The background features a collage of mathematical elements: a ruler and compass at the top left, a sine wave graph with labels like $\sin x \geq 0$, $\sin x \leq 0$, and $\sin x \geq a$, a formula $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$, a volume formula $\frac{\pi a^3}{12}$, a square root expression $\sqrt{\text{ctg} \alpha - 1}$, a coordinate system with $y = a$ and $y = -a$, and a book cover titled 'Большой справочник МАТЕМАТИКА для школьников и поступающих в вузы'.

***Решение простейших
тригонометрических
уравнений.***

Алгебра и начала анализа, 10 класс.

Под простейшими тригонометрическими уравнениями понимают уравнения вида:

$$\sin t = a$$

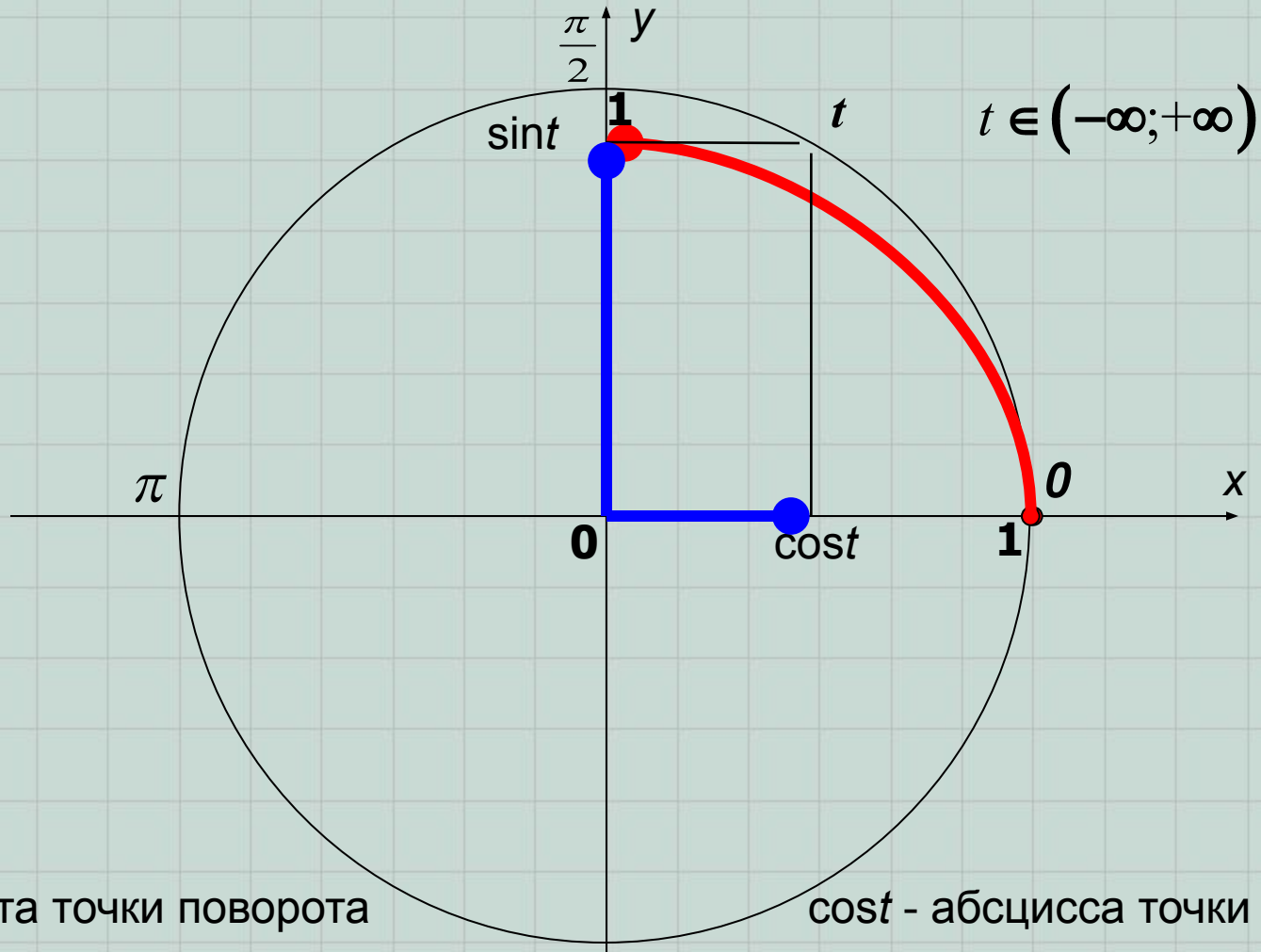
$$\cos t = a$$

,где t –
выражение с
переменной,
 $a \in [-1; 1]$.

