

Геометрия, 11 класс

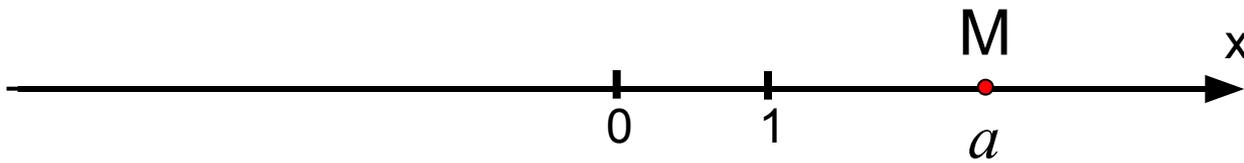


Р. Декарт
(1596-1650)

Система координат в пространстве

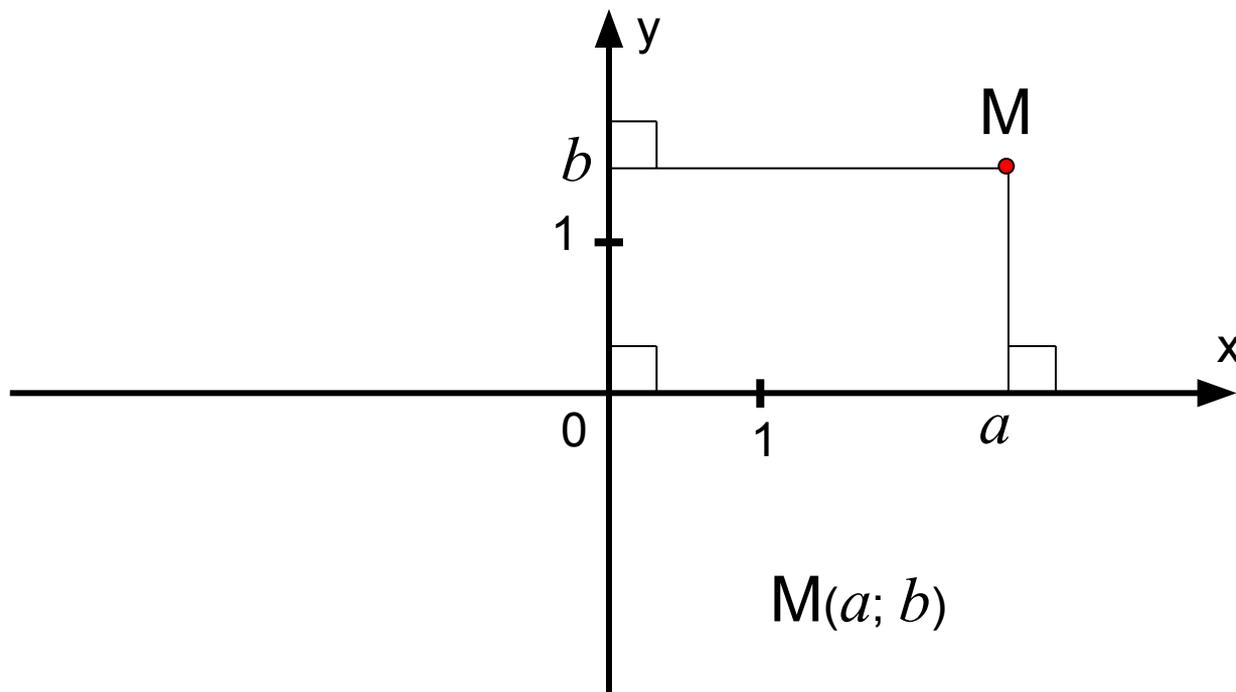
Вспомним, как определяется координатная(числовая) прямая.

- 1) Изображаем произвольную прямую;
- 2) Придаем ей положительное направление и обозначаем её;
- 3) Выбираем произвольную точку за начало отсчета;
- 4) Определяем длину единичного отрезка (масштаб).

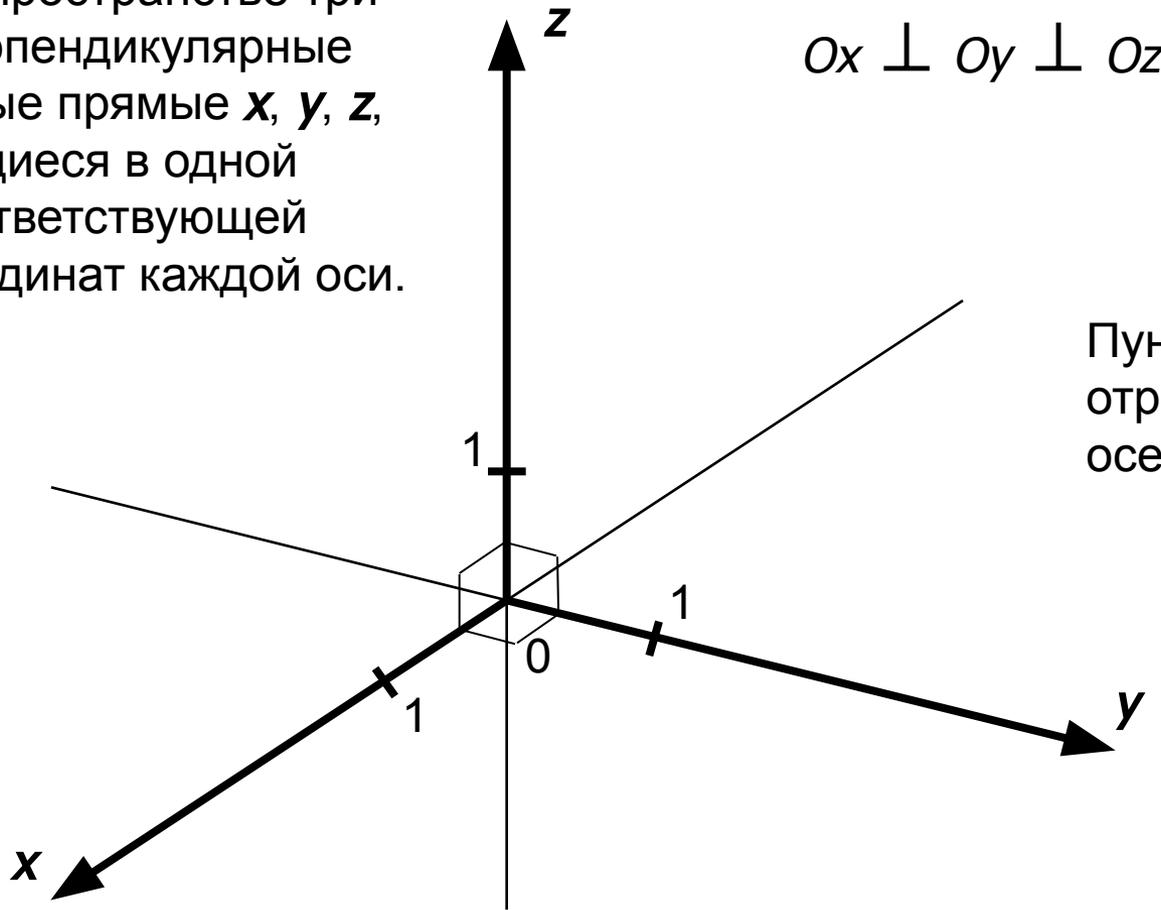


Тогда любой точке этой координатной прямой соответствует единственное действительное число a . И наоборот, любое действительное число может быть изображено единственной соответствующей точкой, для которой это число является координатой. Записывают: $M(a)$.

А теперь, что мы подразумеваем под координатной плоскостью.



Выберем в пространстве три попарно перпендикулярные координатные прямые x , y , z , пересекающиеся в одной точке O , соответствующей началу координат каждой оси.



$$Ox \perp Oy \perp Oz$$

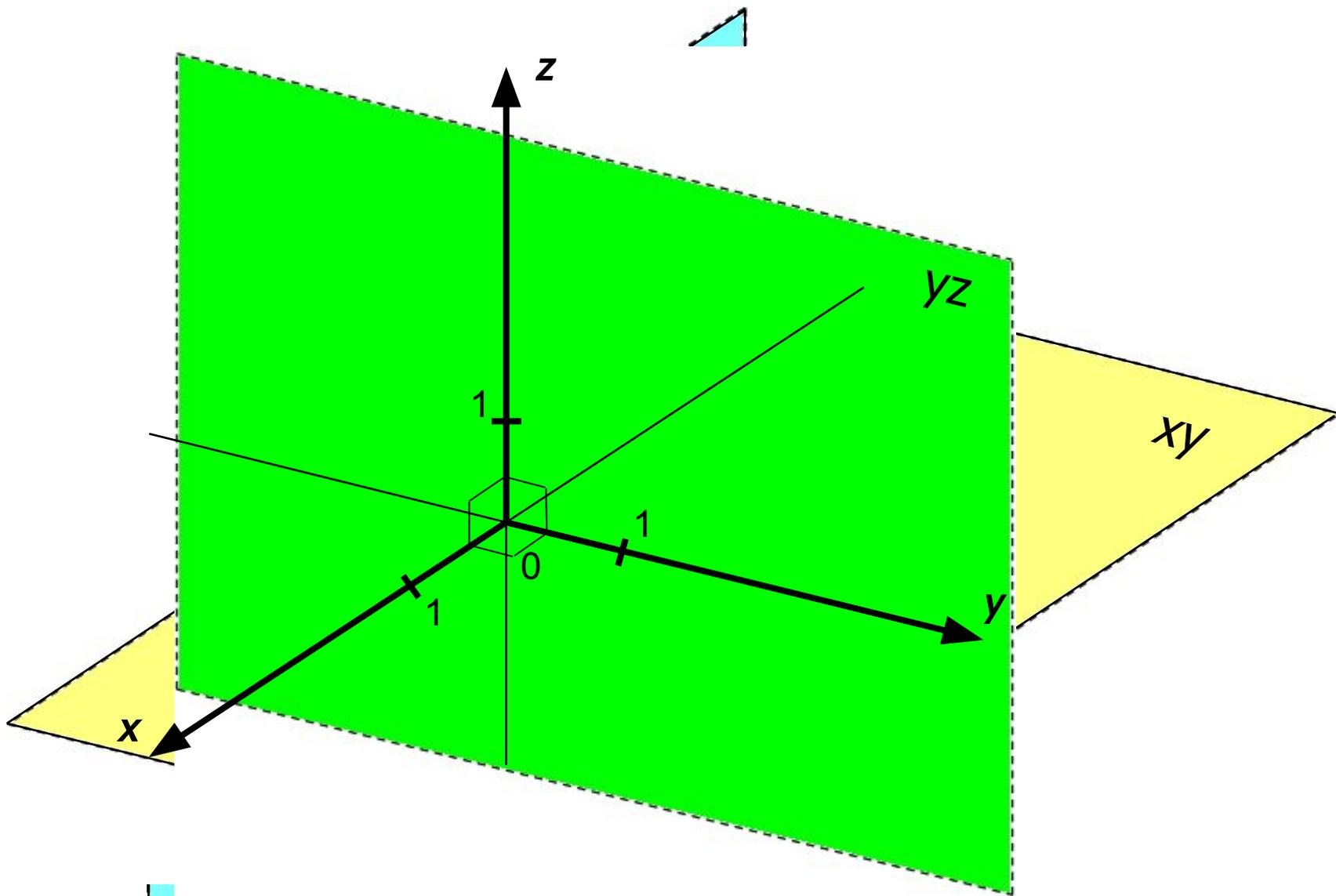
Пунктиром показаны отрицательные части осей.

