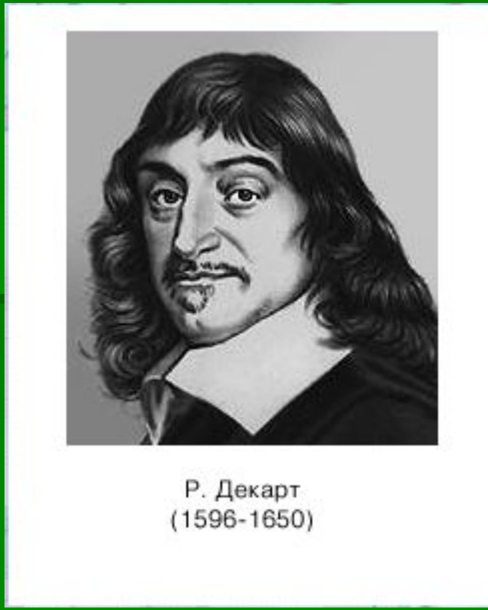
Геометрия, 11 класс

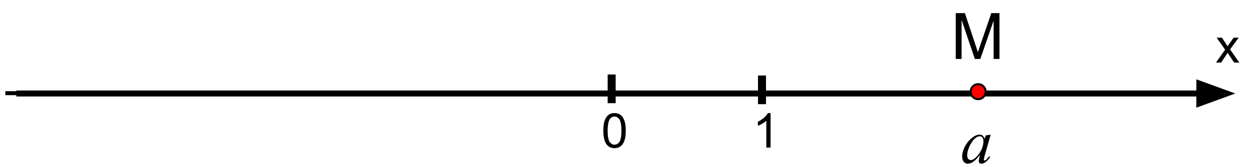


Система координат в пространстве

Воробьев Леонид Альбертович, г.Минск

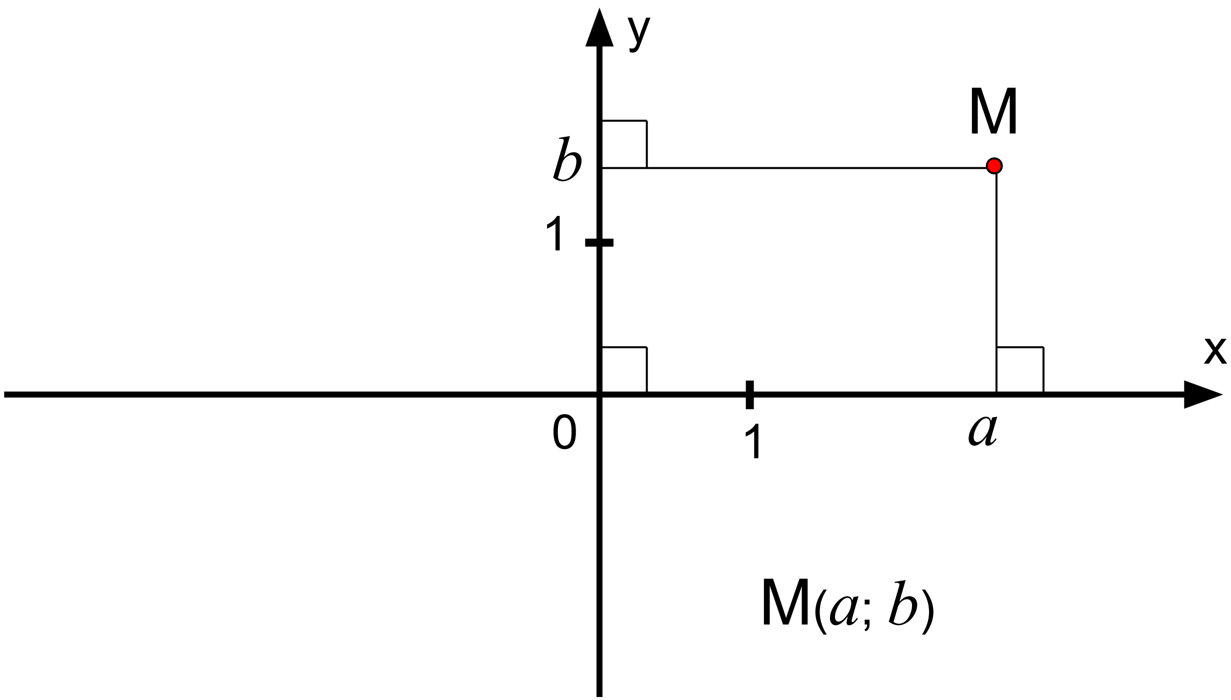
Вспомним, как определяется координатная(числовая) прямая.

1) Изображаем произвольную прямую;
2) Придаем ей положительное направление и обозначаем её;
3) Выбираем произвольную точку за начало отсчета;
4) Определяем длину единичного отрезка (масштаб).



Тогда любой точке этой координатной прямой соответствует единственное действительной число a. И наоборот, любое действительное число может быть изображено единственной соответствующей точкой, для которой это число является координатой. Записывают: M(a).