$$\operatorname{tg} t = a$$

$$\operatorname{ctg} t = a$$

Вспомним определение синуса и косинуса угла поворота:



$\sin t$ - ордината точки поворота

$\cos t$ - абсцисса точки поворота

(под «точкой поворота» следует понимать – «точку единичной тригонометрической окружности, полученной при повороте на t радиан от начала отсчета»)

Для решения уравнения $\sin t = a$ обратимся к тригонометрическому кругу:



I случай. Если $a \notin [-1; 1]$, то уравнение $\sin t = a$ не имеет корней.

II случай. Если $a \in (-1; 1)$, то уравнение $\sin t = a$ имеет два корня на промежутке, равном периоду функции синус, т.е. при $t \in [0; 2\pi]$.

Полученные точки симметричны относительно оси Oy . Значение одной из них соответствует числу $\arcsin a$, а вторая точка имеет значение... (проследите за построениями на чертеже и подумайте).



Значит, при $t \in [0; 2\pi]$ мы получили два корня: $t = \begin{cases} \arcsin a; \\ \pi - \arcsin a. \end{cases}$

Учитывая периодичность функции синус, каждую из этих точек можно получить при добавлении целого числа полных поворотов, т.е.:

$$t = \begin{cases} \arcsin a + 2\pi k; \\ \pi - \arcsin a + 2\pi m; \end{cases} \quad k, m \in \mathbf{Z},$$

или

$$t = \begin{cases} \arcsin a + \pi \cdot 2k; \\ -\arcsin a + \pi (2m + 1), \end{cases} \quad k, m \in \mathbf{Z}.$$

Можно заметить, что при наличии знака «+» перед $\arcsin a$ к нему прибавляется четное ($2k$) число π , а при знаке «-» перед $\arcsin a$ прибавляется нечетное ($2m+1$) число π . Поэтому эти два равенства можно объединить в одно и записать:

$$t = (-1)^n \cdot \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

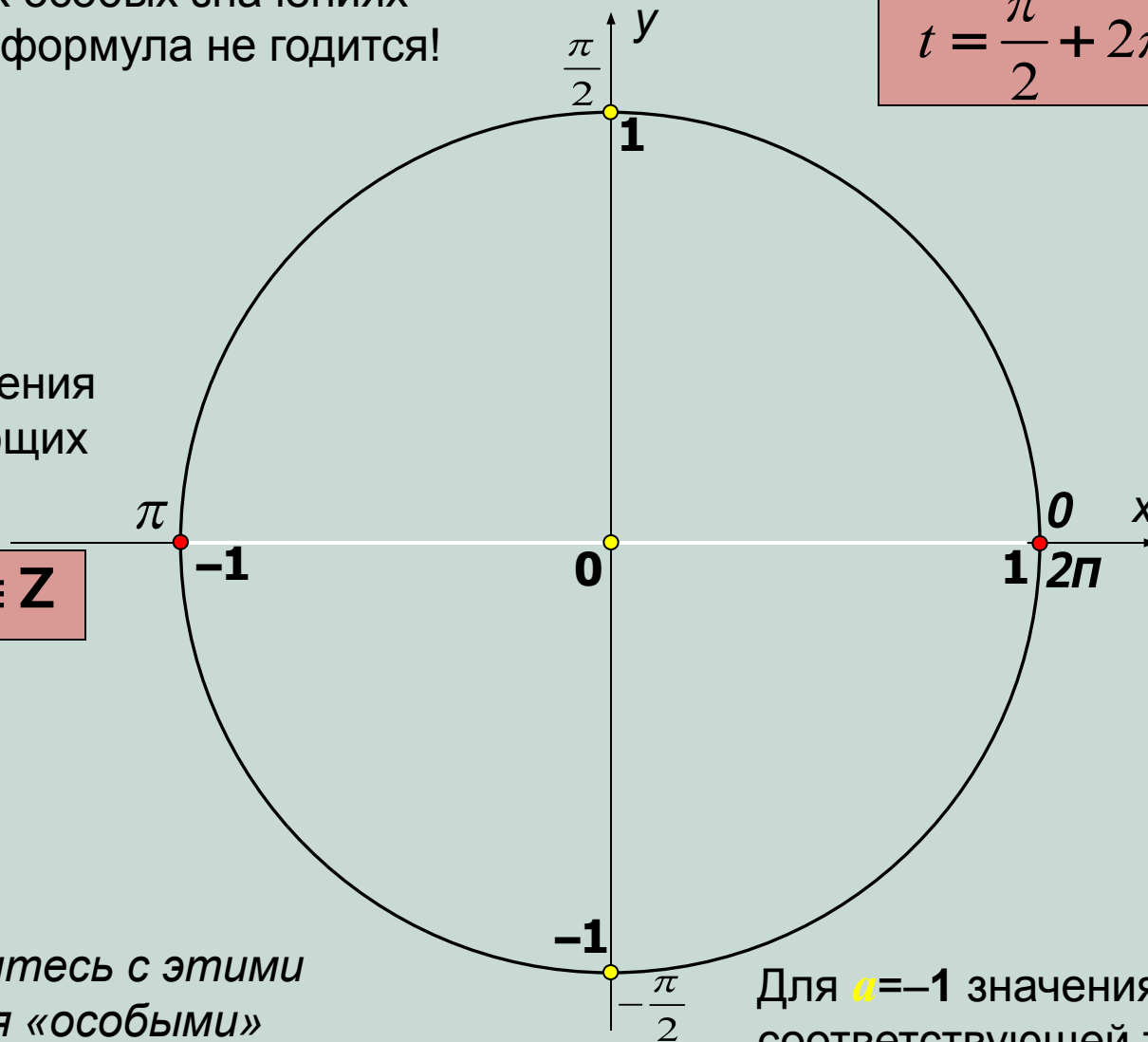
Эта формула позволяет найти корни простейшего тригонометрического уравнения $\sin t = a$ в случаях, если $a \in (-1; 1)$.

III случай. Если $a = -1; 0$ или 1 .

При этих трех особых значениях предыдущая формула не годится!

Для $a = 0$ значения соответствующих точек равны:

$$t = \pi h, h \in \mathbf{Z}$$



Разберитесь с этими тремя «особыми» значениями и запомните выведенные формулы!

Для $a = 1$ значения единственной соответствующей точки равны:

$$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi r, r \in \mathbf{Z}$$

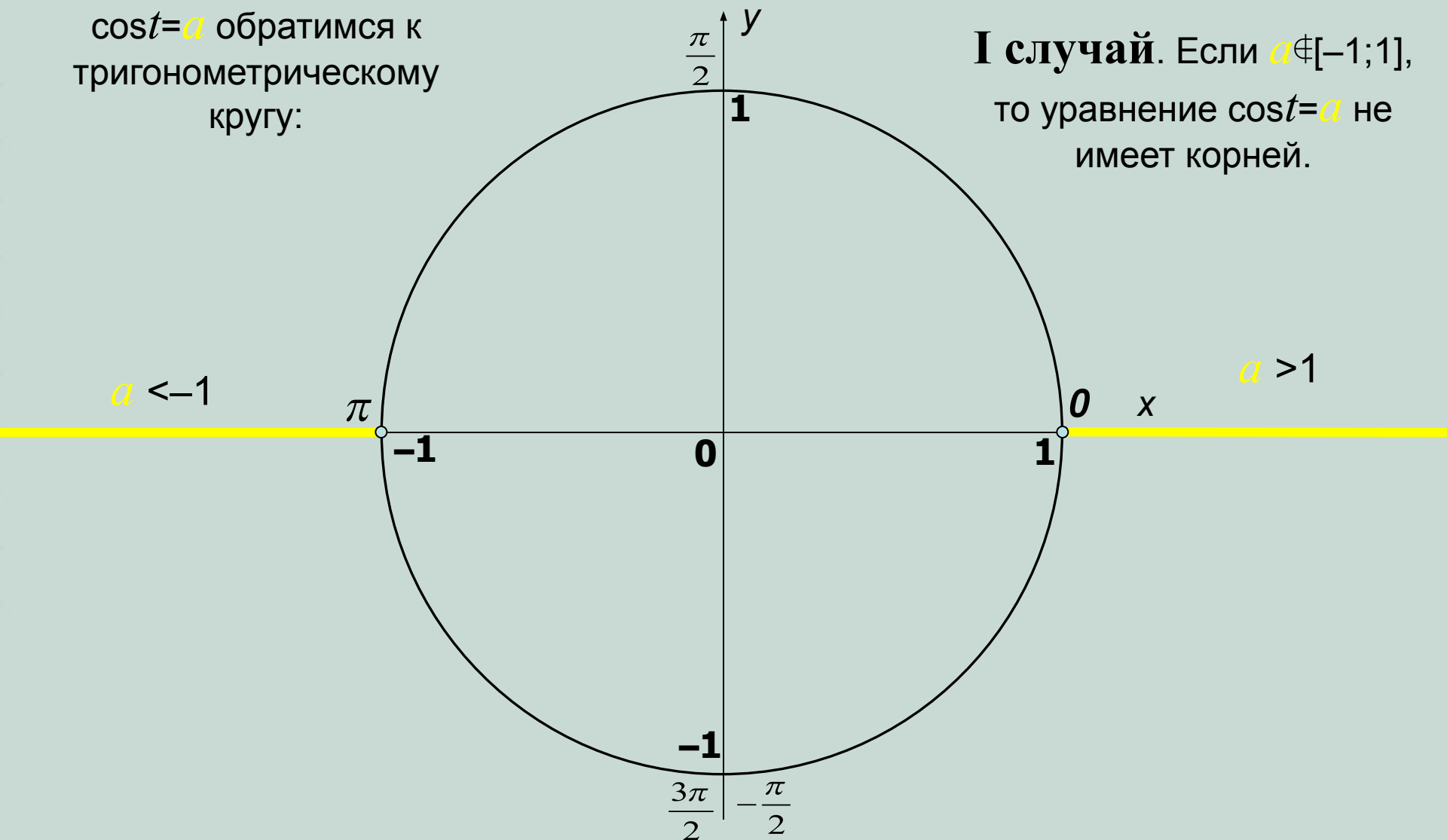
Для $a = -1$ значения единственной соответствующей точки равны:

$$t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi d, d \in \mathbf{Z}$$

Для решения уравнения

$\cos t = a$ обратимся к
тригонометрическому
кругу:

I случай. Если $a \notin [-1; 1]$,
то уравнение $\cos t = a$ не
имеет корней.



II случай. Если $a \in (-1; 1)$, то

уравнение $\cos t = a$ имеет два корня на промежутке, равном периоду функции косинус, т.е. при $t \in [0; 2\pi]$.

Полученные точки симметричны относительно оси Ox . Значение одной из них соответствует числу $\arccos a$, а вторая точка имеет значение... (проследите за построениями на чертеже и подумайте).



Значит, при $t \in [0; 2\pi]$ мы получили два корня: $t = \begin{cases} \arccos a; \\ -\arccos a. \end{cases}$

Учитывая периодичность функции косинус, каждую из этих точек можно получить при добавлении целого числа полных поворотов, т.е.:

$$t = \begin{cases} \arccos a + 2\pi k; \\ -\arccos a + 2\pi m; \end{cases} \quad k, m \in \mathbf{Z},$$

Эти записи отличаются друг от друга только знаками перед $\arccos a$. Поэтому эти два равенства можно объединить в одно и записать:

$$t = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Эта формула позволяет найти корни простейшего тригонометрического уравнения $\cos t = a$ в случаях, если $a \in (-1; 1)$.

