Задачи с параметрами на определение свойств решений квадратных уравнений и неравенств

- **Свойства решений квадратных уравнений**

Рассмотрим квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (a \neq 0) \qquad (1)$$

Дискриминант $D = b^2 - 4ac,$

корни $x_{1;2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ (в случае $D \geq 0$)

Уравнение $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

получено из (1) делением на $a \neq 0.$

Введем обозначение $p = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{c}{a}.$

Уравнение $x^2 + px + q = 0$ (2)

называется **приведенным** квадратным уравнением.

Теорема Виета

Пусть уравнение $x^2 + px + q = 0$ **имеет действительные решения** $x_1,\ x_2.$

Тогда
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

Пример 1. *Найти сумму и произведение корней уравнения*

$$3x^2 + 4x - 5 = 0.$$

Решение. *1)* ***Проверка:*** *имеет ли уравнение действительные корни?*

$$D = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) > 0$$

Уравнение ***имеет действительные корни.***

2) Нахождение ***суммы*** *и* ***произведения*** *корней уравнения с использованием теоремы Виета.*

$$x_1 + x_2 = -\frac{4}{3}, \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{5}{3}.$$

Пример 2. *Найти сумму и произведение корней уравнения*

$$2x^2 + 3x + 3 = 0.$$

Решение. ***Проверка:*** *имеет ли уравнение действительные корни?*

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 < 0$$

Уравнение ***не имеет действительных корней.***

Ответ. *Уравнение не имеет действительных корней.*

Пример 3. *При каких значениях параметра а произведение корней уравнения* $x^2 + ax + 5a = 0$ *равно 10 ?*

Решение. *1) Найдем все значения параметра а, при которых уравнение имеет действительные решения.*

$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5a = a^2 - 20a = a(a - 20) \geq 0$$

$$\underline{a \in (-\infty; 0] \cup [20; +\infty).}$$

2) По теореме Виета ***произведение*** *корней уравнения равно 10, если* $\begin{cases} D \geq 0, \\ 5a = 10. \end{cases}$

Решение системы: $\begin{cases} a \in (-\infty; 0] \cup [20; +\infty), \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{a \in \varnothing.}$

Ответ. $a \in \varnothing.$

Применение теоремы Виета при исследовании свойств решений квадратных уравнений

Уравнение $x^2 + px + q = 0$

- **имеет корни одного знака, если** $\begin{cases} D \geq 0, \\ q > 0. \end{cases}$
- **имеет корни разных знаков, если** $\begin{cases} D > 0, \\ q < 0. \end{cases}$
- **имеет положительные корни, если** $\begin{cases} D \geq 0, \\ q > 0, \\ p < 0. \end{cases}$
- **имеет отрицательные корни, если** $\begin{cases} D \geq 0, \\ q > 0, \\ p > 0. \end{cases}$

Пример 4. *При каких значениях параметра а уравнение* $x^2 + ax + 5a = 0$ *имеет корни разных знаков ?*

Решение. *1) Найдем все значения параметра а, при которых уравнение имеет действительные решения.*

$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5a = a^2 - 20a = a(a - 20) > 0$$

$$a \in (-\infty;0) \cup (20;+\infty).$$

2) Уравнение имеет корни разных знаков, если

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ 5a < 0. \end{cases}$$

Решение системы: $\begin{cases} a \in (-\infty;0) \cup (20;+\infty), \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow a \in (-\infty;0).$

Ответ. $a \in (-\infty;0).$

• Свойства решений квадратных неравенств

Рассмотрим квадратное неравенство

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad (*), (a \neq 0) \qquad (3)$$

Дискриминант $D = b^2 - 4ac,$

корни $x_{1;2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ (в случае $D \geq 0$)

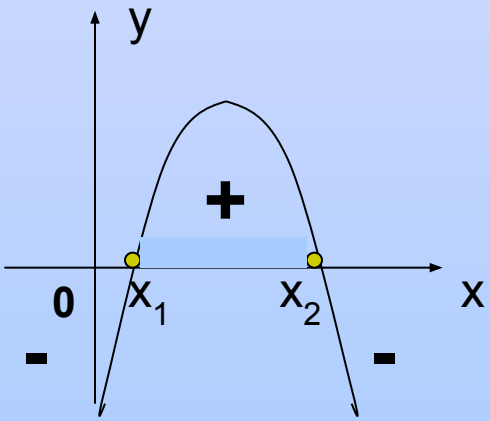
(*) Возможные знаки неравенства: >, <, ≥, ≤.

Задача отыскания решений квадратного неравенства (3) связана с исследованием соответствующего квадратного уравнения (1), и, следовательно, с возможностью использовать теорему Виета для приведенного уравнения (2).

Пример 5. *При каких значениях параметра а неравенство*

$-x^2 + ax - 1 > 0$ *имеет только положительные решения ?*

Решение.



$$\begin{cases} D > 0, \\ 1 > 0, \\ -a < 0 \end{cases}$$

- *существование решений неравенства в виде промежутка*

- *корни квадратного уравнения (точки пересечения с осью Ox) – положительные*

Ответ. $a \in (2;+\infty)$.