

# Свойства степени с рациональным показателем.

Бродецкая Т. А.,  
учитель математики  
МОУ «Гимназия № 4»,  
г.о. Электросталь





1

# Вспомним

## теорию

Арифметическим корнем  $n$  – ой степени ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ) из неотрицательного числа  $a$  называется такое неотрицательное число,  $n$  – я степень которого равна  $a$ :

$$\sqrt[n]{a^{2n+1}} = a, \quad n \in \mathbb{N} \quad ;$$

$$\sqrt[n]{a^{2n}} = |a|, \quad n \in \mathbb{N} \quad ;$$

$$\sqrt[nk]{a^{mn}} = \sqrt[k]{a^m}, \quad \text{при} \quad a \geq 0.$$



# Степень с рациональным показателем.

1)  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ , где  $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a > 0$ ;

Если  $\frac{m}{n} > 0$ , то  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$  при  $a \geq 0$ .

2) При  $a > 0, b > 0, p$  и  $q$  - рациональные числа:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$(ab)^p = a^p \cdot b^p$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$



# Тренировочные упражнения

1) Вычислить:  $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{-3} \cdot \sqrt{27} \cdot \sqrt[3]{9} - \frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{-64}}$  = -26,5

2) Найдите значение выражения  $\sqrt[5]{6-2\sqrt{17}} \cdot \sqrt[5]{6+2\sqrt{17}}$  = -2

3) Упростить выражение  $\frac{c \cdot c^{-\frac{1}{5}}}{\sqrt[5]{c^4}}$  = 1

4) Найдите значение выражения

$$\left( \frac{\sqrt{2c} - \sqrt{d}}{\sqrt{2c} + \sqrt{d}} - \frac{\sqrt{2c} + \sqrt{d}}{\sqrt{2c} - \sqrt{d}} \right) \cdot \left( \sqrt{\frac{d}{2c}} - \sqrt{\frac{2c}{d}} \right) = 4$$

5) Упростить выражение  $125^{\frac{1}{2}} + 8^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} - 5 \cdot 49^{\frac{1}{2}}$  =  $7\sqrt{5} - 35$

6) Упростить выражение

$$\sqrt{a^2 + 2 + 2\sqrt{a^2 + 1}} - \sqrt{a^2 + 2 - 2\sqrt{a^2 + 1}} = 2$$



# Задания для самостоятельной работы

Вычислить:

1)  $5(\sqrt{27} - \sqrt{3}) : \frac{2}{\sqrt{3}}$

2)  $((\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{8})^2 - 6)((\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{8})^2 + 6)$

3)  $\sqrt{8 - \sqrt{28}} - \sqrt{8 + \sqrt{28}}$

4)  $64^{-\frac{5}{6}} - (0,125)^{-\frac{1}{3}} - 32 \cdot 2^{-4} \cdot 16^{-1\frac{1}{2}} + (3^0)^4 \cdot 4$

5)  $(\sqrt[3]{100} + 2\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{4})$

Упростить:

6)

$$\frac{b^3 \sqrt{b^2}}{\sqrt[3]{b^4}}$$

7)

$$\left( \frac{0,5a^{\frac{1}{4}}}{(2-a)^{\frac{3}{4}}} + \frac{(2-a)^{\frac{1}{4}} \cdot a^{-\frac{3}{4}}}{2} \right) : (2a - a^2)^{-\frac{3}{4}}$$



# Проверка

$$1) \quad 5(\sqrt{27} - \sqrt{3}) : \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{5(3\sqrt{3} - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}}{2} = 15$$

$$2) \quad ((\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{8})^2 - 6)((\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{8})^2 + 6) =$$

$$= (\sqrt{2} + \sqrt{8} + 2\sqrt[4]{2 \cdot 8} - 6)(\sqrt{2} + \sqrt{8} - 2\sqrt[4]{2 \cdot 8} + 6) =$$

$$= (\sqrt{2} + \sqrt{8} - 2)(\sqrt{2} + \sqrt{8} + 2) = (\sqrt{2} + \sqrt{8})^2 - 4 =$$

