие отрицательного числа и общие методы решения квадратных уравнений.

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ

$$x^2 - 8 - \frac{x}{3} = 0$$

$$x^2 - 8 - \frac{x}{3} = 0$$

$$3x^2 - x - 24 = 0$$

$$D = 289$$

$$x_1 = 3, x_2 = -\frac{8}{3}$$



Квадратные уравнения в Индии

Задачи на квадратные уравнения встречаются уже в астрономическом трактате «Ариабхаттиам», составленном в 499 г. индийским математиком и астрономом Ариабхаттой. Другой индийский ученый, Брахмагупта (VII в.), изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой канонической форме:

$$ax^2 + bx = c, a > 0. \quad (1)$$

В уравнении (1) коэффициенты, могут быть и отрицательными. Правило Брахмагупты по существу совпадает с нашим.

В Индии были распространены публичные соревнования в решении трудных задач. В одной из старинных индийских книг говорится по поводу таких соревнований следующее: «Как солнце блеском своим затмевает звезды, так ученый человек затмит славу в народных собраниях, предлагая и решая алгебраические задачи». Задачи часто облекались в стихотворную форму.

Вот одна из задач знаменитого индийского математика XII в. Бхаскары.

Задача 2

«Обезьянок резвых стая
Всласть поевши, развлекалась
Их в квадрате часть восьмая
На поляне забавлялась

А двенадцать по лианам
Стали прыгать, повисая
Сколько ж было обезьянок,
Ты скажи мне, в этой стае?»

Решение Бхаскары свидетельствует о том, что автор знал о двузначности корней квадратных уравнений.

Соответствующее задаче 2 уравнение:

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$$

Бхаскара пишет:

$$x^2 - 64x = -768$$

и, чтобы дополнить левую часть этого уравнения до квадрата, прибавляет к обеим частям 32^2 , получая затем:

$$x^2 - 64x + 32^2 = -768 + 1024,$$

$$(x - 32)^2 = 256,$$

$$x - 32 = \pm 16,$$

$$x_1 = 16, x_2 = 48.$$



БРАХМАГУПТА

индийский ученый (VII в.)

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ

$$x^2 - 2,5x + 1 = 0$$

$$x^2 - 2,5x + 1 = 0$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$D = 9$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$



Квадратные уравнения у Аль-Хорезми.

В алгебраическом трактате Аль-Хорезми дается классификация линейных и квадратных уравнений. Автор насчитывает 6 видов уравнений, выражая их следующим образом:

1. «Квадраты равны корням», т. е. $ax^2 = bx$.
2. «Квадраты равны числу», т. е. $ax^2 = c$.
3. «Корни равны числу», т. е. $ax = c$.
4. «Квадраты и числа равны корням», т. е. $ax^2 + c = bx$.
5. «Квадраты и корни равны числу», т. е. $ax^2 + bx = c$.
6. «Корни и числа равны квадратам», т. е. $bx + c = ax^2$.

Для Аль-Хорезми, избегавшего употребления отрицательных чисел, члены каждого из этих уравнений слагаемые, а не вычитаемые. При этом заведомо не берутся во внимание уравнения, у которых нет положительных решений. Его решение не совпадает полностью с нашим. Уже не говоря о том, что оно чисто риторическое, следует отметить, например, что при решении неполного квадратного уравнения первого вида Аль-Хорезми, как и все математики до XVII в., не учитывает нулевого решения, вероятно, потому, что в конкретных практических задачах оно не имеет значения. При решении полных квадратных уравнений Аль-Хорезми на частных числовых примерах излагает правила решения, а затем их геометрические доказательства. Приведем пример.

Задача 3. «Квадрат и число 21 равны 10 корням. Найти корень» (подразумевается корень уравнения $x^2 + 21 = 10x$).

Решение: раздели пополам число корней, получишь 5, умножь 5 само на себя, от произведения отними 21, останется 4. Извлеки корень из 4, получишь 2. Отними 2 от 5, получишь 3, это и будет искомый корень. Или же прибавь 2 к 5, что даст 7, это тоже есть корень.

Трактат Аль-Хорезми является первой, дошедшей до нас книгой, в которой систематически изложена классификация квадратных уравнений и даны формулы их решения.

$$2x^2=5+3x$$

$$2x^2-17x-9=0$$

Ответ: $-1,2 \frac{1}{2}$

Ответ: $9, -\frac{1}{2}$

СОВЕТ: РАСКРЫТЬ СКОБКИ, ПЕРЕНЕСТИ СЛАГАЕМЫЕ В ОДНУ СТОРОНУ, ПРИВЕСТИ ПОДОБНЫЕ.

$$(x+1)(x+2)=(2x-1)(2x-10)$$

Ответ: $8, \frac{1}{3}$

СОВЕТ: ПРИВЕСТИ ДРОБИ К ОБЩЕМУ ЗНАМЕНАТЕЛЮ, ПРИВЕСТИ ПОДОБНЫЕ

$$\frac{5(x^2 - 1)}{4} = \frac{x}{6} - 2$$

Ответ: действительных корней нет

$$\frac{x-3}{4} + \frac{2x+3}{6} = \frac{x^2-11}{12}$$

$$(x+3)(x-2) + (x+2)^2 = 3x+10$$

Ответ: -1, 8

Ответ: $\pm\sqrt{6}$

$$x^2+6x+8=0$$

$$3x^2-8x+5=0$$

Ответ: -4; -2

Ответ: 1, $1\frac{2}{3}$

$$x^2 - 6x - 6 = 0$$

КОРНИ ЭТОГО УРАВНЕНИЯ НУЖНО УПРОСТИТЬ, ТАК ИХ УДОБНЕЕ ОЦЕНИВАТЬ.

$$x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$D = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2(3 \pm \sqrt{3})}{2}$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3}$$

$$\text{ОТВЕТ: } 3 \pm \sqrt{3}$$

$$\text{ОТВЕТ: } 3 \pm \sqrt{3}$$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a},$$

$$\text{где } \frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$$

- Последние три уравнения имеют общую особенность. Вторым коэффициентом – четным. Для таких случаев есть облегченная формула нахождения корней.
- Зная эту формулу последнее уравнение решается быстрее.

ФОРМУЛА ВТОРОГО ЧЕТНОГО КОЭФФИЦИЕНТА

РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ, ИСПОЛЬЗУЯ ФОРМУЛУ ВТОРОГО ЧЕТНОГО КОЭФФИЦИЕНТА

$$8x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{10}{2}\right)^2 - 8 \cdot 3$$

$$\frac{D}{4} = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{8}$$

$$x_1 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad x_2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{3}{4}; \frac{1}{2}$$

$$8x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$D = 100 - 4 \cdot 8 \cdot 3$$

$$D = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm 2}{16}$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

- №312 (б,г,д,е), 313(е,з), 314 (2ст.)

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- С.М. Никольский, М.К. Потапов и др.,
Алгебра 8, изд. «Просвещение», 2010г.
- М.Л. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.И. Звавич,
«Сборник задач по алгебре 8-9», изд.
«Просвещение», 1992г.
- www.referatwork.ru
- www.webkursovik.ru