Координатные оси:

Ox – ось абсцисс

Oy – ось ординат

Oz – ось аппликат

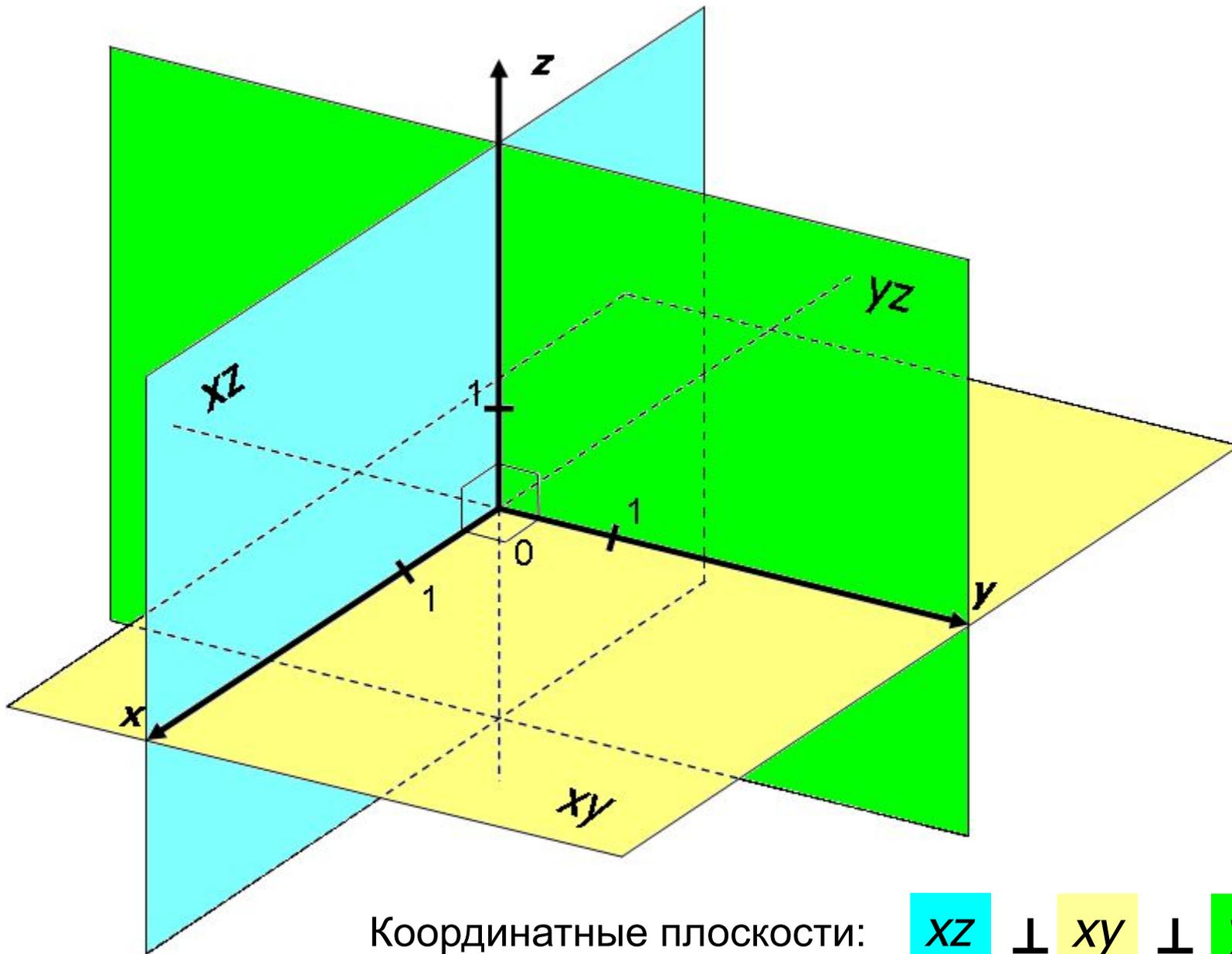


Координатные плоскости:

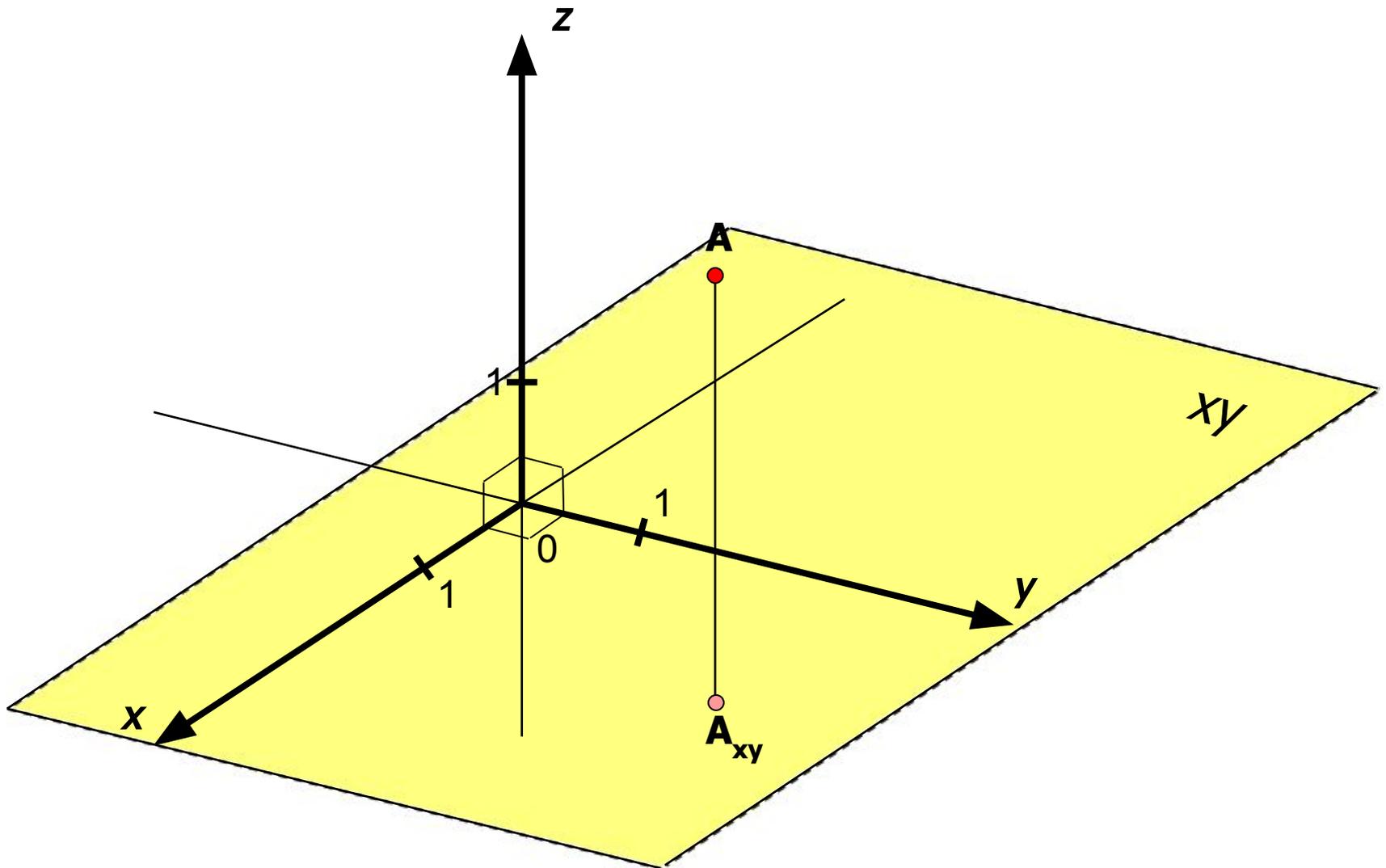
Oxz

Oxy

Oyz



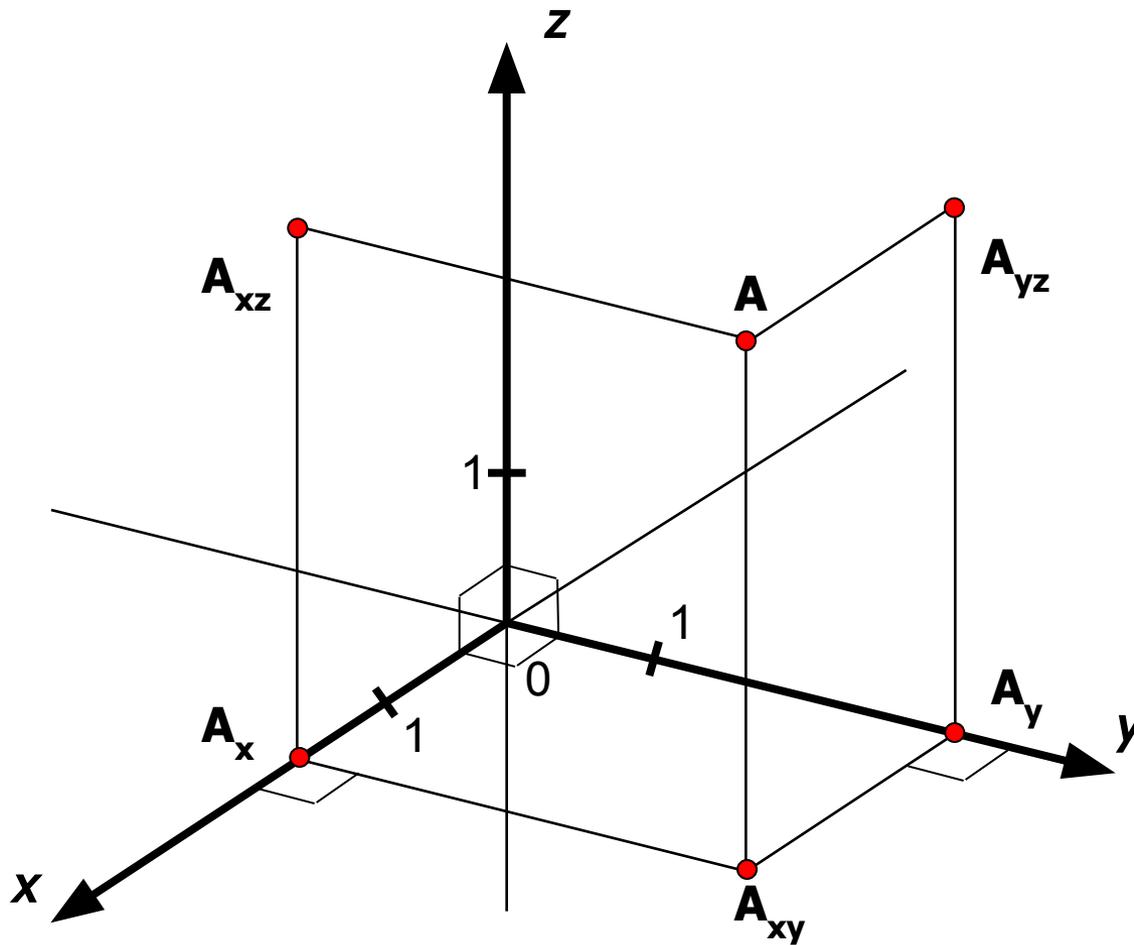
Координатные плоскости: XZ \perp XY \perp YZ



Положение любой точки в пространстве определяется **тремя** координатами .

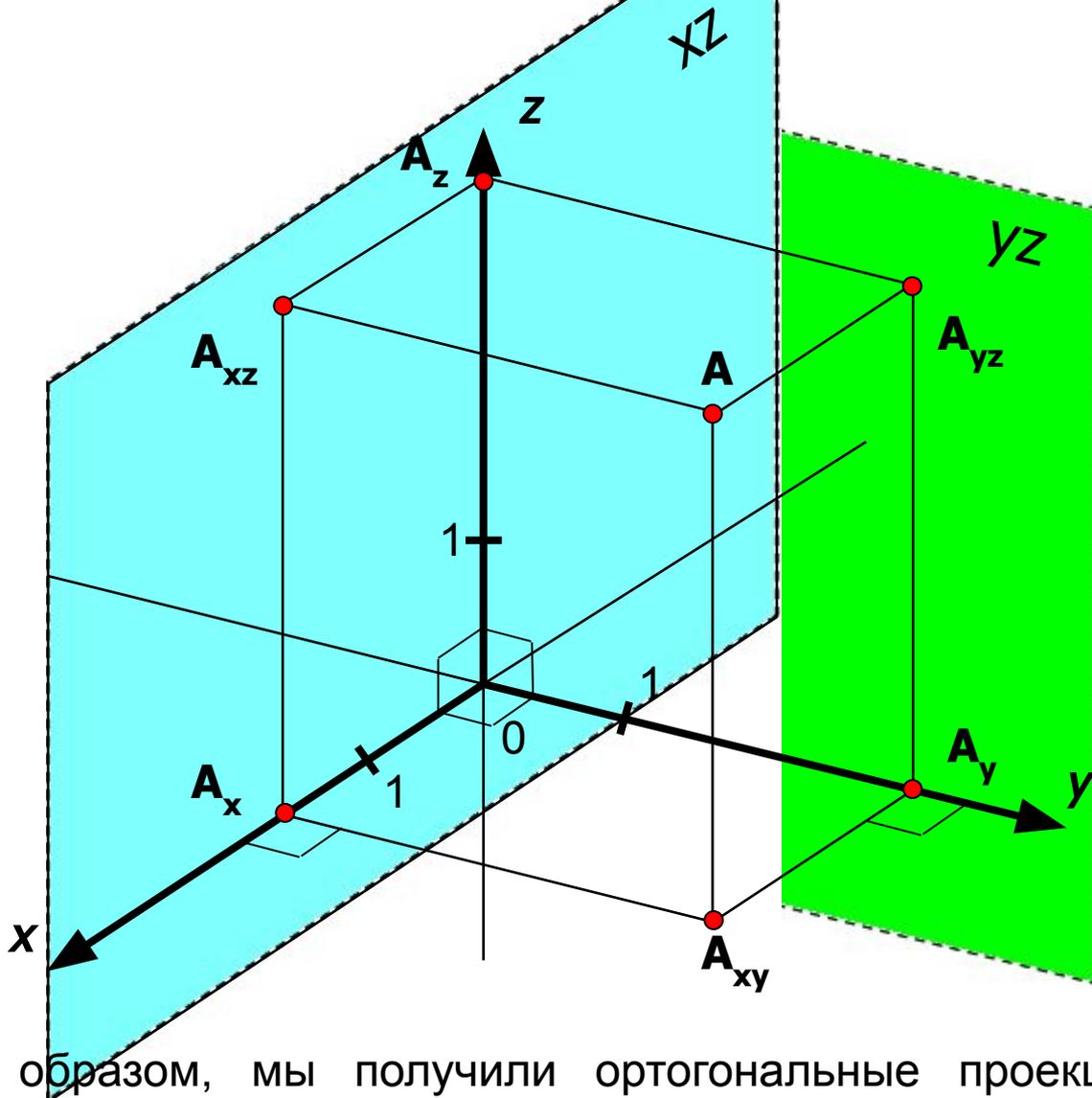
Проследим как их получить:

1) проведем перпендикуляр из точки **A** к плоскости **Oxy** , обозначив точку пересечения **A_{xy}** (или **A_{xy}** – ортогональная проекция точки **A** на плоскость **Oxy**) ;



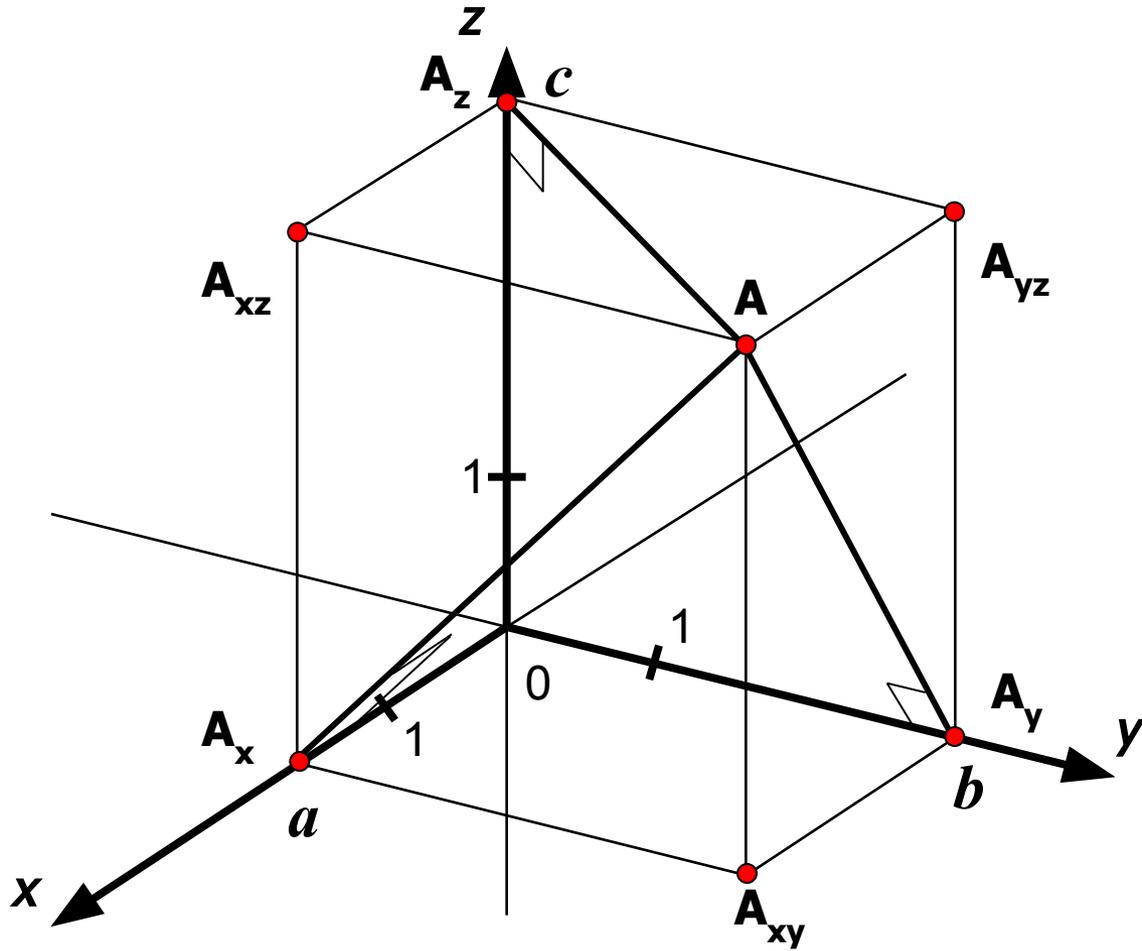
2) Далее, в плоскости Oxy , из точки A_{xy} опустим перпендикуляры на координатные оси этой плоскости;

