Решение простейших тригонометрических уравнений.

Алгебра и начала анализа, 10 класс.

Воробьев Леонид Альбертович, г.Минск

Под простейшими тригонометрическими уравнениями понимают уравнения вида:

$$\sin t = a$$

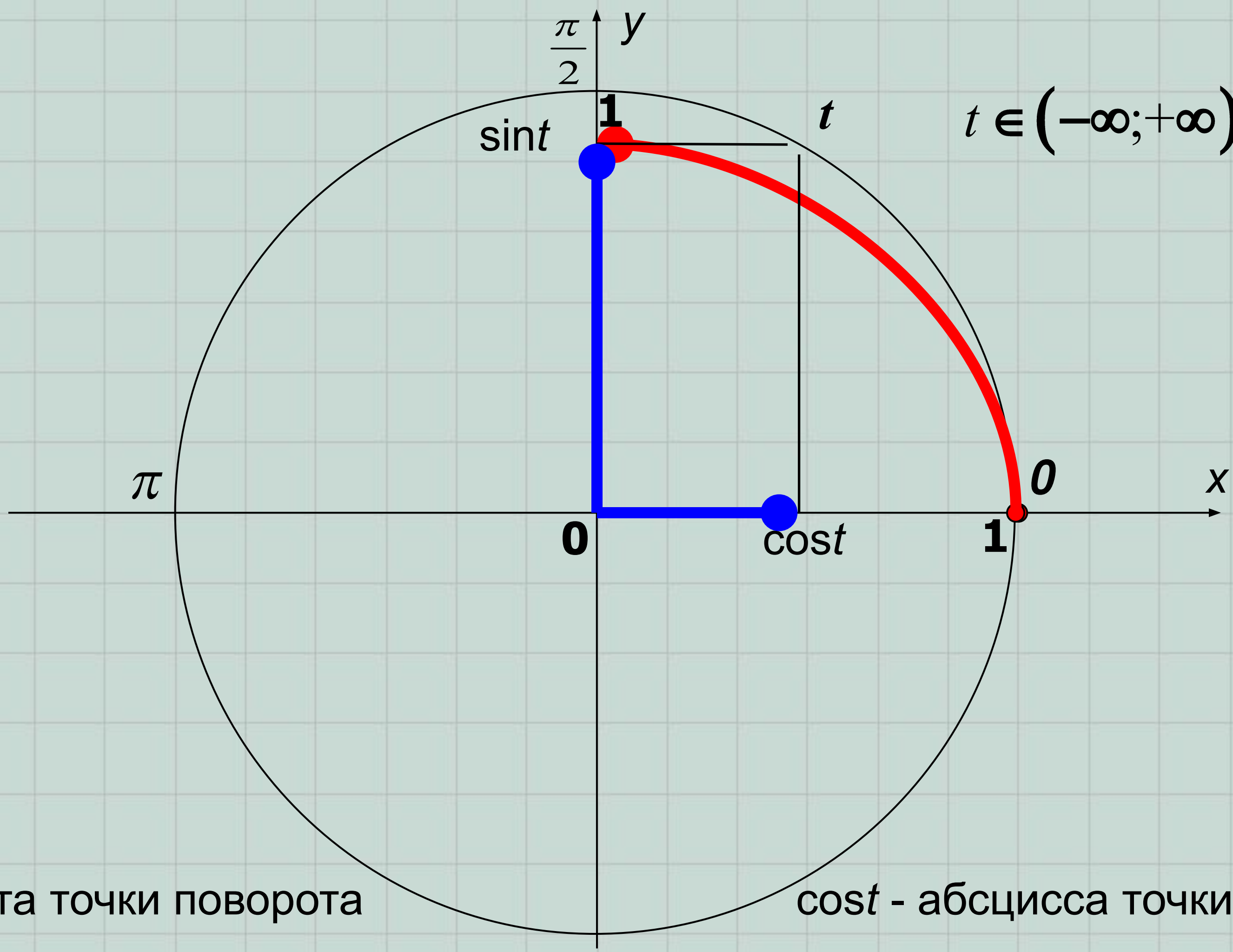
$$\cos t = a$$

$$tg t = a$$

$$ctg t = a$$

,где *t* – выражение с переменной, $a \in \square$.