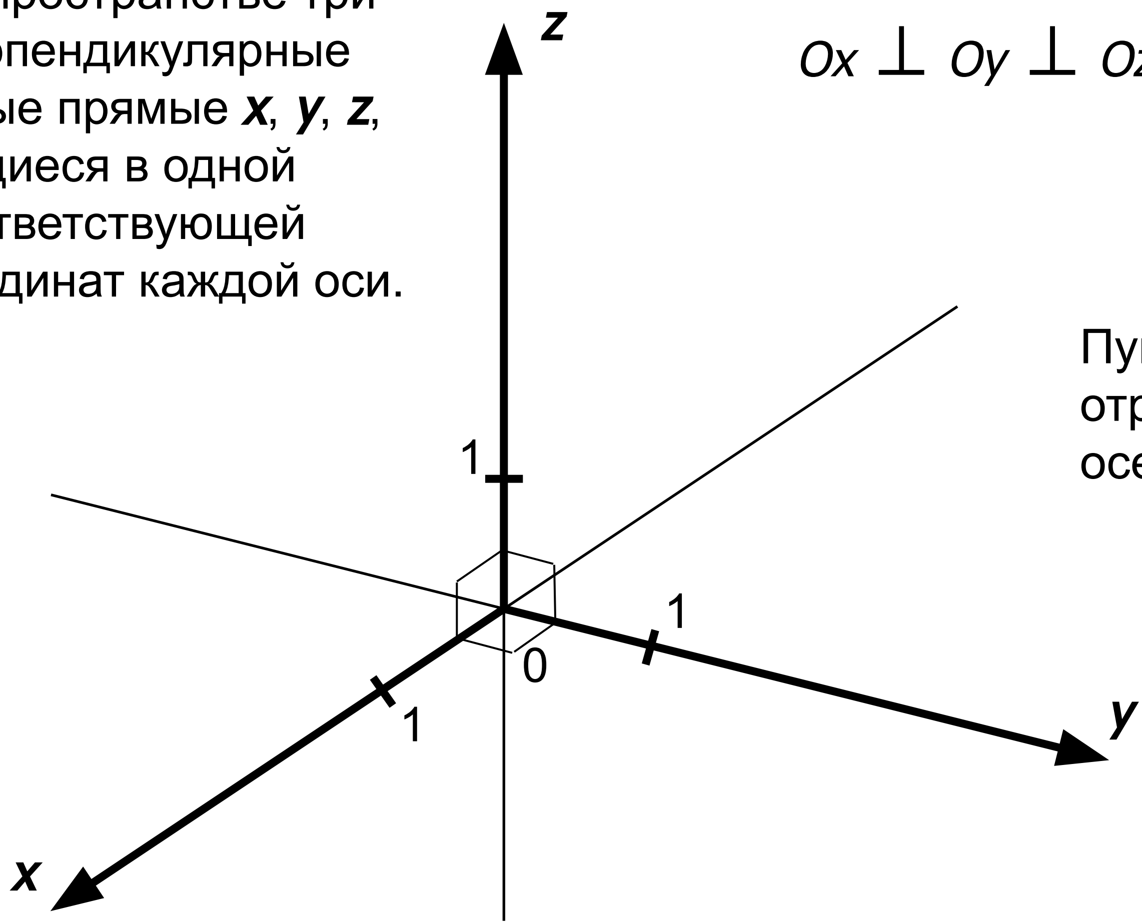
А теперь, что мы подразумеваем под координатной плоскостью.



M(a; b)

Выберем в пространстве три попарно перпендикулярные координатные прямые ***x***, ***y***, ***z***, пересекающиеся в одной точке *0*, соответствующей началу координат каждой оси.