3) Построим прямую пересечения $A_x A_{xz}$ плоскостей Oxz и $(AA_{xy} A_x)$ – по свойству она параллельна AA_{xy} ; аналогично, $Oyz \cap (AA_{xy} A_y) = A_y A_{yz}$;



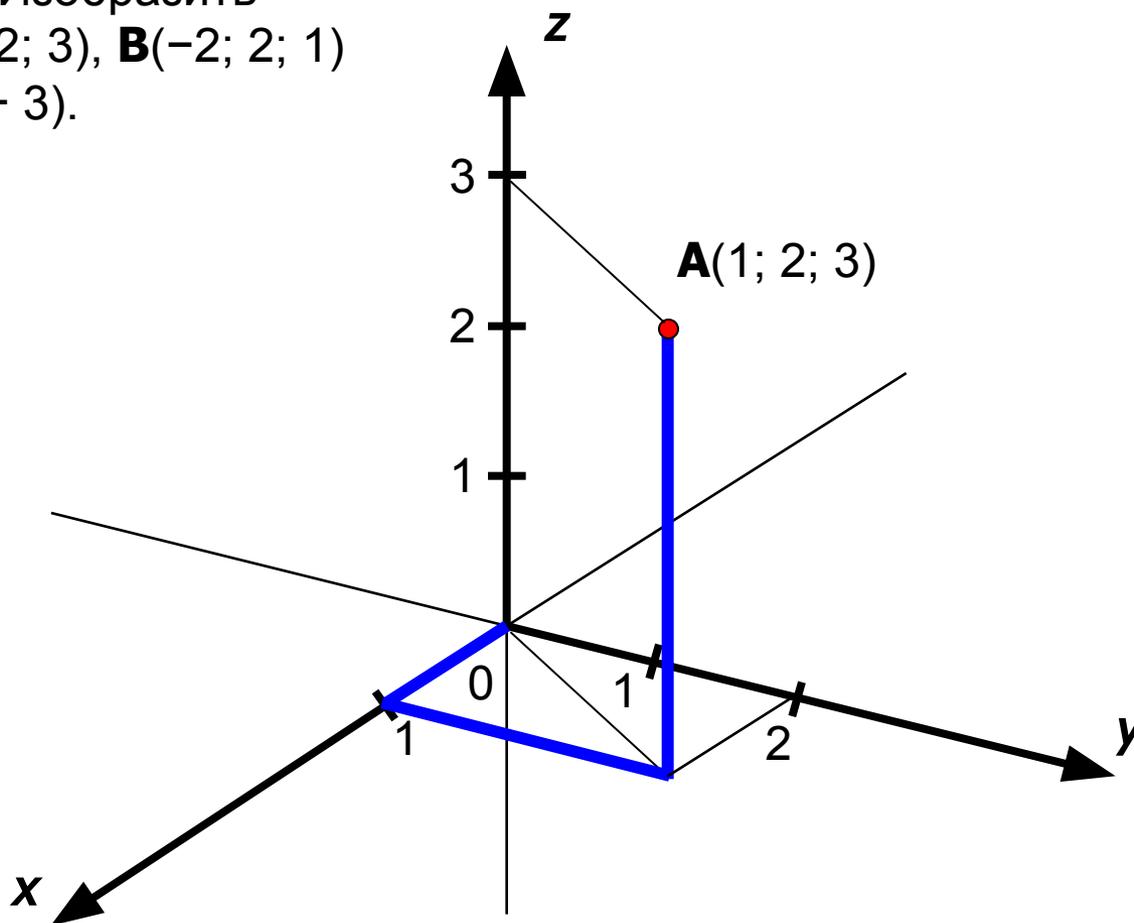
4) Таким образом, мы получили ортогональные проекции точки A на координатные плоскости – точки A_{xz} и A_{yz} ;

5) Осталось опустить перпендикуляры из точек A_{yz} и A_{xz} на координатную ось аппликат;



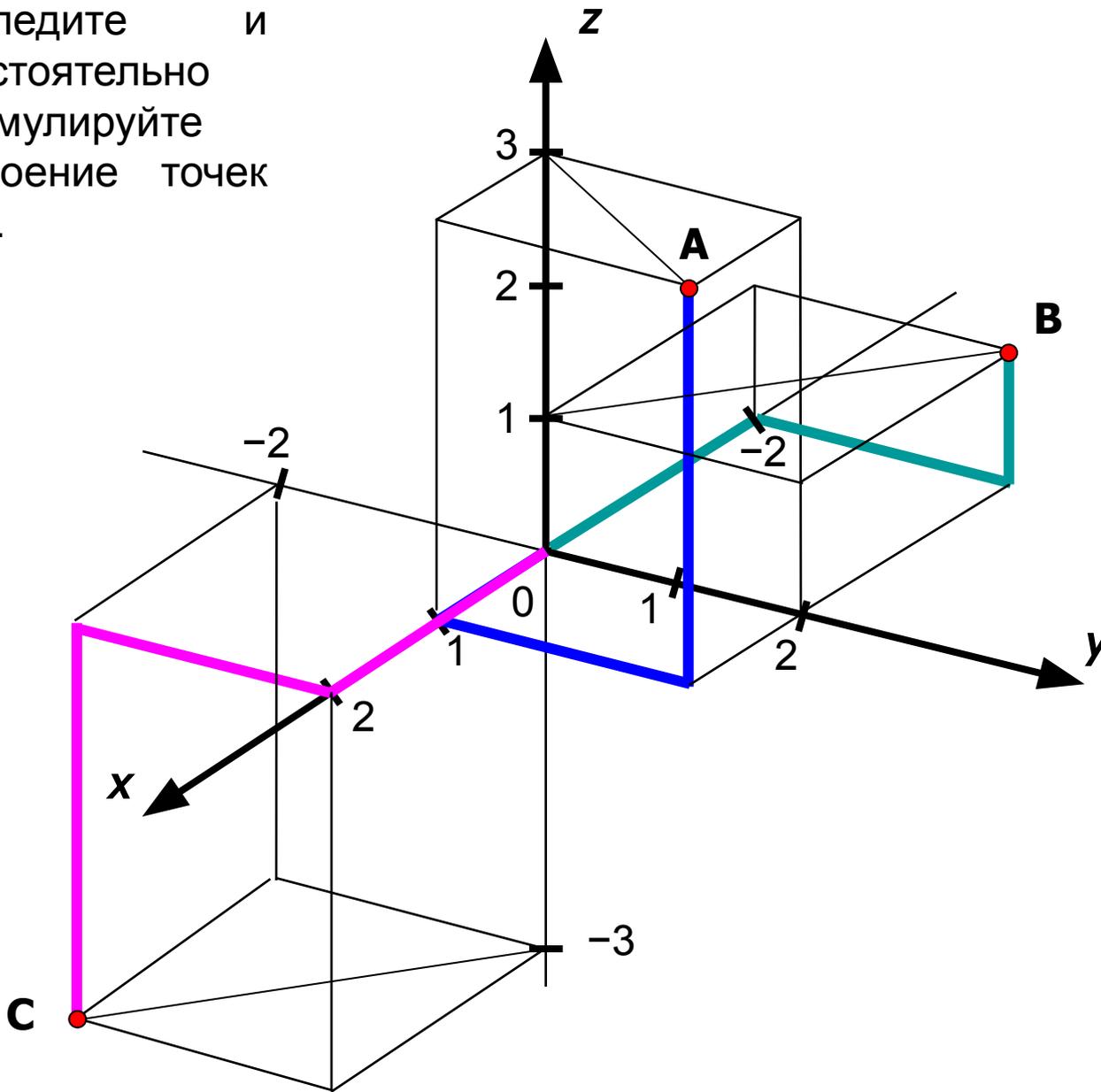
Тогда, $\mathbf{AA}_x \perp O_x$, $\mathbf{AA}_y \perp O_y$ и $\mathbf{AA}_z \perp O_z$ (объясните почему?). Числа a ; b ; c , соответствующие координатам точек \mathbf{A}_x , \mathbf{A}_y и \mathbf{A}_z на числовых осях и являются **координатами** точки \mathbf{A} . Записывают : $\mathbf{A}(a; b; c)$. Очевидно, что начало координат в пространстве $O(0; 0; 0)$.

Пример 1. Изобразить точки $\mathbf{A}(1; 2; 3)$, $\mathbf{B}(-2; 2; 1)$ и $\mathbf{C}(2; -2; -3)$.



Для изображения точки \mathbf{A} построим ломанную, состоящую из трех последовательных звеньев. От начала координат откладываем 1 ед.отр. вдоль оси \mathbf{Ox} . Затем второе звено длиной 2 ед.отр. параллельно оси \mathbf{Oy} . И последний отрезок длиной 3 ед.отр. параллельно оси \mathbf{Oz} .

Проследите и самостоятельно сформулируйте построение точек **В** и **С**.