$$= 2 + 8 + 2\sqrt{16} - 4 = 14$$



# Проверка

$$3) \sqrt{8 - \sqrt{28}} - \sqrt{8 + \sqrt{28}} =$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{1 - 2\sqrt{7} + 7} - \sqrt{1 + 2\sqrt{7} + 7} = \sqrt{(1 - \sqrt{7})^2} - \sqrt{(1 + \sqrt{7})^2} = \\ &= |1 - \sqrt{7}| - |1 + \sqrt{7}| = \sqrt{7} - 1 - 1 - \sqrt{7} = -2 \end{aligned}$$

$$4) 64^{-\frac{5}{6}} - (0,125)^{-\frac{1}{3}} - 32 \cdot 2^{-4} \cdot 16^{-\frac{1}{2}} + (3^0)^4 \cdot 4 =$$

$$\begin{aligned} &= (2^6)^{-\frac{5}{6}} - (0,5^3)^{-\frac{1}{3}} - 2^5 \cdot 2^{-4} \cdot (2^4)^{-\frac{3}{2}} + 1 \cdot 4 = \\ &= 2^{-5} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - 2 \cdot 2^{-6} + 4 = 2^{-5} - 2 - 2^{-5} + 4 = 2 \end{aligned}$$



# Проверка

$$5) (\sqrt[3]{100} + 2\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{4}) =$$

По формуле  $(a^2 + ab + b^2)(a - b) = a^3 - b^3$  следует

$$= (\sqrt[3]{10})^3 - (\sqrt[3]{4})^3 = 10 - 4 = 6$$

$$6) \frac{b^3 \sqrt{b^2}}{\sqrt[3]{b^4}} = b^{1 + \frac{2}{3} - \frac{4}{3}} = b^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{b}$$





# Проверка

$$7) \left( \frac{0,5a^{\frac{1}{4}}}{(2-a)^{\frac{3}{4}}} + \frac{(2-a)^{\frac{1}{4}} \cdot a^{-\frac{3}{4}}}{2} \right) : (2a - a^2)^{-\frac{3}{4}} = 1$$

$$1) \frac{2 \cdot 0,5a^{\frac{1}{4}} + (2-a)^{\frac{3}{4}} (2-a)^{\frac{1}{4}} \cdot a^{-\frac{3}{4}}}{2 \cdot (2-a)^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{4}} (2-a)^{\frac{3}{4}}};$$

$$2) \frac{1 \cdot a^{\frac{3}{4}} (2-a)^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{3}{4}} (2-a)^{\frac{3}{4}}} = 1$$

# Задание на дом.

- Тренировочный тест по теме «Свойства степени с рациональным показателем» (проверка на следующем уроке).



# Тренировочный тест.

1. Найдите значение выражения:  $6 \cdot 8^{-\frac{1}{3}}$ .

1) 12; 2) 6; 3) 3; 4) -3.

2. Выберите верное неравенство:

1)  $2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{2}}$ ; 2)  $0,3^{\frac{1}{2}} > 0,5^{\frac{1}{2}}$ ; 3)  $1,5^{\frac{1}{3}} < 1$ ; 4)  $3^{-8} < 0$ .

3. Среди данных чисел выберите наибольшее:

1)  $5^{\frac{1}{2}}$ ; 2)  $5^{\frac{1}{3}}$ ; 3)  $5^{\frac{1}{4}}$ ; 4) 5.

4. Представьте данное выражение в виде степени:

$$y^{1,7} \cdot y^{2,8} \cdot y^{-1,5}.$$

1)  $y^{-3}$ ; 2)  $y^{-7,14}$ ; 3)  $y^3$ ; 4)  $y^6$ .

5. Упростите выражение:  $b^{-0,2} : b^{-0,7}$ .

1)  $\sqrt{b}$ ; 2)  $\frac{1}{\sqrt{b}}$ ; 3)  $b^{-0,9}$ ; 4)  $b^{\frac{2}{7}}$ .

## (продолжение).

6. Упростите выражение:  $(a^{-1,5})^{\frac{2}{3}}$ .

- 1)  $a$ ;    2)  $a^{-\frac{5}{6}}$ ;    3)  $a^{\frac{5}{6}}$ ;    4)  $\frac{1}{a} \cdot \left(\frac{36^3}{125^2}\right)^{\frac{1}{6}}$ .

7. Найдите значение выражения:  $\left(\frac{36^3}{125^2}\right)^{\frac{1}{6}}$ .

- 1)  $\frac{5}{6}$ ;    2)  $1,2$ ;    3)  $\frac{36}{125}$ ;    4)  $\frac{6}{25}$ .