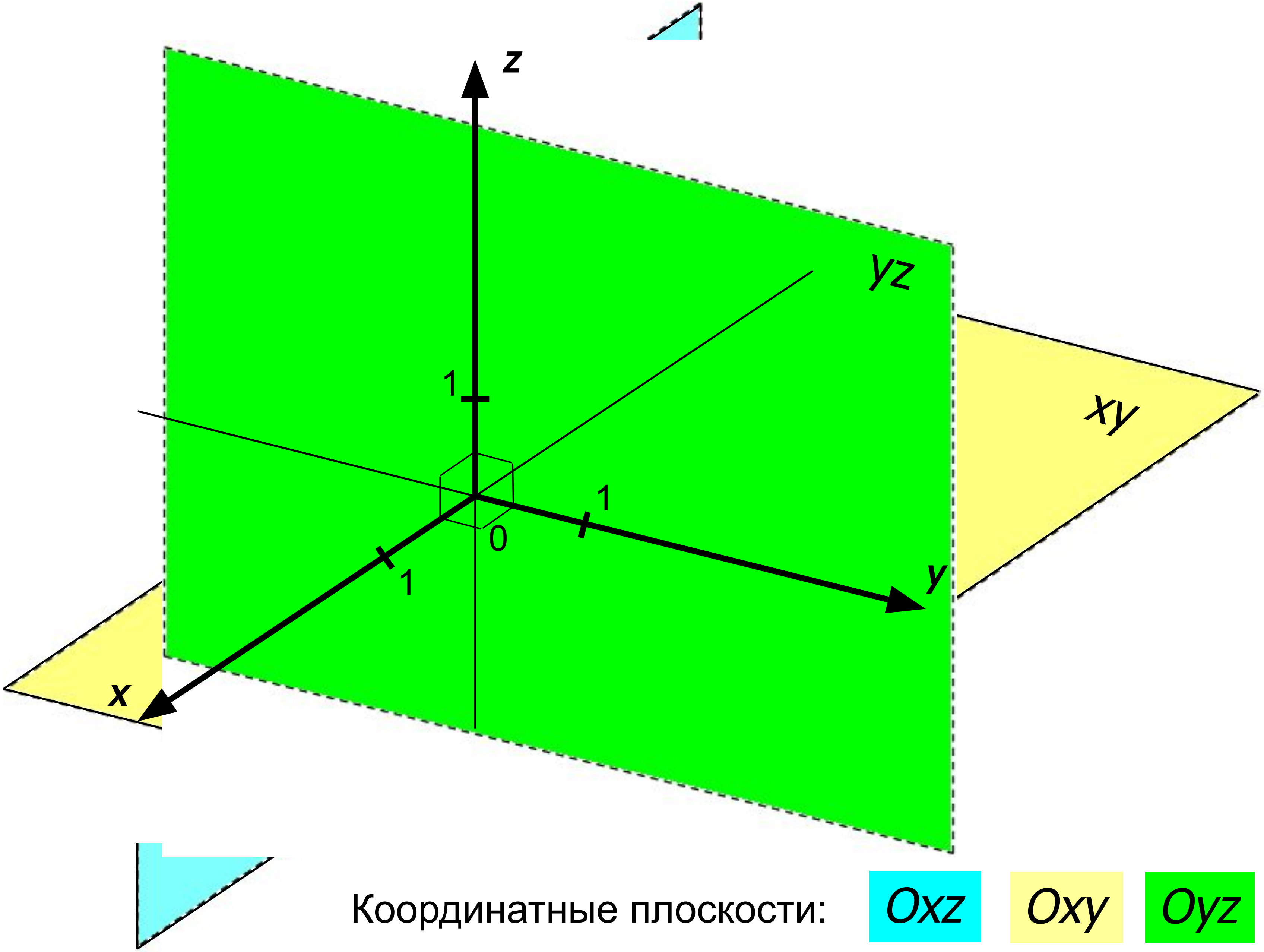
$Ox \perp Oy \perp Oz$



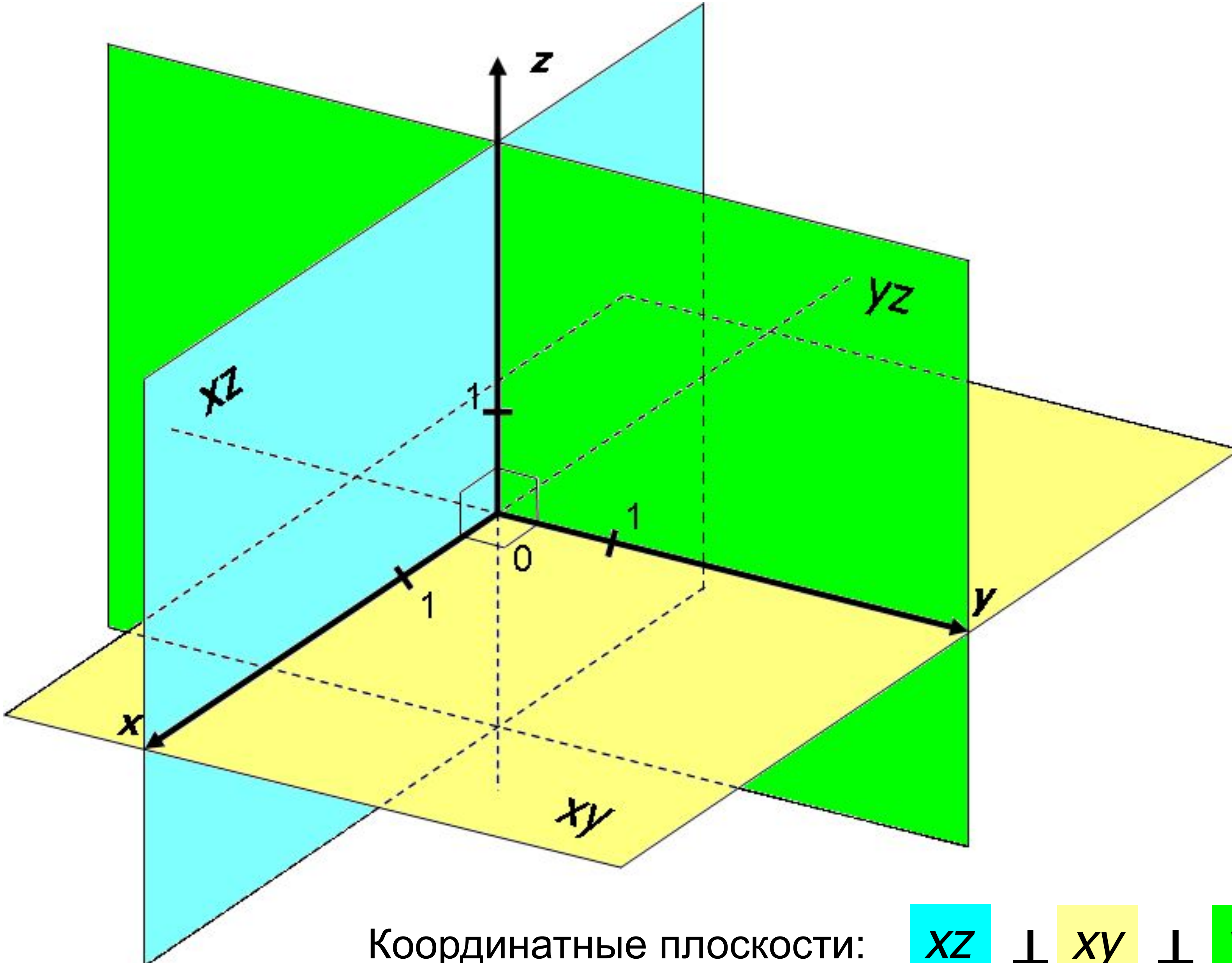
Пунктиром показаны отрицательные части осей.