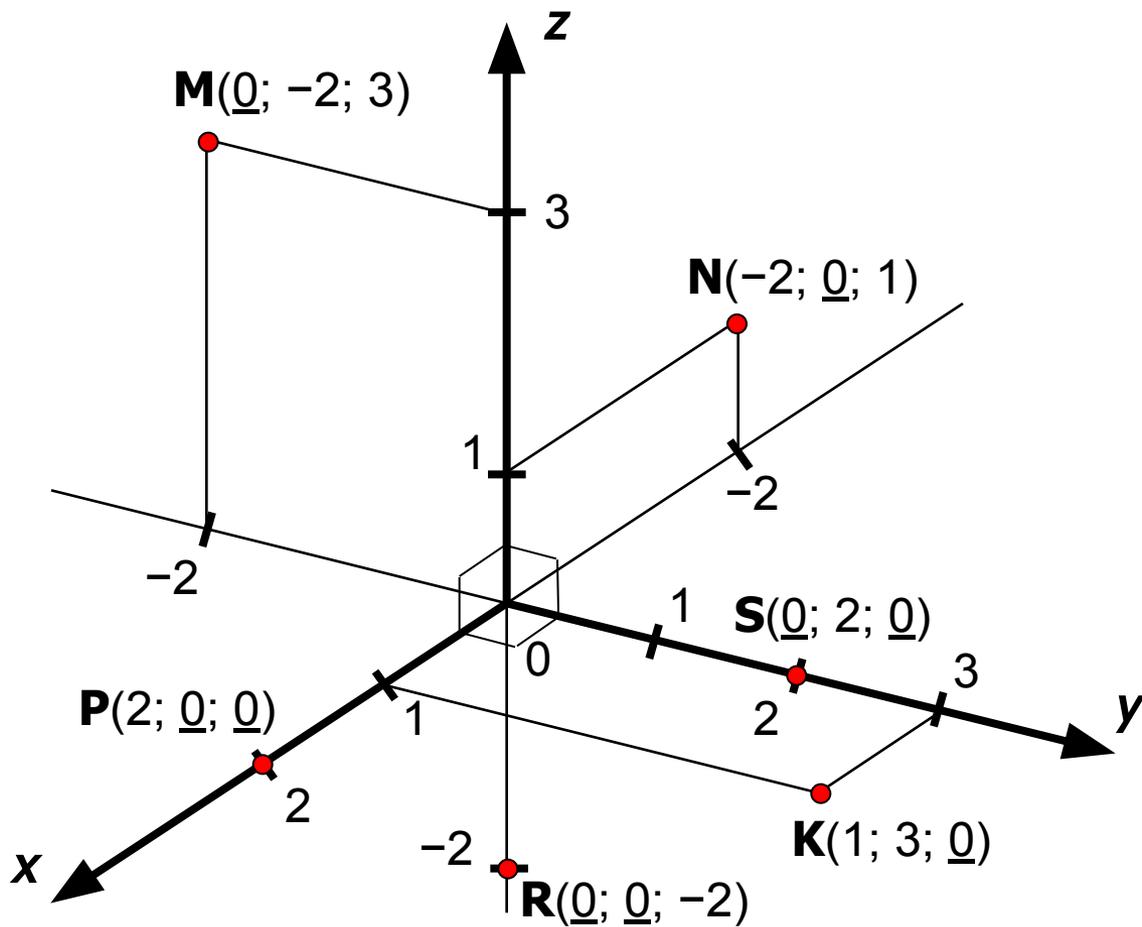


$$\mathbf{A}(1; 2; 3)$$

$$\mathbf{B}(-2; 2; 1)$$

$$\mathbf{C}(2; -2; -3)$$

Отметим некоторые свойства координат точек:

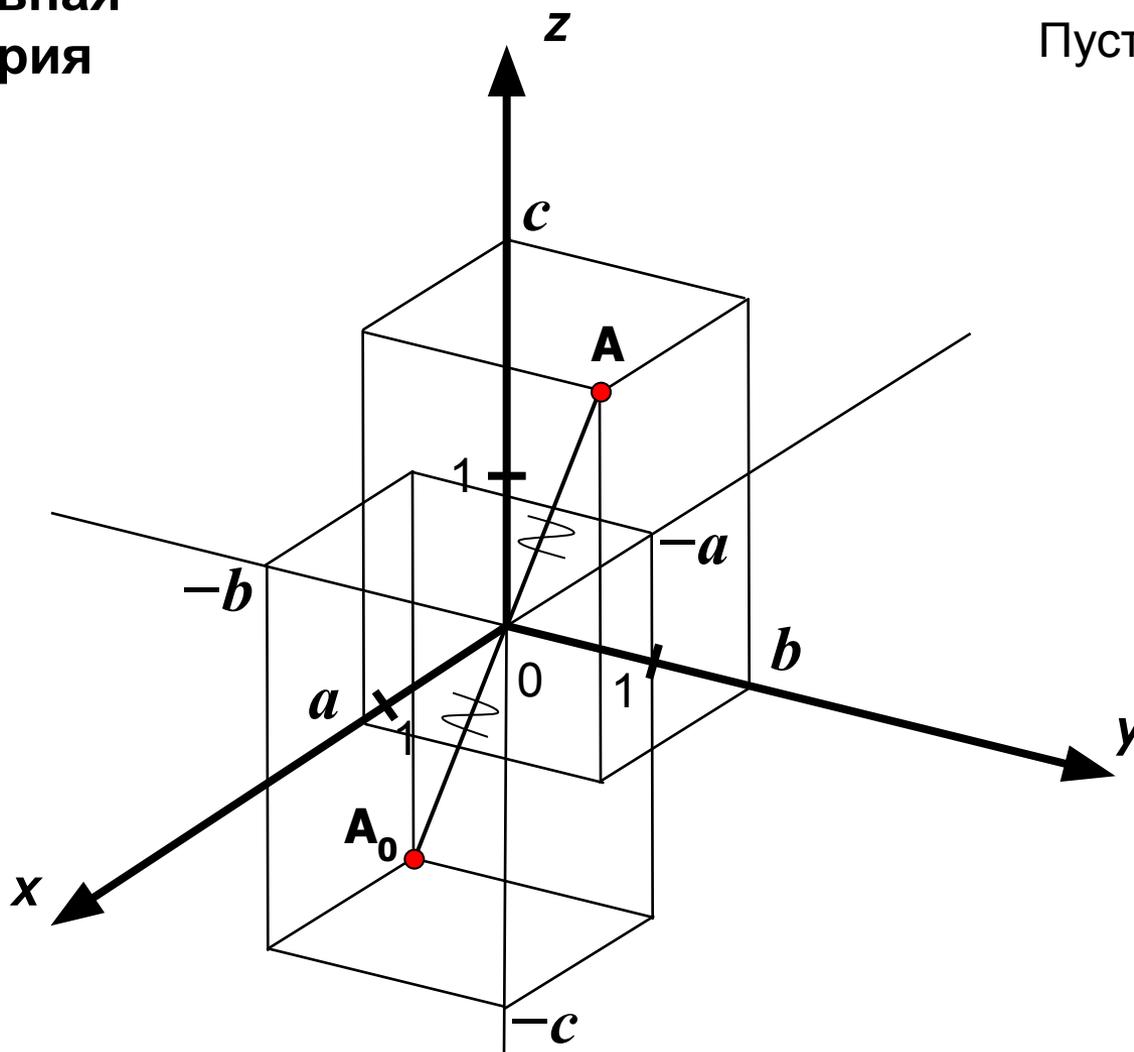


1). Если одна из координат точки равна 0 , то точка лежит в одной из координатных плоскостей; (например, $M \in Oyz$, $N \in Oxz$, $K \in Oxy$).

2). Если две координаты точки равны 0 , то точка принадлежит одной из координатных осей; (например, $P \in Ox$, $S \in Oy$, $R \in Oz$).