8. Найдите значение выражения:  $\left(2^{\frac{5}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} - 3^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot \sqrt[3]{6}$ .

- 1)  $-4$ ;    2)  $9$ ;    3)  $-5$ ;    4)  $5$ .

9. Сократите дробь:

- 1)  $\frac{x^{11}}{x^{11}-1}$ ;    2)  $\frac{x^{11}+1}{x^{11}}$ ;    3)  $\frac{1}{x^{11}}$ ;    4)  $\frac{x^{33}-1}{x^{33}+x^{22}+x^{11}} \cdot \frac{x^{11}-1}{x^{11}}$ .

10. Найдите значение выражения:

$$\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^{-1}}}\right)^{\frac{3}{4}}$$

при  $x = 0,0625$

- 1)  $0,5$ ;    2)  $2$ ;    3)  $4$ ;    4)  $0,25$ .

**(продолжение)**

11. Вычислите:  $-24 \cdot 125 \cdot \frac{1}{7} - 39$ . 1)  $-1139$ ; 2)  $-159$ ; 3)  $-81$ ; 4)  $81$ .

12. Вычислите:  $4,7 - 8 \cdot 2^3$ . 1)  $-11,3$ ; 2)  $5,3$ ; 3)  $-7,3$ ; 4)  $11,3$ .

13. Вычислите:  $\frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{36}}$ . 1)  $1$ ; 2)  $2$ ; 3)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ; 4)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

14. Вычислите:  $\frac{(0,216^{\frac{4}{9}})^{\frac{3}{2}}}{0,09^{\frac{3}{4}} \cdot 0,027^{\frac{1}{6}}}$ .

1)  $0,04$ ; 2)  $0,4$ ; 3)  $4$ ; 4)  $0,16$ .

15. Вычислите:  $18 \cdot 27^{-\frac{2}{3}} - 0,4$ . 1)  $1,6$ ; 2)  $161,6$ ; 3)  $2,6$ ; 4)  $5,6$ .

16. Упростите выражение  $\frac{1-y^{\frac{3}{2}}}{1+y^{\frac{1}{2}}+y} + 2\sqrt{y}$ .

1)  $1 + \sqrt{y}$ ; 2)  $1 + 2\sqrt{y}$ ; 3)  $2\sqrt{y} - 1$ ; 4)  $(1 - \sqrt{y})^2$ .

17. Упростите выражение:  $\frac{a^{\frac{2}{3}} - 16}{a^{\frac{1}{3}} - 4} - a^{\frac{1}{3}}$ .

1)  $-4$ ; 2)  $4$ ; 3)  $-2a^{\frac{1}{3}}$ ; 4)  $0$ .

18. Вычислите:  $\left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ .

1)  $2$ ; 2)  $2\frac{1}{2}$ ; 3)  $3$ ; 4)  $1\frac{1}{2}$ .

**(продолжение)**  $(0,216^{\frac{8}{27}})^{\frac{9}{4}}$

19. Найдите значение выражения

- 1) 0,36;                      2) 3,6;                      3) 0,6;                      4) 0,18.

20. Вычислите:  $0,064^{\frac{1}{6}} \cdot 0,16^{\frac{1}{4}}$ . 1) 0,04; 2) 0,4; 3) 0,2; 4) 0,8.

21. Вычислите:  $9^{-\frac{3}{2}} - (5^0)^3 \cdot 3 + (0,01)^{-0,5} - 9 \cdot 3^{-3} \cdot 27^{-\frac{2}{3}}$ .

- 1) 13;                      2) 7;                      3) 3;                      4) .

22. Вычислите:  $5 \cdot 25^{0,5} \frac{\Gamma}{2}$ . 1) 8; 2) 23; 3) 123; 4)  $\sqrt{125} \cdot 2$ .

23. Вычислите:  $24 \cdot 16 \frac{2}{6}$ . 1) 0; 2) 6; 3) 42; 4) 90.

24. Вычислите:  $\frac{35}{25^{\frac{1}{2}}} \cdot 4^{\frac{1}{2}}$ .

- 1)  $\frac{28}{5}$ ;                      2) 1;                      3) 3,5;                      4) 14.

25. Вычислите:  $2^3 \cdot 2^{-2} + 2^{-3} \cdot 2^2 + 1,25$ .