Координатные оси:

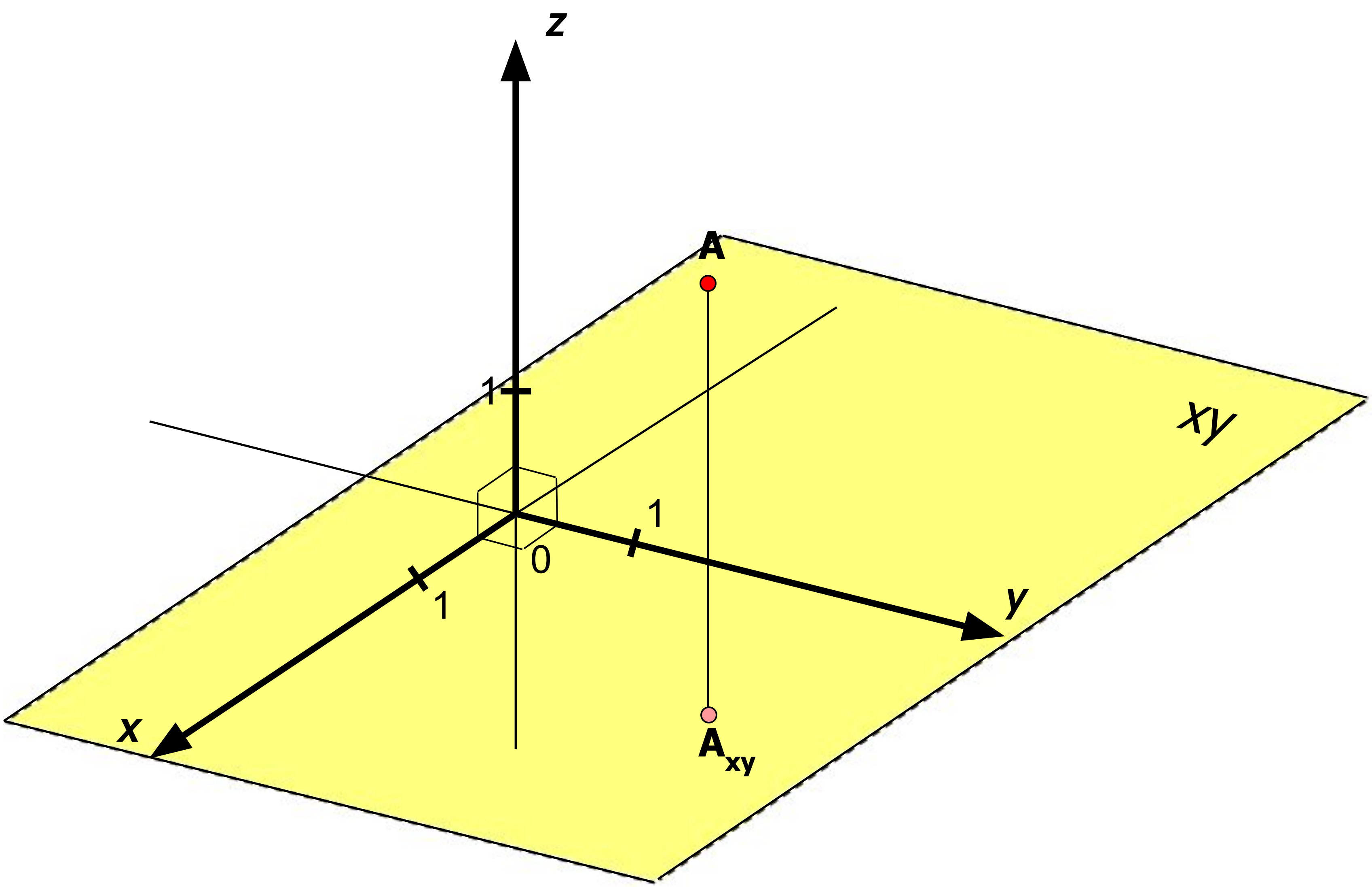
Ox – ось абсцисс *Oy* – ось ординат *Oz* – ось аппликат