Центральная симметрия

Пусть $\mathbf{A}(a; b; c)$

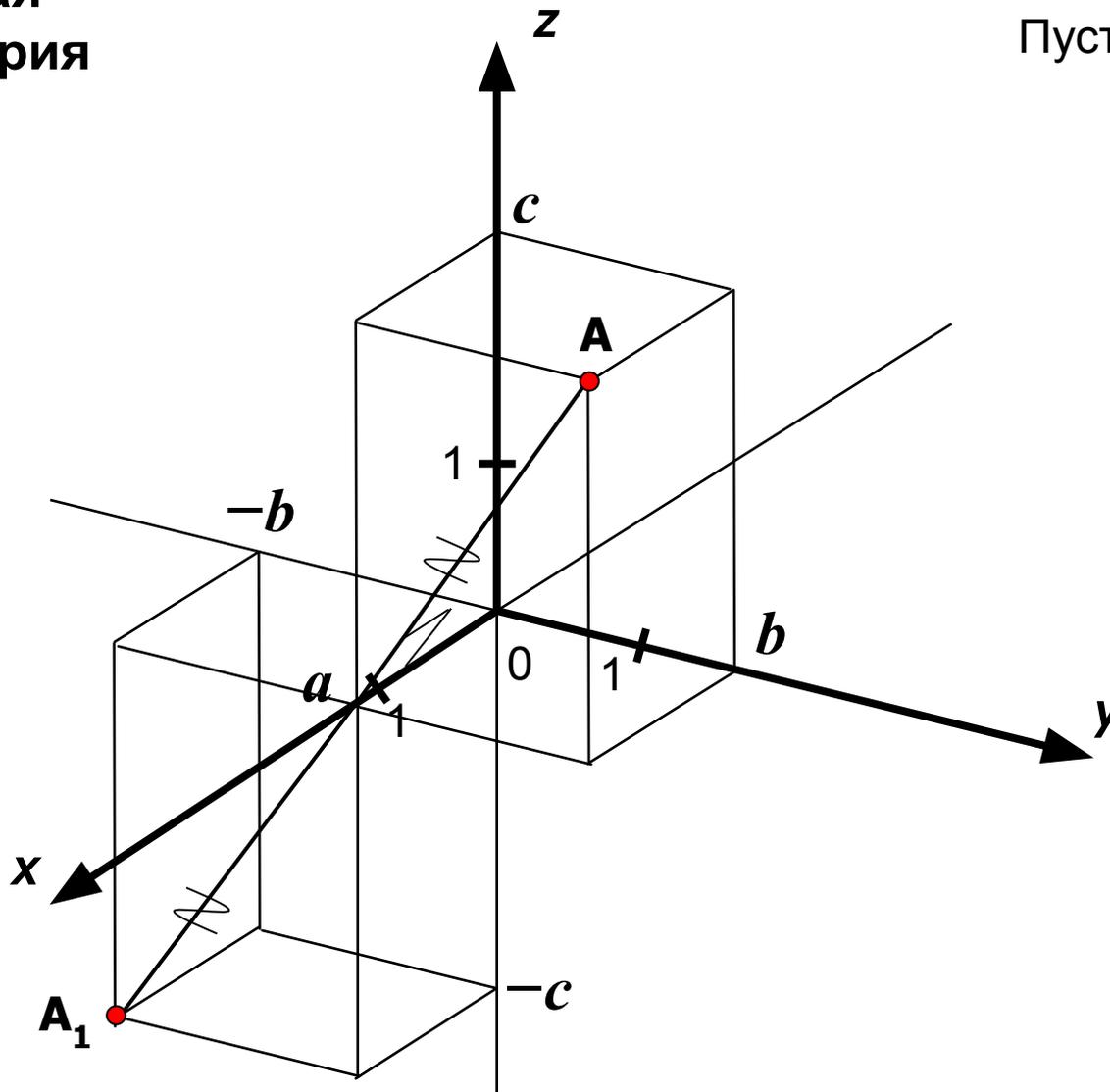


Построим точку \mathbf{A}_0 , симметричную данной точке относительно точки O .

3). Тогда координаты точки $\mathbf{A}_0(-a; -b; -c)$.

Осевая
симметрия

Пусть $\mathbf{A}(a; b; c)$

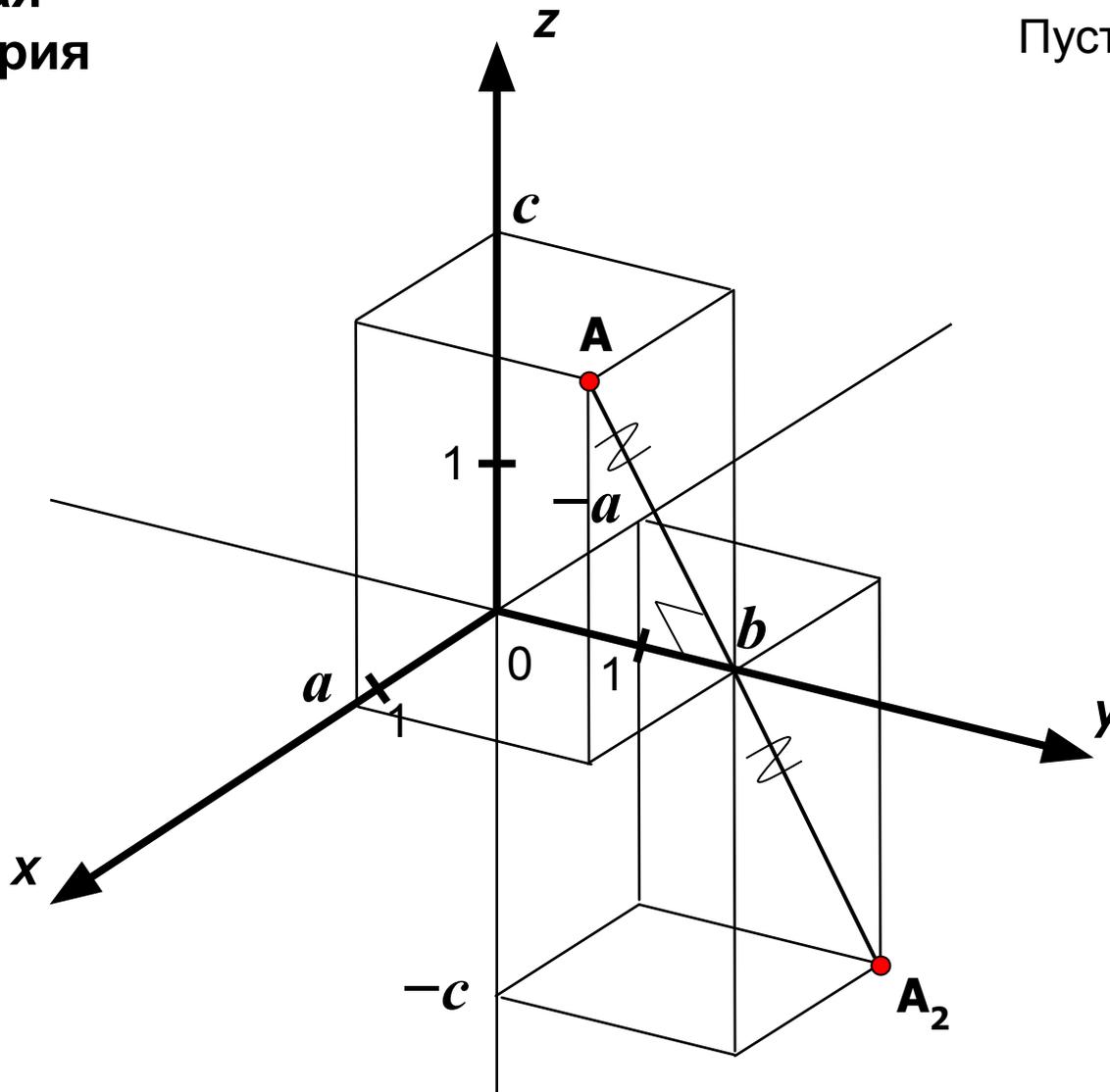


Построим точку \mathbf{A}_1 , симметричную данной точке относительно оси Ox .

4). Тогда координаты точки $\mathbf{A}_1(a; -b; -c)$.

Осевая
симметрия

Пусть $\mathbf{A}(a; b; c)$

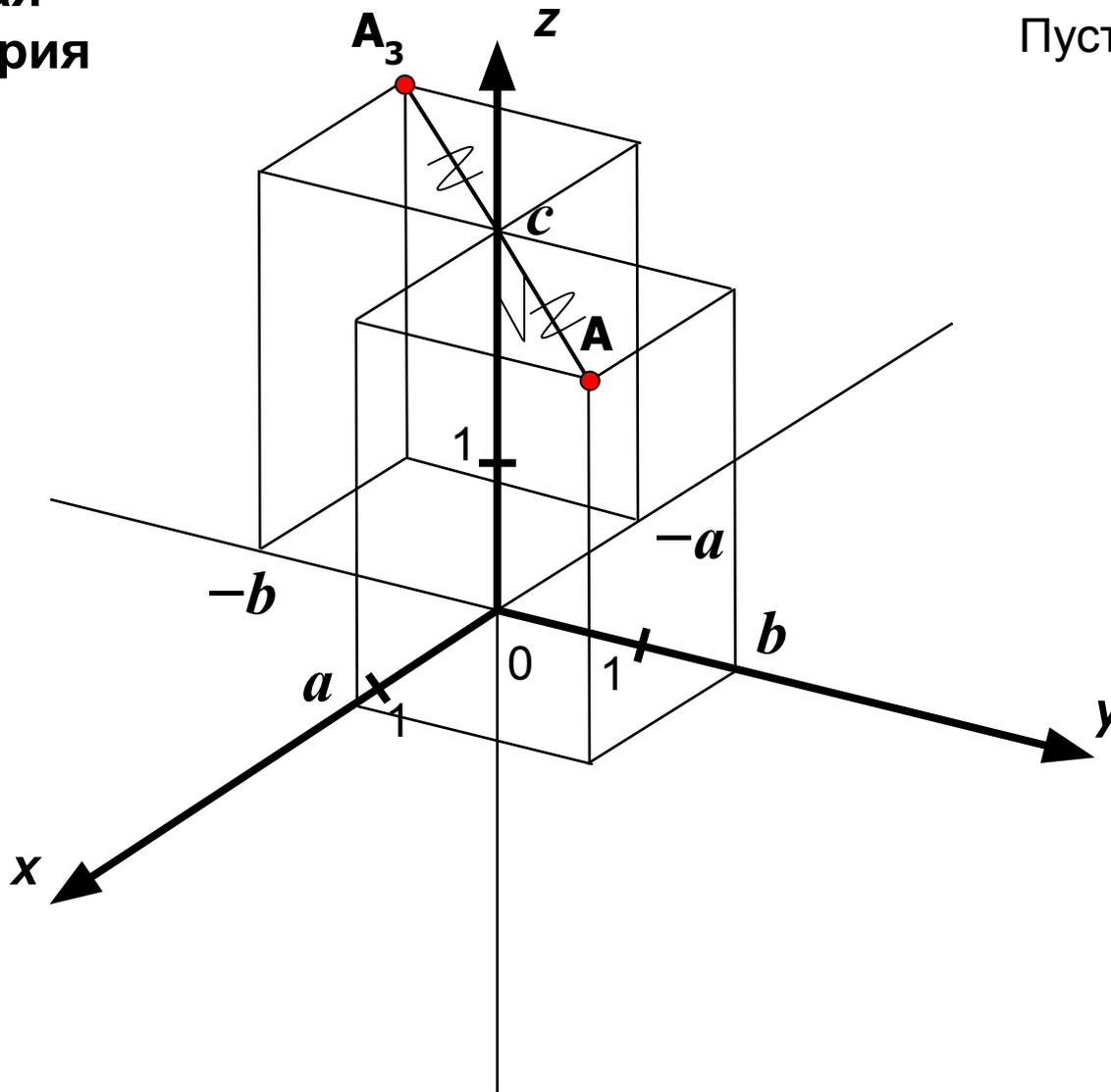


Построим точку \mathbf{A}_2 , симметричную данной точке относительно оси Oy .