Вспомним определение синуса и косинуса угла поворота:



sin$t$ - ордината точки поворота

cos$t$ - абсцисса точки поворота

(под «точкой поворота» следует понимать – «точку единичной тригонометрической окружности, полученной при повороте на $\boldsymbol{t}$ радиан от начала отсчета»)

Для решения уравнения $\sin t = a$ обратимся к тригонометрическому кругу:

I случай. Если $a \notin [-1;1]$, то уравнение $\sin t = a$ не имеет корней.

II случай. Если $a \in (-1;1)$, то уравнение $\sin t = a$ имеет два корня на промежутке, равном периоду функции синус, т.е. при $t \in [0; 2\pi]$.

Полученные точки симметричны относительно оси *Oy.* Значение одной из них соответствует числу arcsin$a$, а вторая точка имеет значение… (проследите за построениями на чертеже и подумайте).

Значит, при $t \in [0; 2\pi]$ мы получили два корня: $t = \left[\begin{array}{l} \arcsin a; \\ \pi - \arcsin a. \end{array}\right.$

Учитывая периодичность функции синус, каждую из этих точек можно получить при добавлении целого числа полных поворотов, т.е.:

$$t = \left[\begin{array}{l} \arcsin a + 2\pi k; \\ \pi - \arcsin a + 2\pi m; \end{array}\right. \quad k, m \in \mathbf{Z},$$

или

$$t = \left[\begin{array}{l} \arcsin a + \pi \cdot 2k; \\ -\arcsin a + \pi(2m+1), \end{array}\right. \quad k, m \in \mathbf{Z}.$$

Можно заметить, что при наличии знака «+» перед arcsin$a$ к нему прибавляется четное(2k) число π, а при знаке «–» перед arcsin$a$ прибавляется нечетное(2m+1) число π. Поэтому эти два равенства можно объединить в одно и записать:

$$\boxed{t = (-1)^n \cdot \arcsin a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.}$$

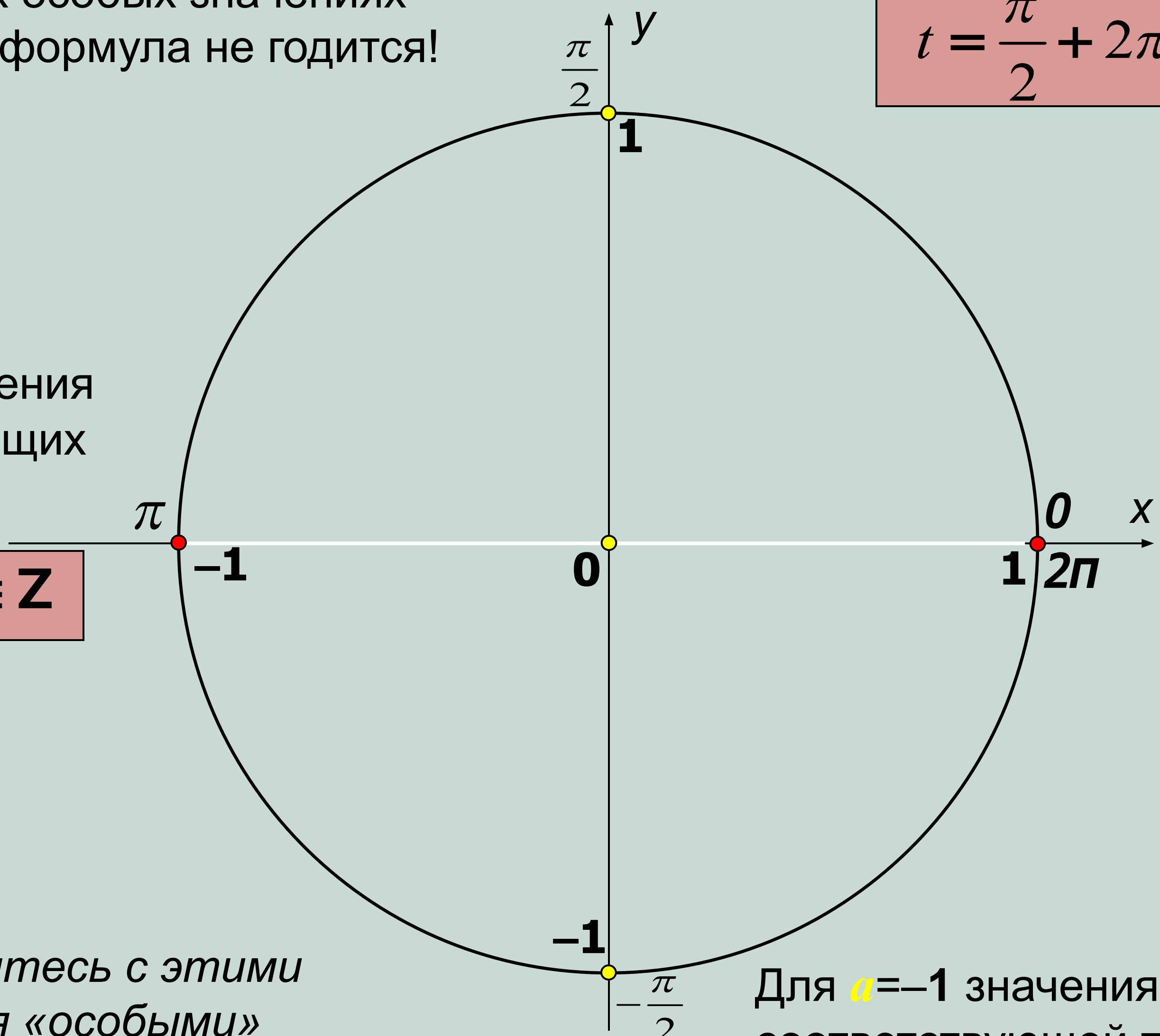
Эта формула позволяет найти корни простейшего тригонометрического уравнения sin$t$=a в случаях, если $a \in (-1;1)$.