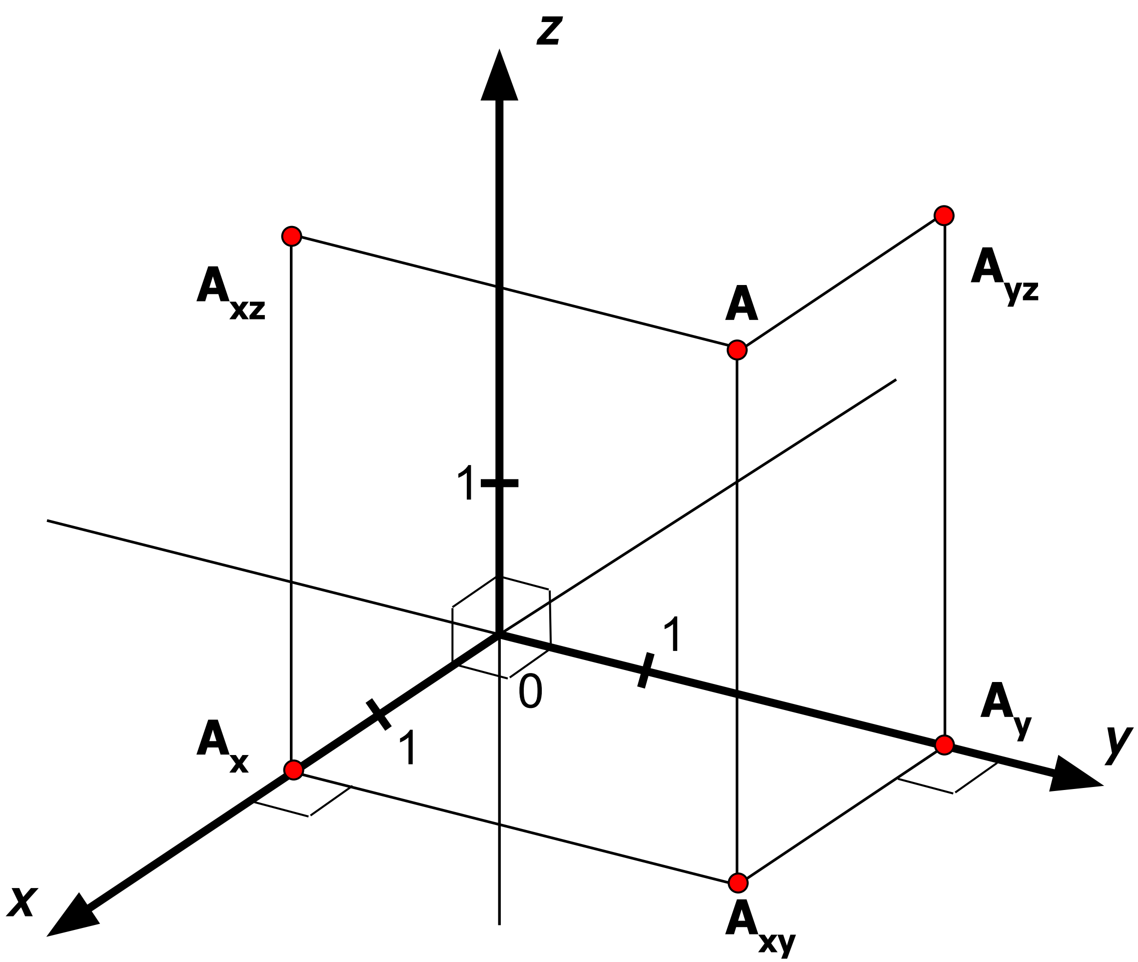
Координатные плоскости: *Oxz* *Oxy* *Oyz*