- 1)  $1\frac{9}{32}$ ;                      2) 2,5;                      3) 3,75;                      4) 1,25.

26. Вычислите:  $\frac{1}{(5 \cdot 4)^{-2}} - \frac{1}{(2 \cdot 10)^{-2}}$ .

- 1) -63;                      2) 63;                      3)  $-\frac{25}{1296}$ ;                      4) 0.

## (продолжение)

27. Вычислите:  $2 \cdot \left(\frac{1}{64^{-\frac{1}{3}}}\right)^{+0,8}$ .

- 1) 1,3;      2) 5,2;      3) 8,8;      4) 16,8.

28. Упростите выражение:  $a^{\frac{1}{4}} : a^{-0,75}$ .

- 1)  $a^{\frac{1}{2}}$ ;      2)  $\frac{1}{a}$ ;      3)  $a^{-\frac{1}{2}}$ ;      4)  $a$ .

29. Упростите выражение:  $a^{-\frac{1}{2}} : a^{-\frac{6}{7}}$ .

- 1)  $a^{\frac{9}{14}}$ ;      2)  $a^{-\frac{9}{14}}$ ;      3)  $a^{\frac{9}{7}}$ ;      4)  $a^{\frac{7}{4}}$ .

30. Найдите значение выражения  $3^{\frac{1}{p}}$  при  $p = \frac{1}{2}$ .

- 1) 0;      2) 1;      3) 9;      4) 3.

31. Найдите значение выражения  $\frac{1}{3^{-4p}} \cdot 2^6$  при  $p = -$ .

- 1) 9;      2)  $\frac{1}{3^4}$ ;      3)  $3^{20}$ ;      4) 81.

32. Найдите наименьшее число:

- 1)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ;      2)  $2^{-\frac{1}{2}}$ ;      3)  $1^{-\frac{1}{2}}$ ;      4)  $4^{-\frac{1}{2}}$ .

# Тренировочный тест (ответы).

|                                       |          |          |          |          |          |          |          |          |          |           |           |           |           |           |           |           |
|---------------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| <b>№</b><br><b>воп</b><br><b>роса</b> | <b>1</b> | <b>2</b> | <b>3</b> | <b>4</b> | <b>5</b> | <b>6</b> | <b>7</b> | <b>8</b> | <b>9</b> | <b>10</b> | <b>11</b> | <b>12</b> | <b>13</b> | <b>14</b> | <b>15</b> | <b>16</b> |
| <b>Отв</b><br><b>ет</b>               | <b>3</b> | <b>1</b> | <b>4</b> | <b>3</b> | <b>1</b> | <b>4</b> | <b>2</b> | <b>3</b> | <b>4</b> | <b>1</b>  | <b>2</b>  | <b>1</b>  | <b>3</b>  | <b>3</b>  | <b>1</b>  | <b>1</b>  |

|                                       |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |
|---------------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| <b>№</b><br><b>воп</b><br><b>роса</b> | <b>17</b> | <b>18</b> | <b>19</b> | <b>20</b> | <b>21</b> | <b>22</b> | <b>23</b> | <b>24</b> | <b>25</b> | <b>26</b> | <b>27</b> | <b>28</b> | <b>29</b> | <b>30</b> | <b>31</b> | <b>32</b> |
| <b>Отв</b><br><b>ет</b>               | <b>2</b>  | <b>1</b>  | <b>1</b>  | <b>2</b>  | <b>2</b>  | <b>2</b>  | <b>4</b>  | <b>3</b>  | <b>3</b>  | <b>4</b>  | <b>3</b>  | <b>4</b>  | <b>2</b>  | <b>4</b>  | <b>4</b>  | <b>4</b>  |



# Используемая литература

- Алгебра и начала анализа. Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений. А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др. Москва. «Просвещение» 2010г.
- Журнал «Математика. Первое сентября» № 19, 2008г., «Подготовка к ЕГЭ».
- Сборники для подготовки к ЕГЭ по математике.
- Интернет – ресурс. Сайт <http://www.mathege.ru>. Открытый банк задач по математике.
- Тест по теме «Свойства степени с рациональным показателем»:  
<http://ov1098.jimdo.com/%D1%83%D1%87%D0%B0%D1%89%D0%B8%D0%BC%D1%81%D1%8F/11-%D0%BA%D0%BB%D0%B0%D1%81%D1%81-%D1%82%D0%B5%D1%81%D>