III случай. Если $a = -1$; **0** или **1**.

При этих трех особых значениях предыдущая формула не годится!

Для a=**1** значения единственной соответствующей точки равны:

$$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi r,\ r \in \mathbf{Z}$$



Для a=**0** значения соответствующих точек равны:

$$t = \pi h,\ h \in \mathbf{Z}$$

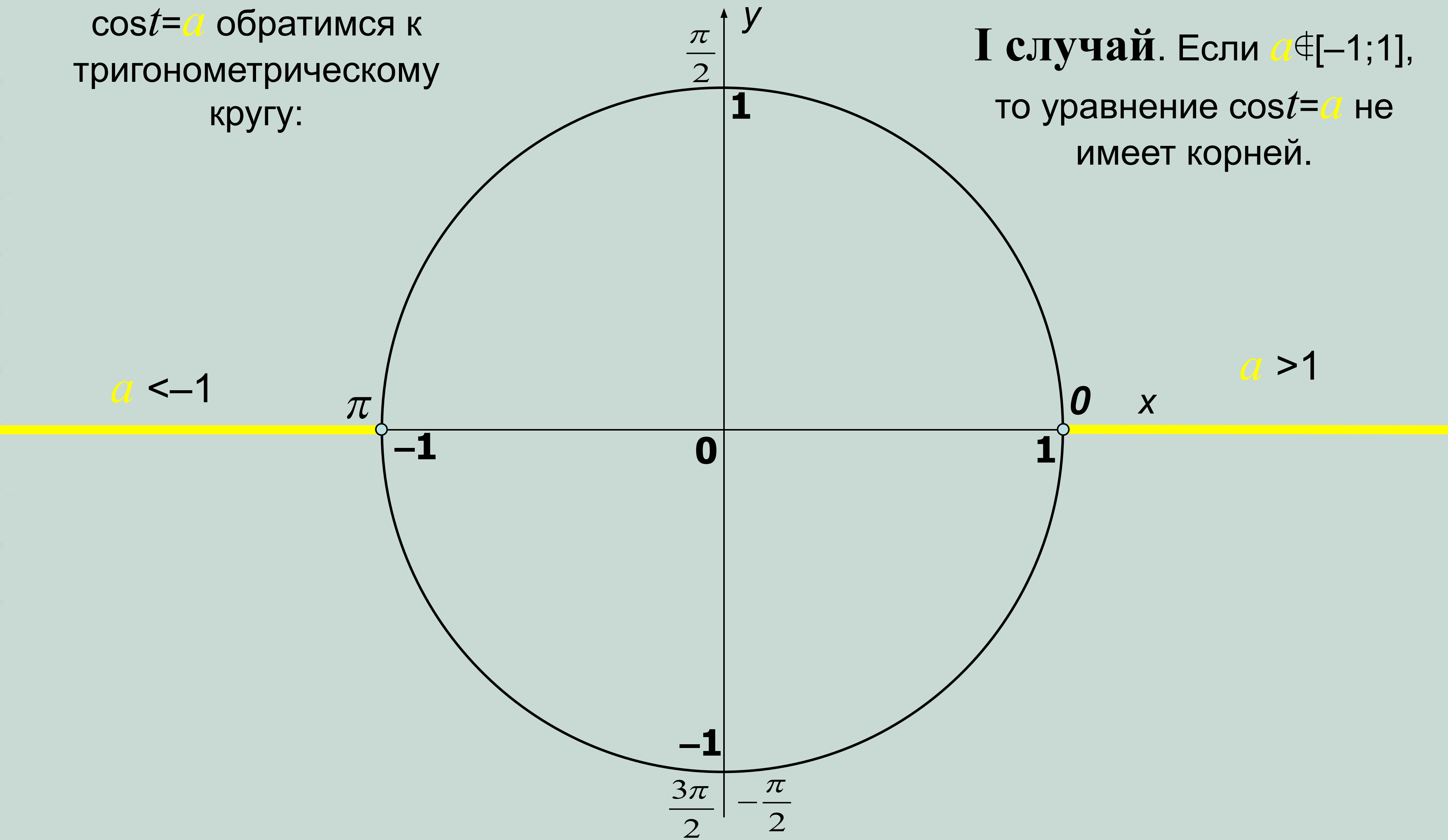
Для a=**–1** значения единственной соответствующей точки равны:

$$t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi d,\ d \in \mathbf{Z}$$

Разберитесь с этими тремя «особыми» значениями и запомните выведенные формулы!