Координатные плоскости: xz ⊥ xy ⊥ yz

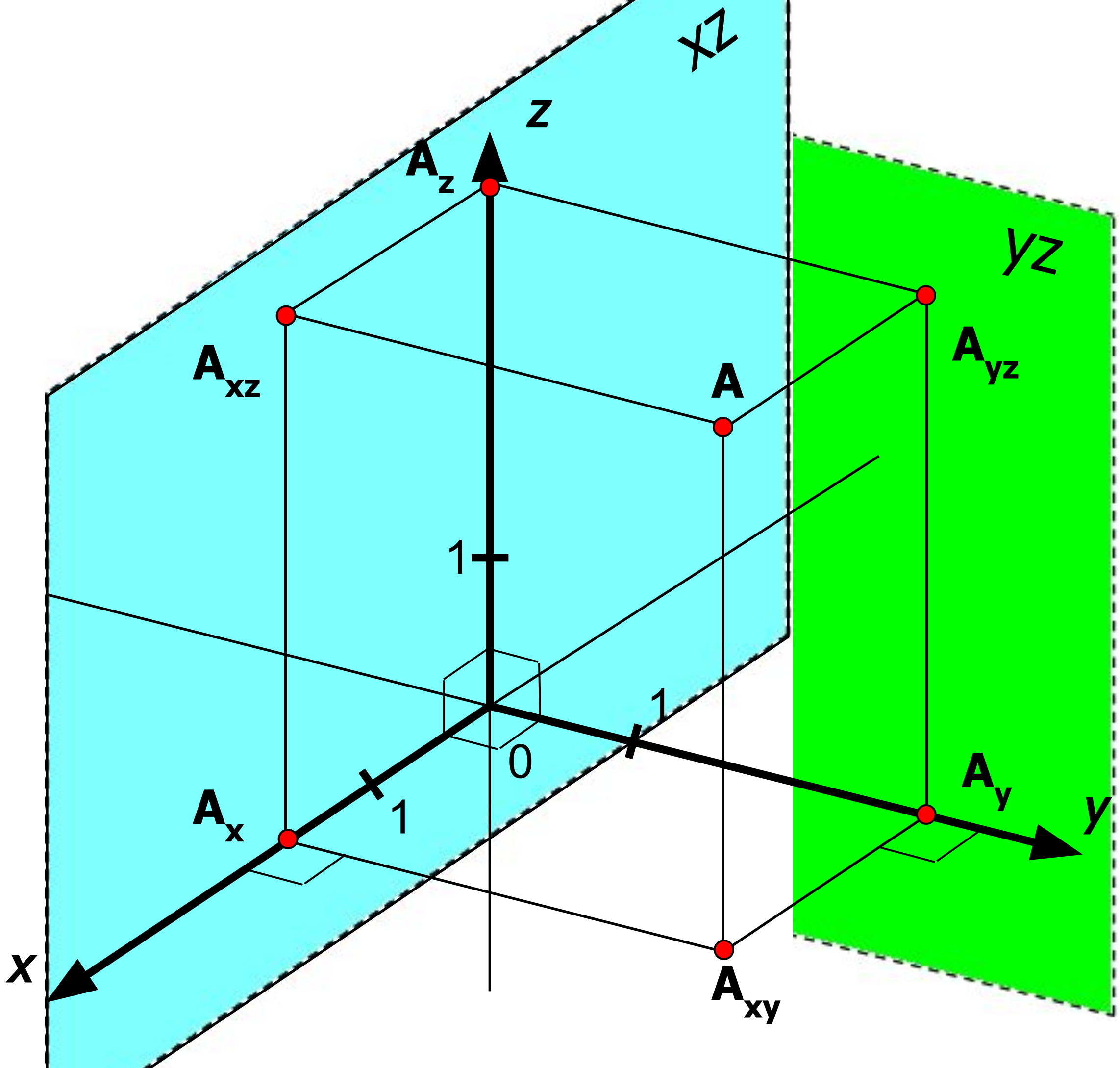


Положение любой точки в пространстве определяется **тремя** координатами .
Проследим как их получить:
1) проведем перпендикуляр из точки **A** к плоскости ***Oxy*** , обозначив точку пересечения $\mathbf{A_{xy}}$ (или $\mathbf{A_{xy}}$ – ортогональная проекция точки **A** на плоскость ***Oxy***) ;