5). Тогда координаты точки $\mathbf{A}_2(-a; b; -c)$.

Осевая
симметрия

Пусть $\mathbf{A}(a; b; c)$

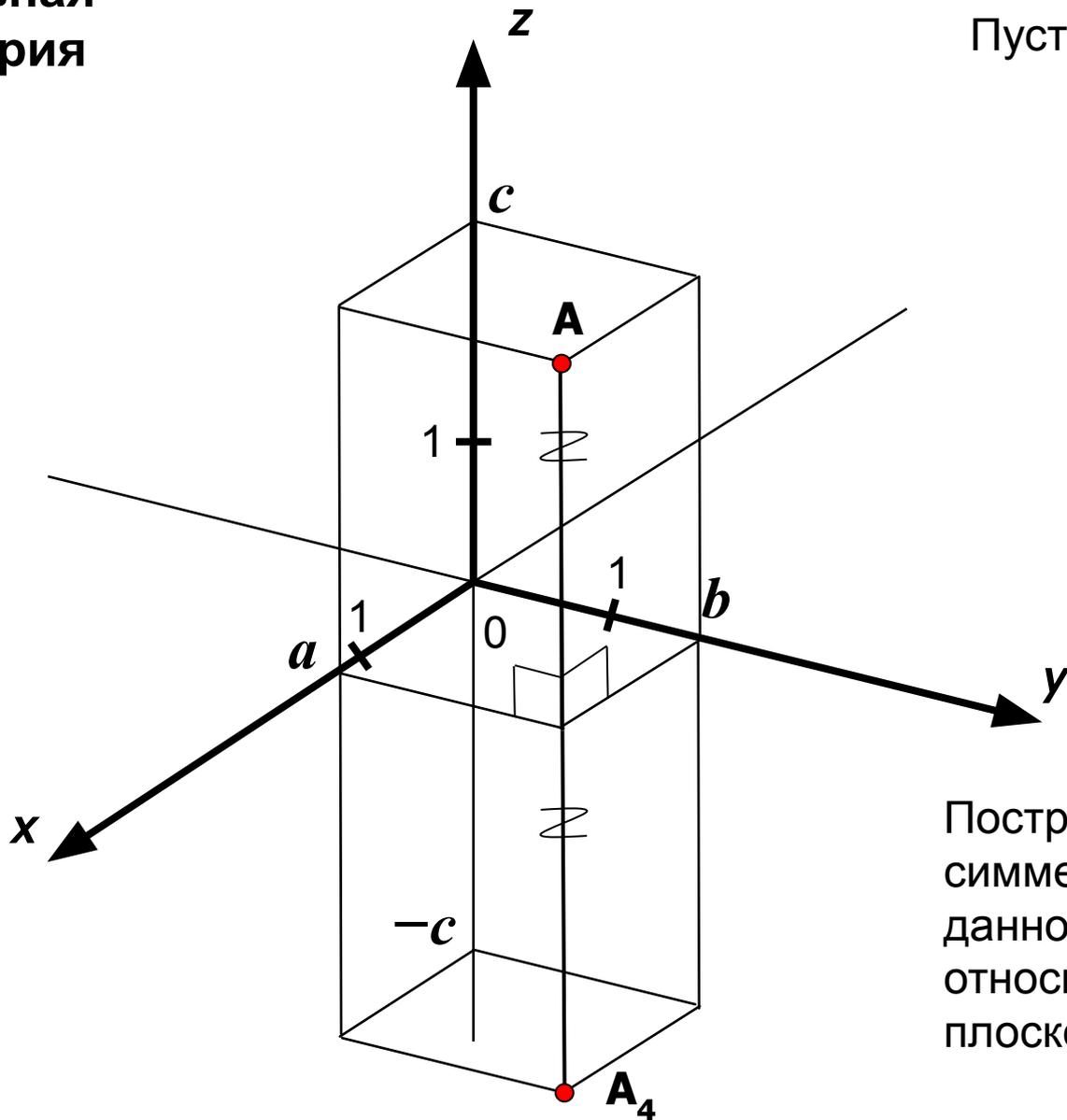


Построим точку \mathbf{A}_3 , симметричную данной точке относительно оси Oz .

б). Тогда координаты точки $\mathbf{A}_3(-a; -b; c)$.

Зеркальная симметрия

Пусть $\mathbf{A}(a; b; c)$

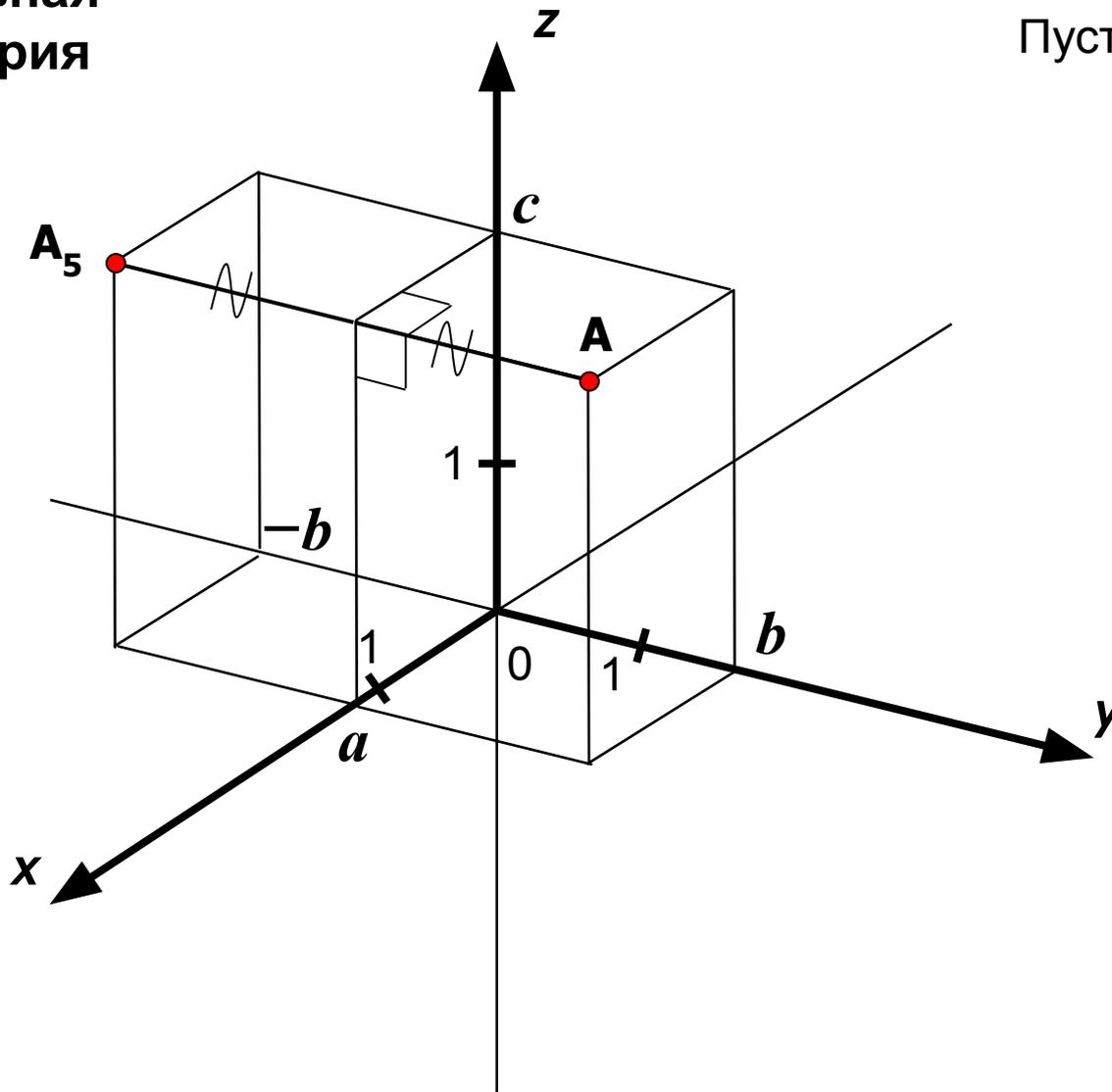


Построим точку \mathbf{A}_4 , симметричную данной точке относительно плоскости Oxy .

7). Тогда координаты точки $\mathbf{A}_4(a; b; -c)$.