III случай. Если $a = -1; 0$ или 1 .

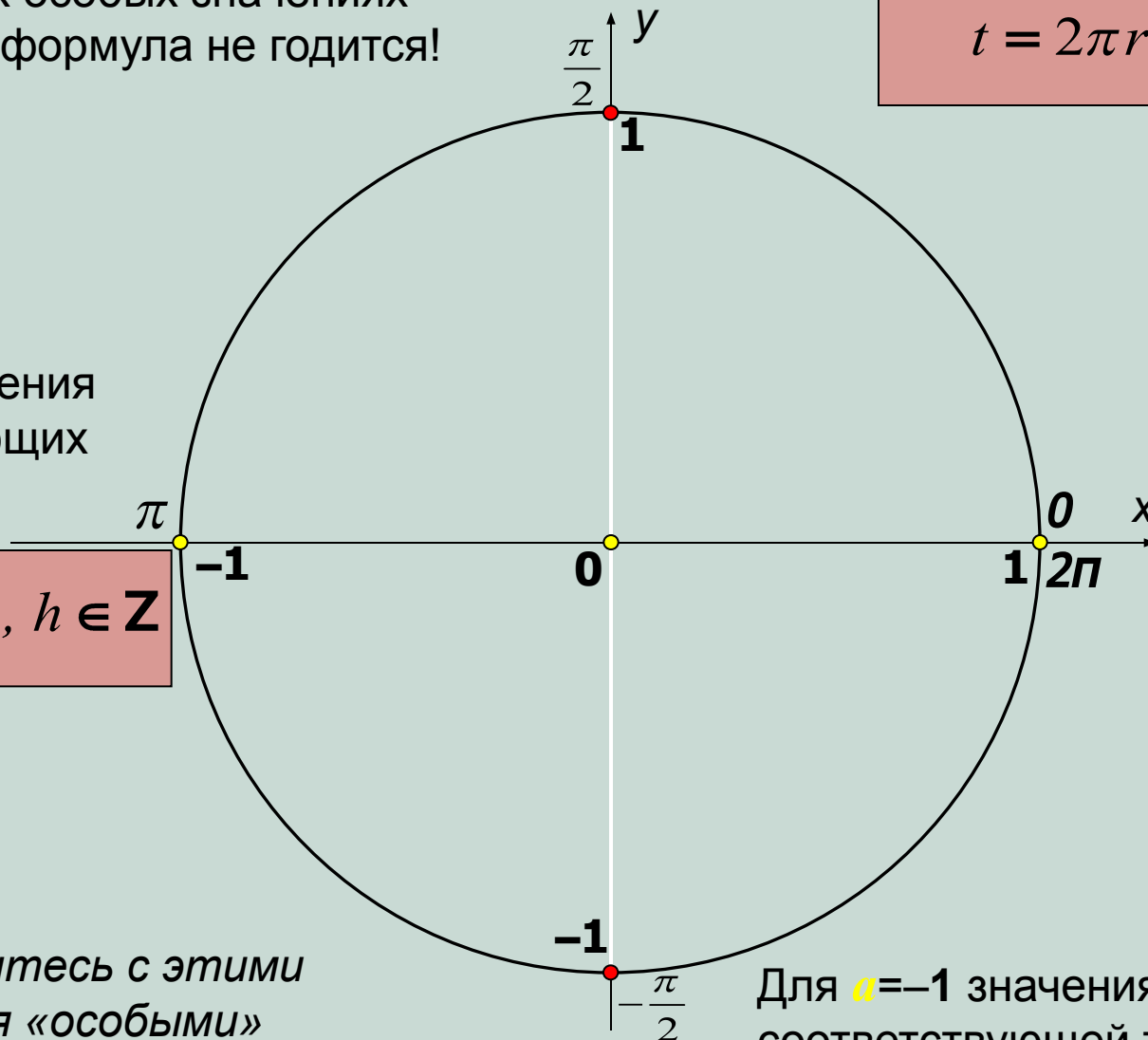
При этих трех особых значениях предыдущая формула не годится!