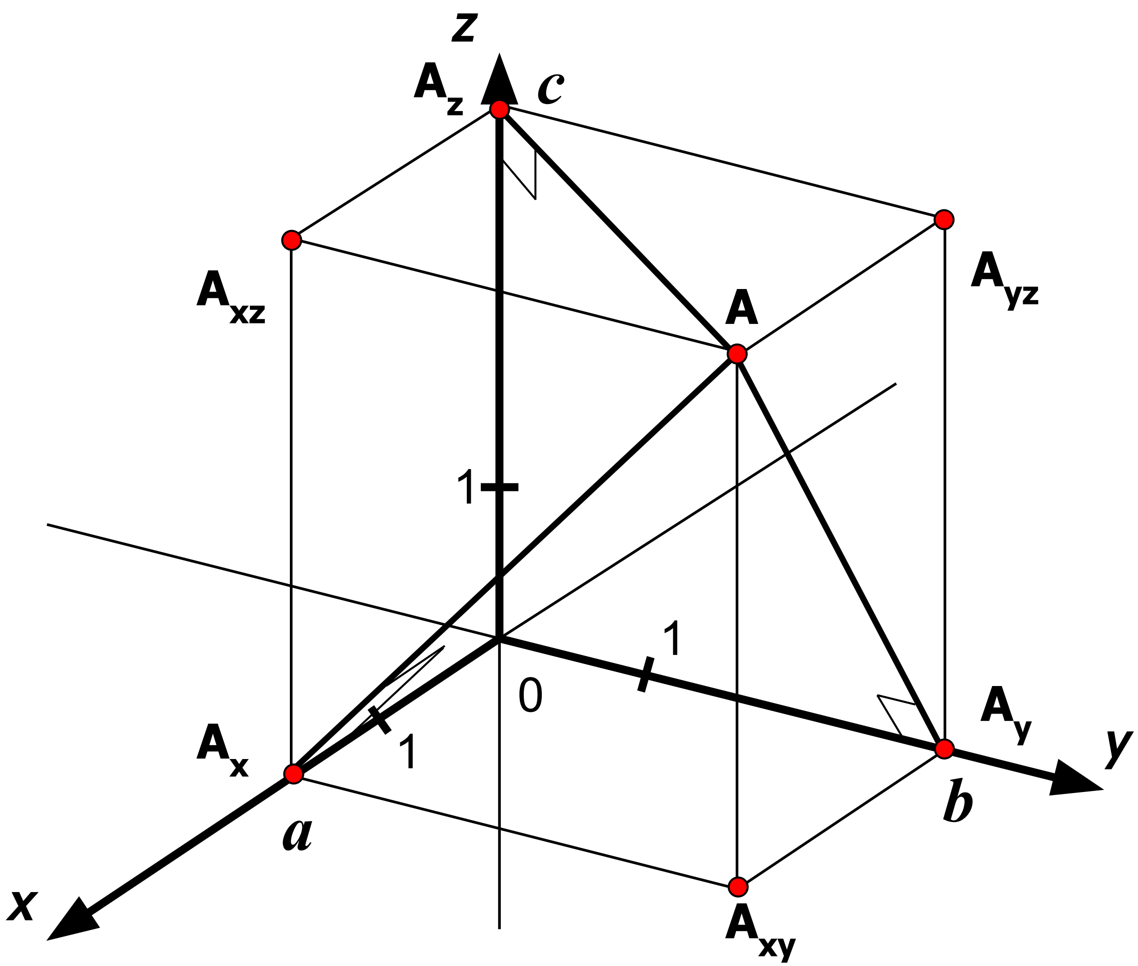
2) Далее, в плоскости ***Oxy***, из точки $\mathbf{A_{xy}}$ опустим перпендикуляры на координатные оси этой плоскости;

3) Построим прямую пересечения $\mathbf{A_xA_{xz}}$ плоскостей ***Oxz*** и ($\mathbf{AA_{xy}A_x}$) – по свойству она параллельна $\mathbf{AA_{xy}}$; аналогично, ***Oyz*** □ ($\mathbf{AA_{xy}A_y}$)= $\mathbf{A_yA_{yz}}$;