Зеркальная симметрия

Пусть $\mathbf{A}(a; b; c)$

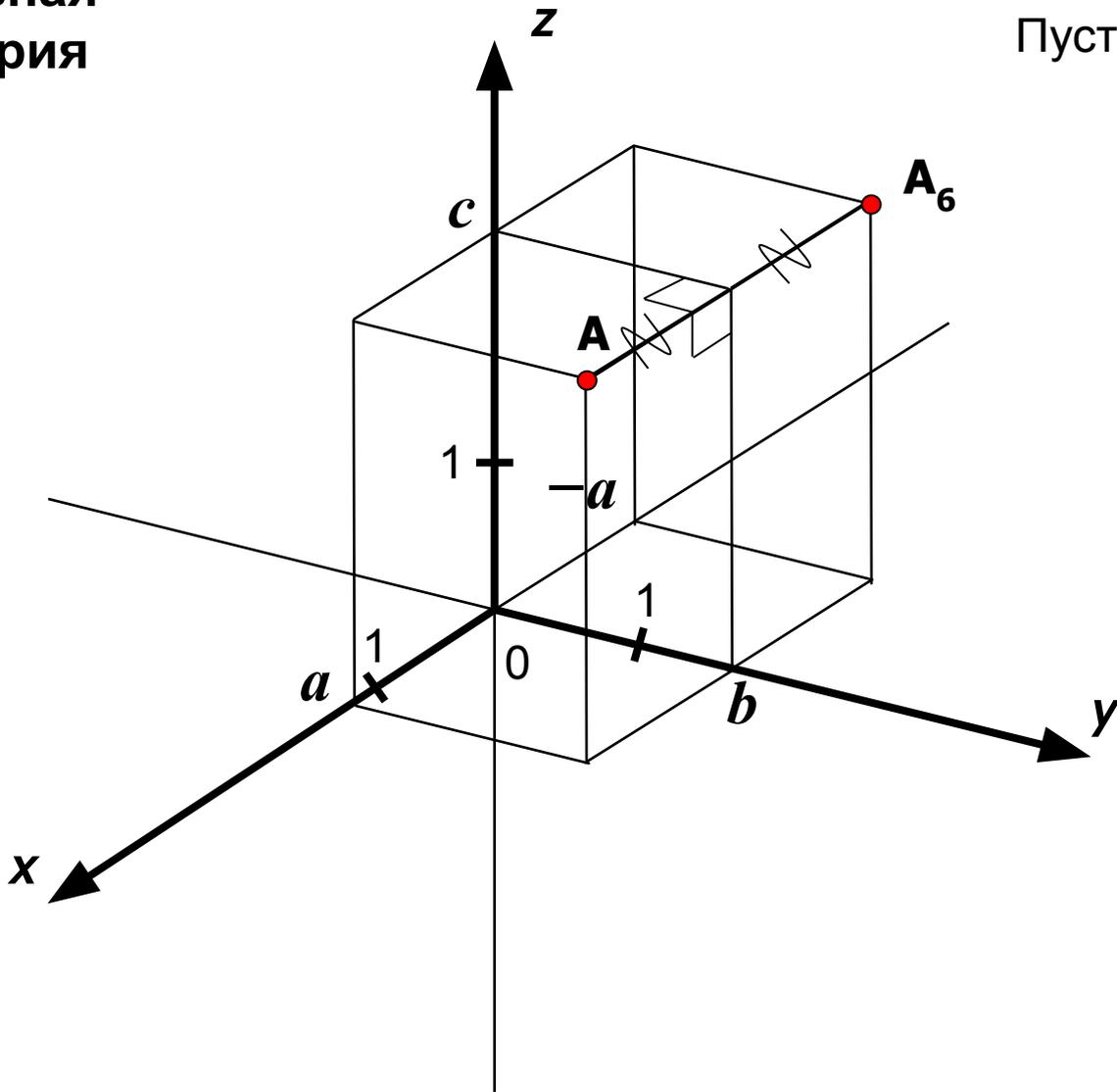


Построим точку \mathbf{A}_5 , симметричную данной точке относительно плоскости Oxz .

8). Тогда координаты точки $\mathbf{A}_5(a; -b; c)$.

Зеркальная симметрия

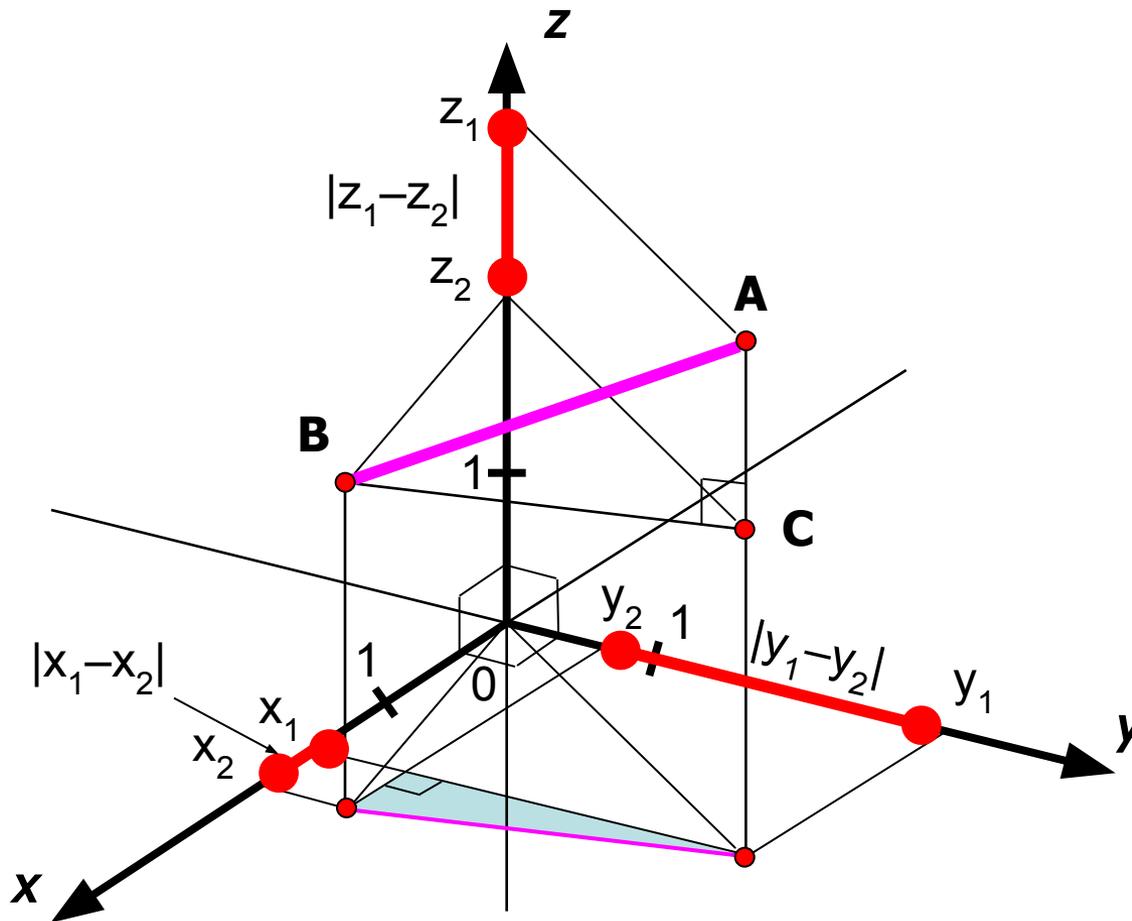
Пусть $\mathbf{A}(a; b; c)$



Построим точку \mathbf{A}_6 , симметричную данной точке относительно плоскости Oyz .

9). Тогда координаты точки $\mathbf{A}_6(-a; b; c)$.

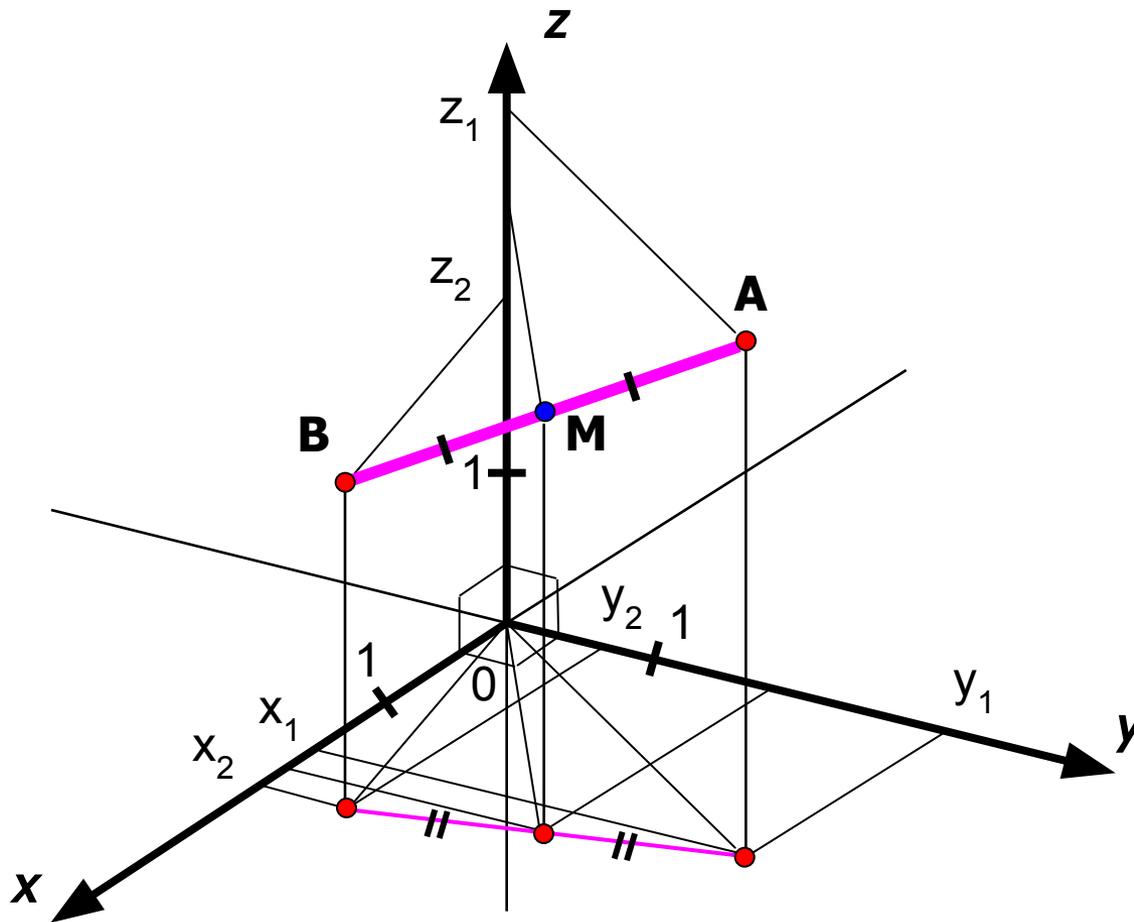
Расстояние между точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$



$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Координаты середины отрезка АВ, где $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$



$$M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$