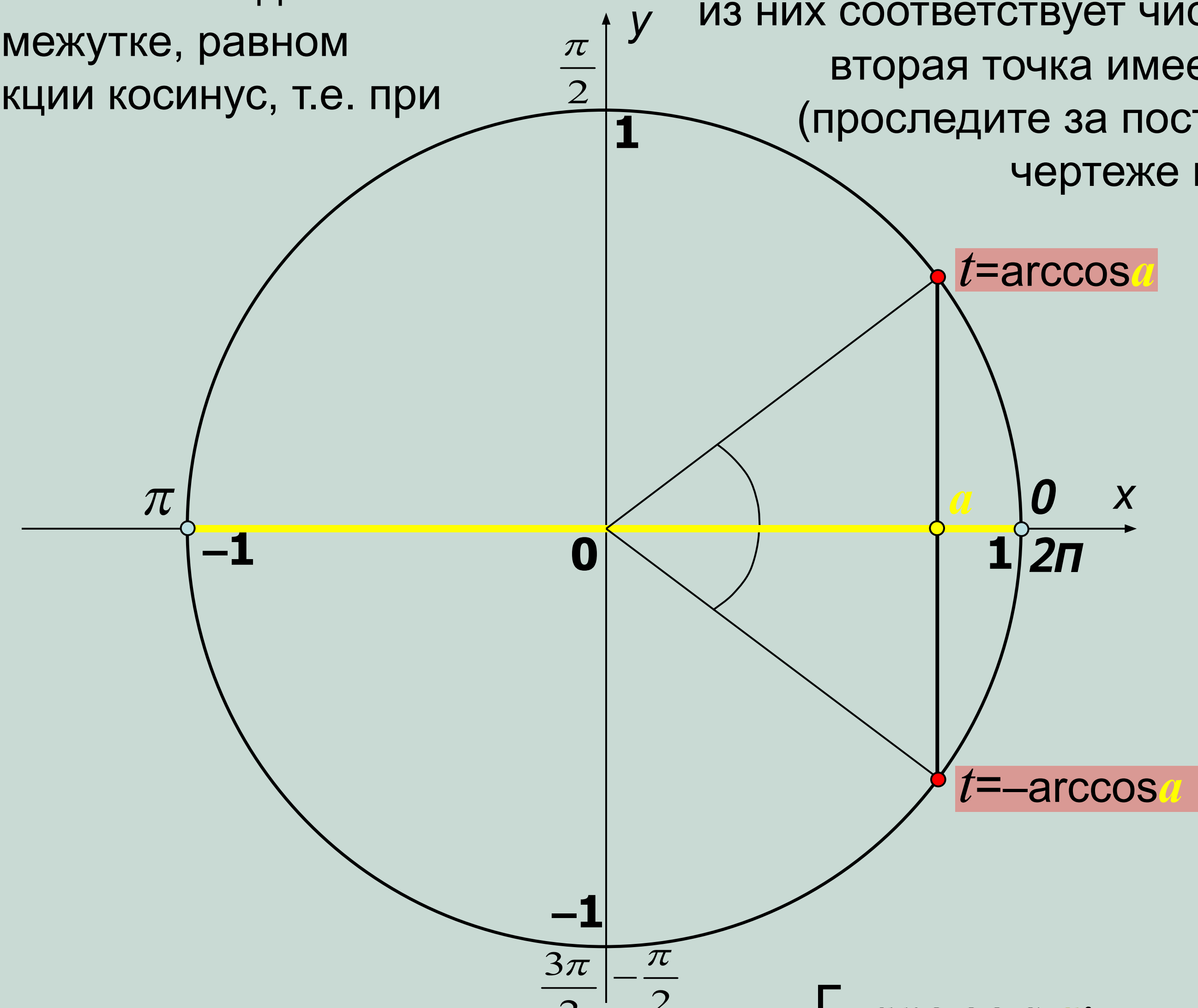
Для решения уравнения $\cos t = a$ обратимся к тригонометрическому кругу:

I случай. Если $a \notin [-1;1]$, то уравнение $\cos t = a$ не имеет корней.



II случай. Если $a \in (-1;1)$, то уравнение $\cos t = a$ имеет два корня на промежутке, равном периоду функции косинус, т.е. при $t \in [0; 2\pi]$.

Полученные точки симметричны относительно оси *Ox.* Значение одной из них соответствует числу arccos$a$, а вторая точка имеет значение… (проследите за построениями на чертеже и подумайте).



Значит, при $t \in [0; 2\pi]$ мы получили два корня: $t = \left[\begin{array}{l} \arccos a; \\ -\arccos a. \end{array}\right.$

Учитывая периодичность функции косинус, каждую из этих точек можно получить при добавлении целого числа полных поворотов, т.е.:

$$t = \left[\begin{array}{l} \arccos a + 2\pi k; \\ -\arccos a + 2\pi m; \end{array} \right. \quad k, m \in \mathbf{Z},$$

Эти записи отличаются друг от друга только знаками перед arccos$a$. Поэтому эти два равенства можно объединить в одно и записать:

$$\boxed{t = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.}$$

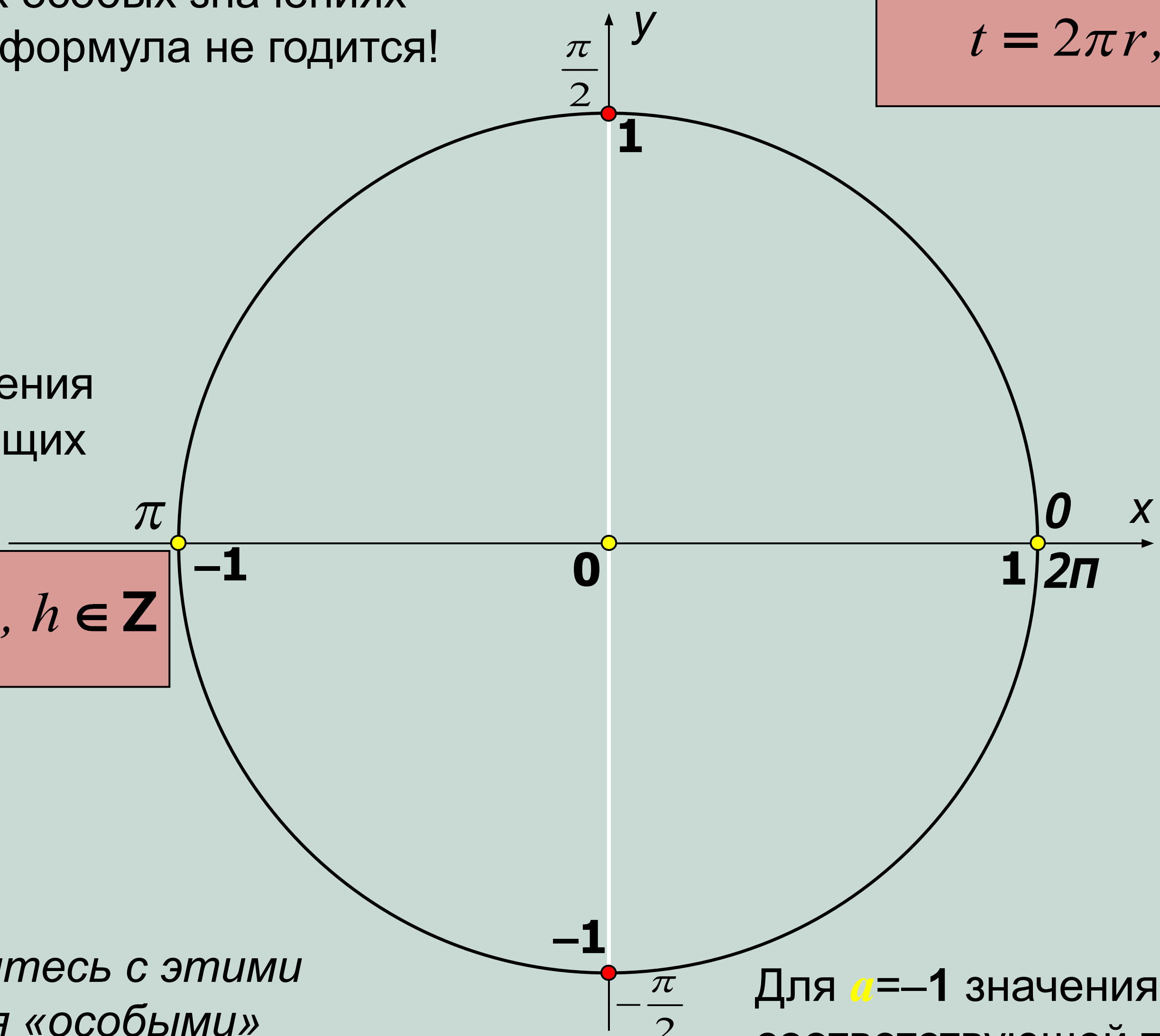
Эта формула позволяет найти корни простейшего тригонометрического уравнения cos$t$=a в случаях, если $a \in (-1;1)$.

III случай. Если $a = -1$; **0** или **1**.

При этих трех особых значениях предыдущая формула не годится!

Для a=**1** значения единственной соответствующей точки равны:

$$t = 2\pi r,\ r \in \mathbf{Z}$$



Для a=**0** значения соответствующих точек равны:

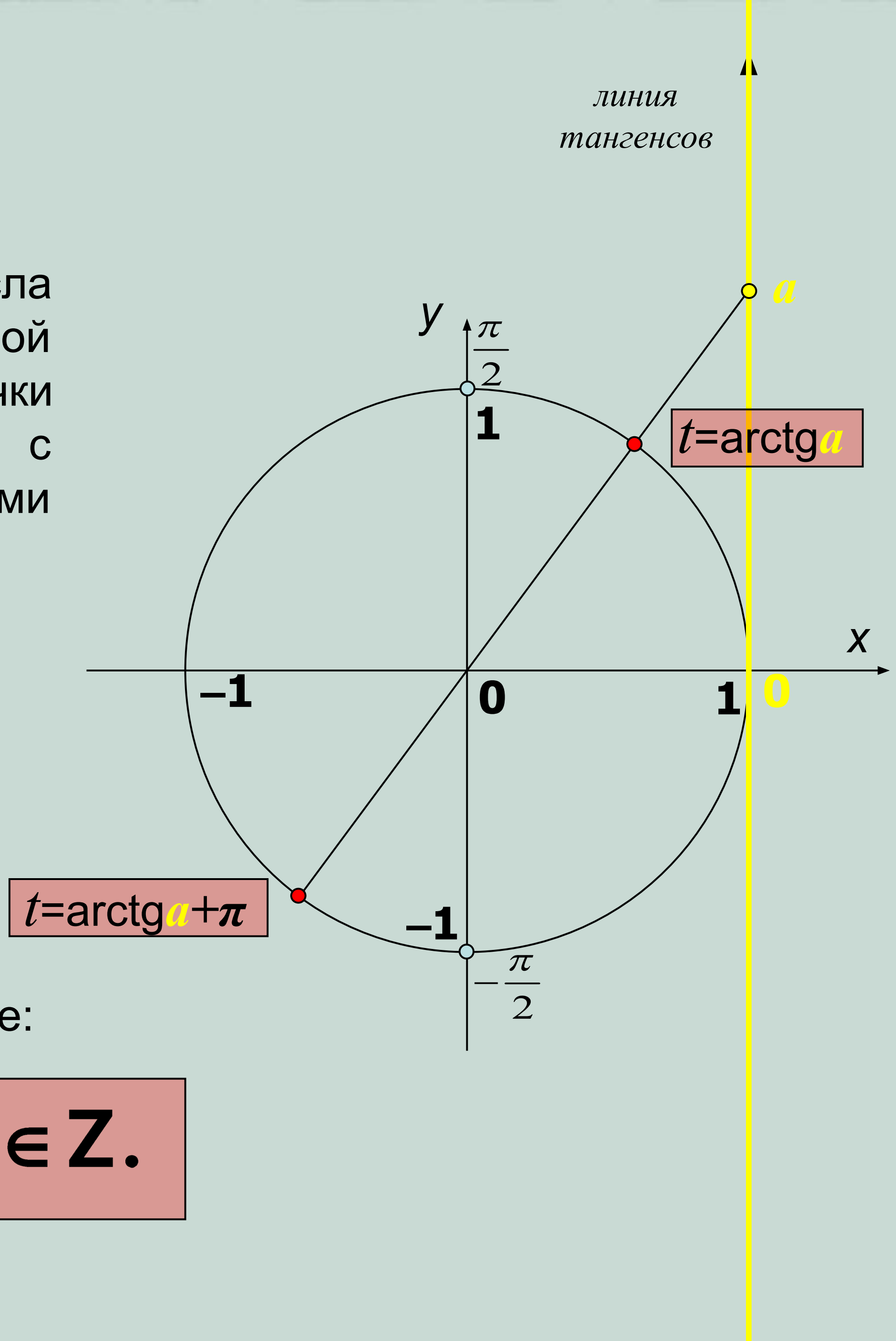
$$t = \frac{\pi}{2} + \pi h,\ h \in \mathbf{Z}$$

Для a=**–1** значения единственной соответствующей точки равны:

$$t = \pi + 2\pi d,\ d \in \mathbf{Z}$$

Разберитесь с этими тремя «особыми» значениями и запомните выведенные формулы!

Так как $E(tg)=$□, то уравнение tg$t=a$ всегда имеет бесконечно много корней.