Для $a = 1$ значения единственной соответствующей точки равны:

$$t = 2\pi r, r \in \mathbf{Z}$$

Для $a = 0$ значения соответствующих точек равны:

$$t = \frac{\pi}{2} + \pi h, h \in \mathbf{Z}$$



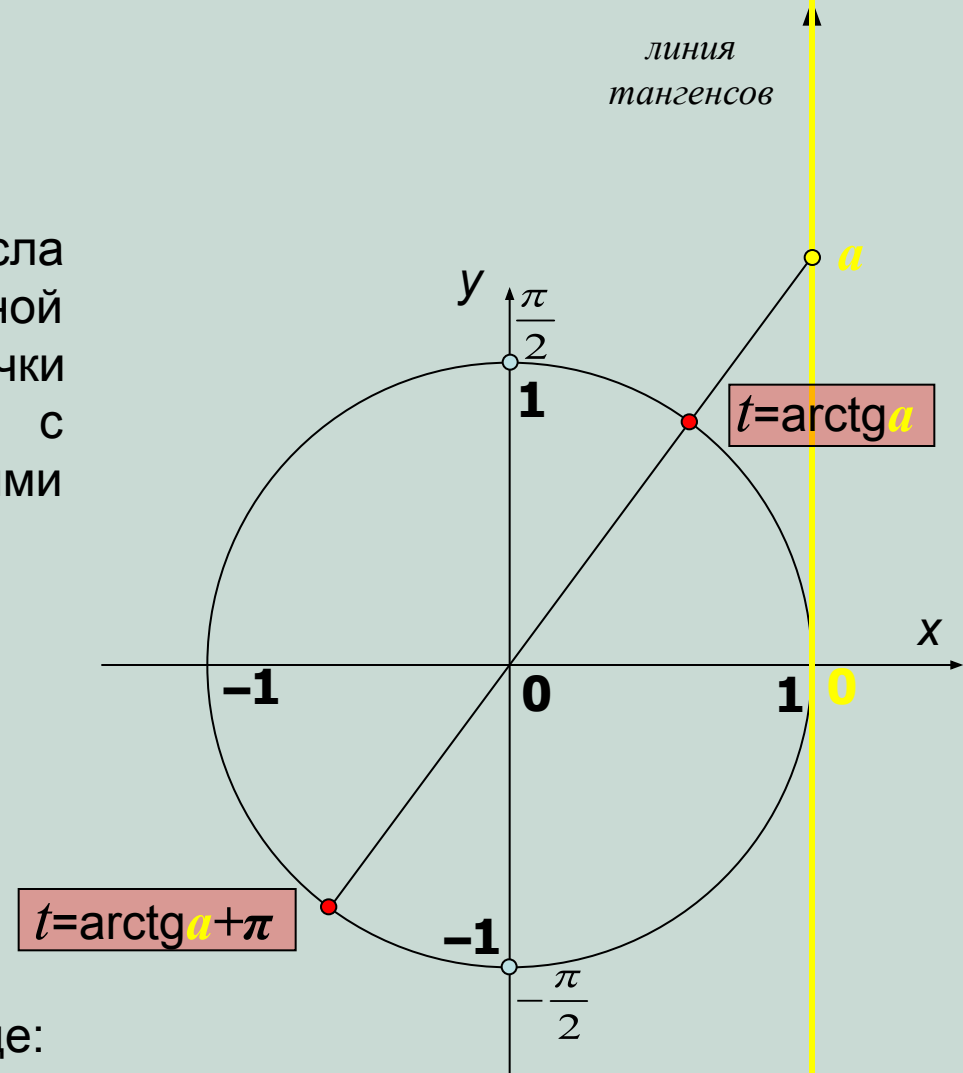
Разберитесь с этими тремя «особыми» значениями и запомните выведенные формулы!

Для $a = -1$ значения единственной соответствующей точки равны:

$$t = \pi + 2\pi d, d \in \mathbf{Z}$$

Так как $E(tg)=\square$, то уравнение $tg t = a$ всегда имеет бесконечно много корней.