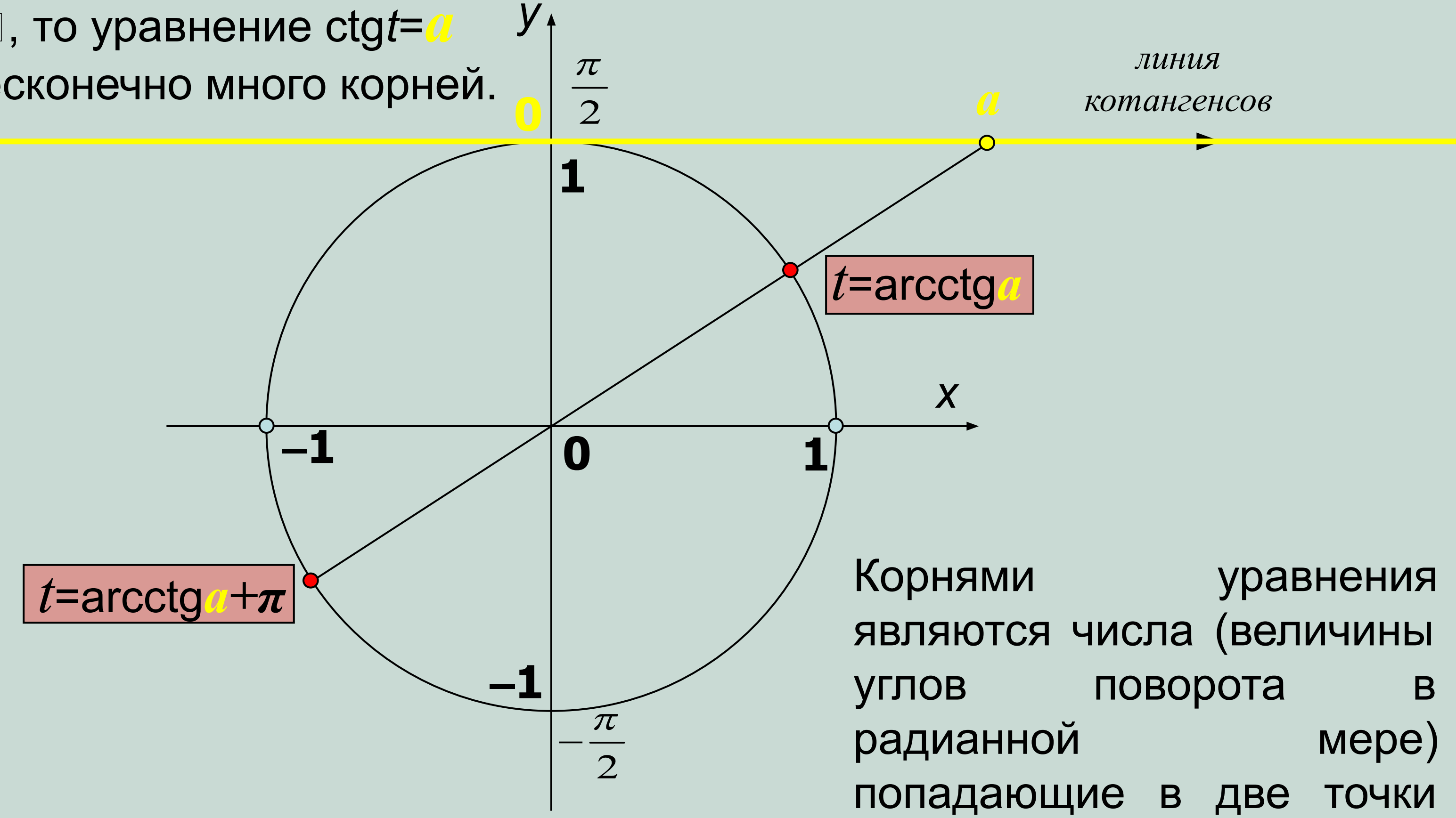


Корнями уравнения являются числа (величины углов поворота в радианной мере) попадающие в две точки тригонометрического круга, с соответствующими значениями (подумайте какими?):

Все эти корни принято записывать в виде:

$$t = arc\,tg\,a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Так как $E(ctg)=\square$, то уравнение ctg$t=a$ всегда имеет бесконечно много корней.



Корнями уравнения являются числа (величины углов поворота в радианной мере) попадающие в две точки тригонометрического круга, с соответствующими значениями (подумайте какими?):

Все эти корни принято записывать в виде:

$$t = arc\,ctg\,a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$