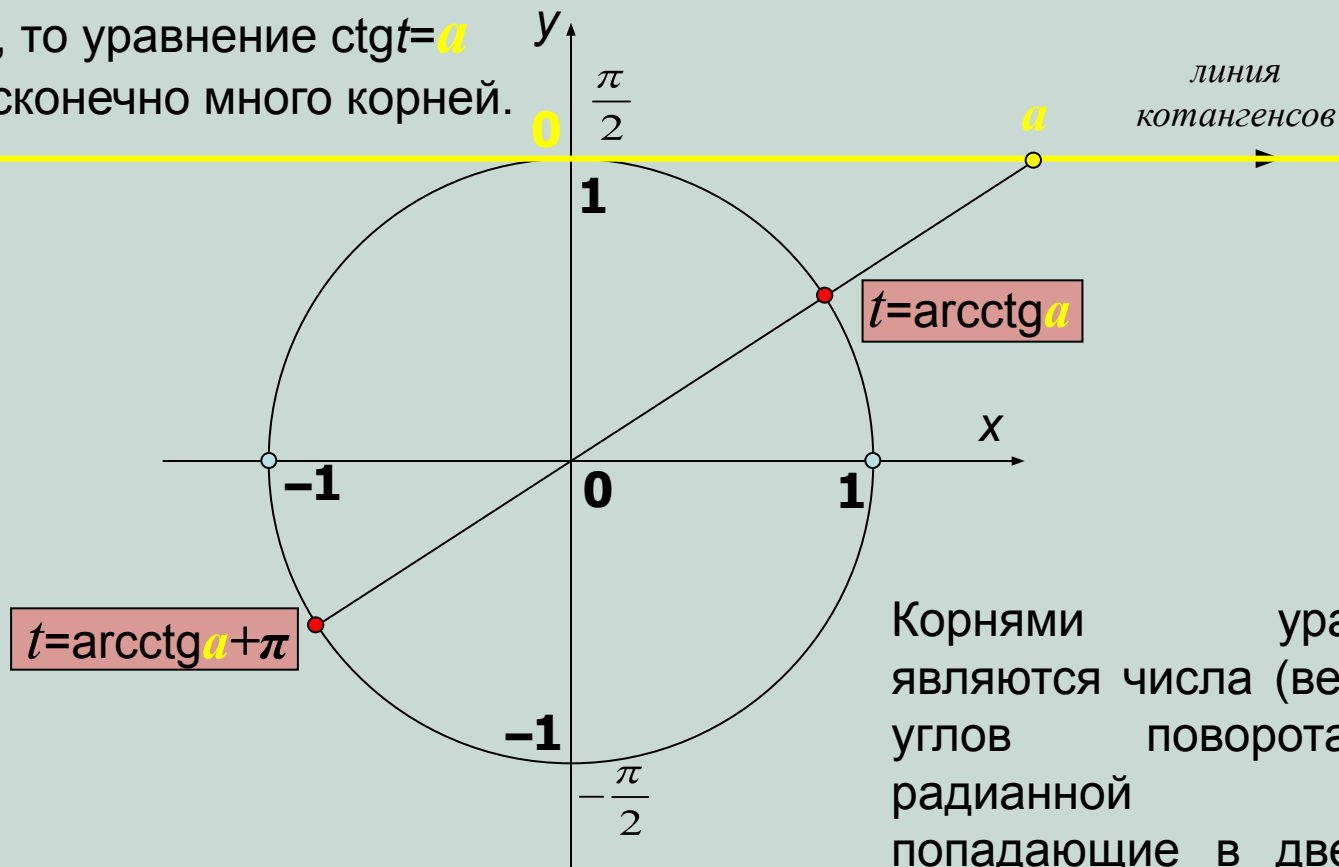
Корнями уравнения являются числа (величины углов поворота в радианной мере) попадающие в две точки тригонометрического круга, с соответствующими значениями (подумайте какими?):



Все эти корни принято записывать в виде:

$$t = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Так как $E(\text{ctg}) = \square$, то уравнение $\text{ctg}t = a$ всегда имеет бесконечно много корней.



Корнями уравнения являются числа (величины углов поворота в радианной мере) попадающие в две точки тригонометрического круга, с соответствующими значениями (подумайте какими?):

Все эти корни принято записывать в виде:

$$t = \text{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$