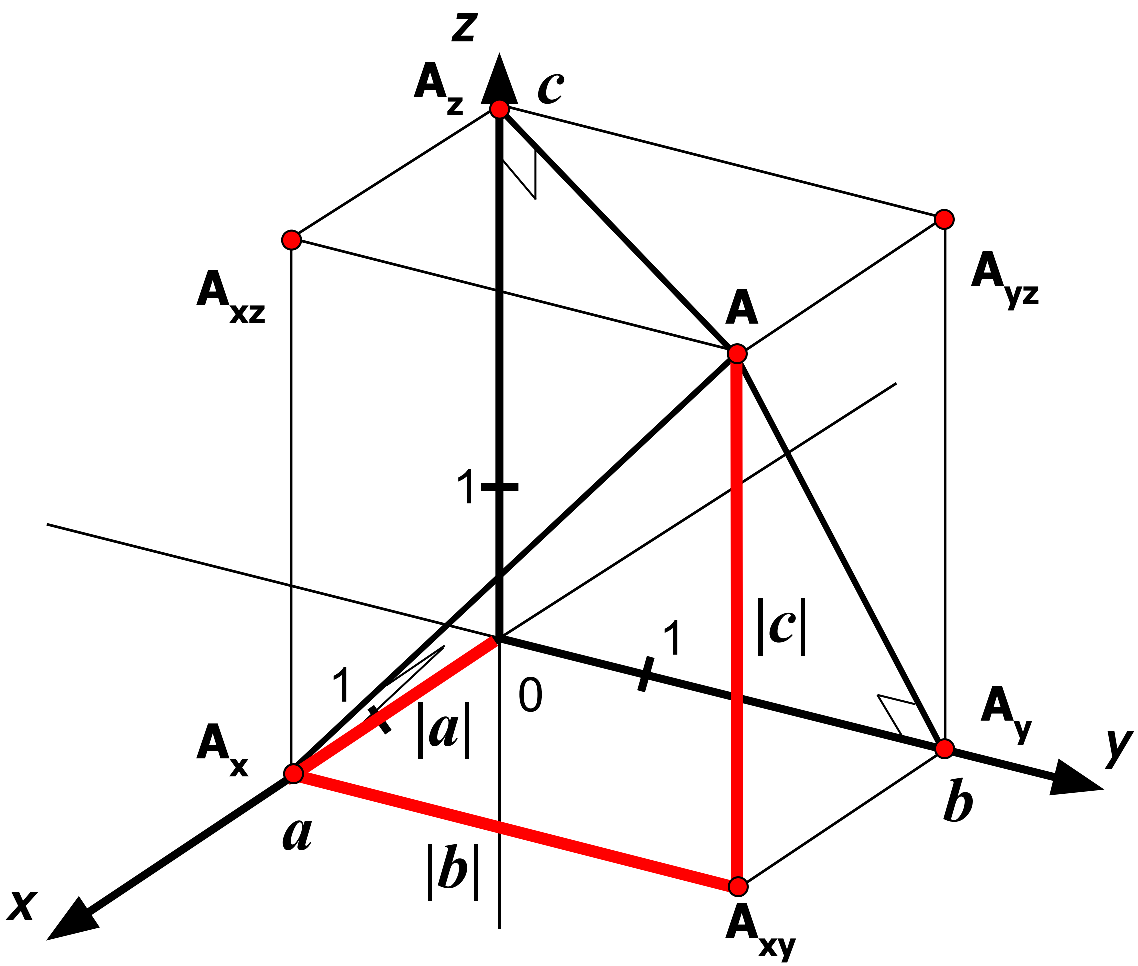


4) Таким образом, мы получили ортогональные проекции точки **A** на координатные плоскости – точки $\mathbf{A}_{xz}$ и $\mathbf{A}_{yz}$;

5) Осталось опустить перпендикуляры из точек $\mathbf{A}_{yz}$ и $\mathbf{A}_{xz}$ на координатную ось аппликат;

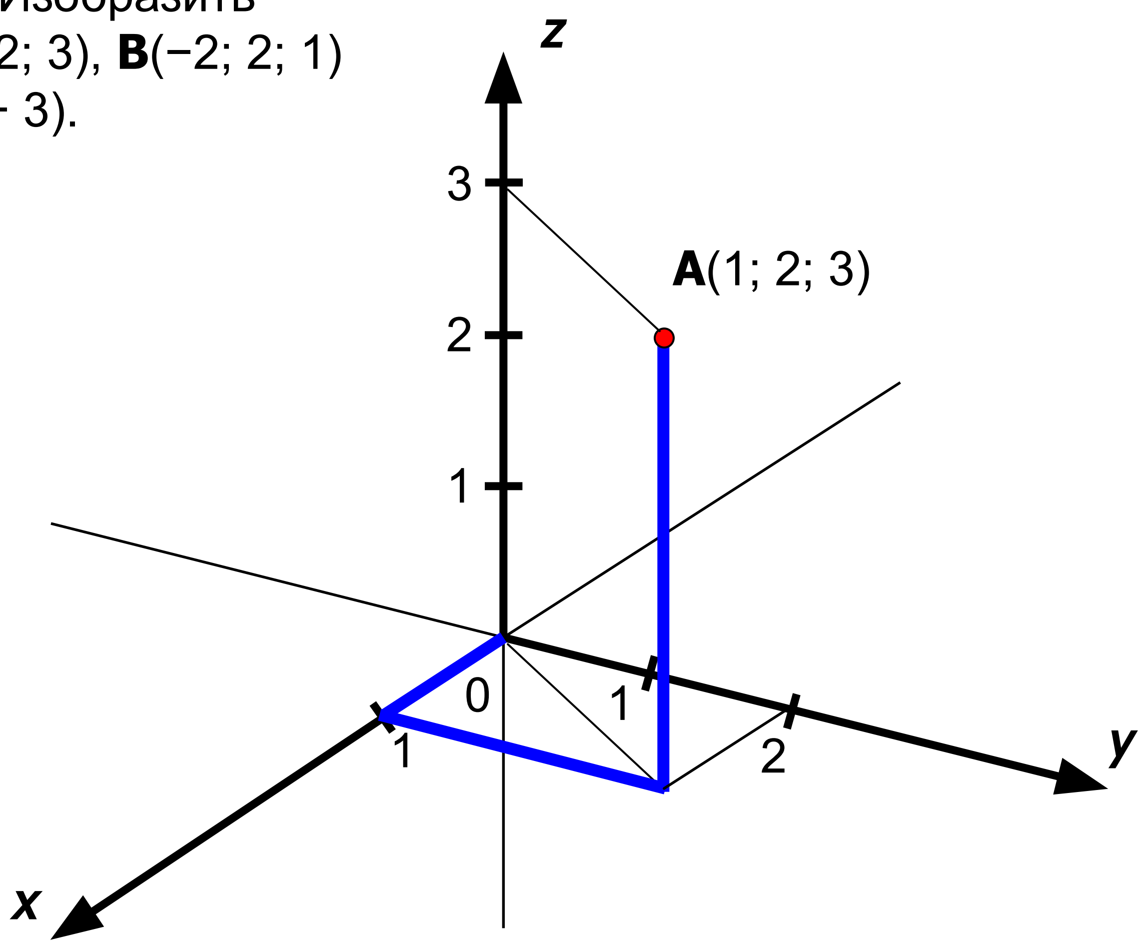


Тогда, $AA_x \perp Ox$, $AA_y \perp Oy$ и $AA_z \perp Oz$ (объясните почему?). Числа a; b; c, соответствующие координатам точек A_x, A_y и A_z на числовых осях и являются ***координатами*** точки **A**. Записывают : $A(a;\ b;\ c)$. Очевидно, что начало координат в пространстве $O(0;\ 0;\ 0)$.



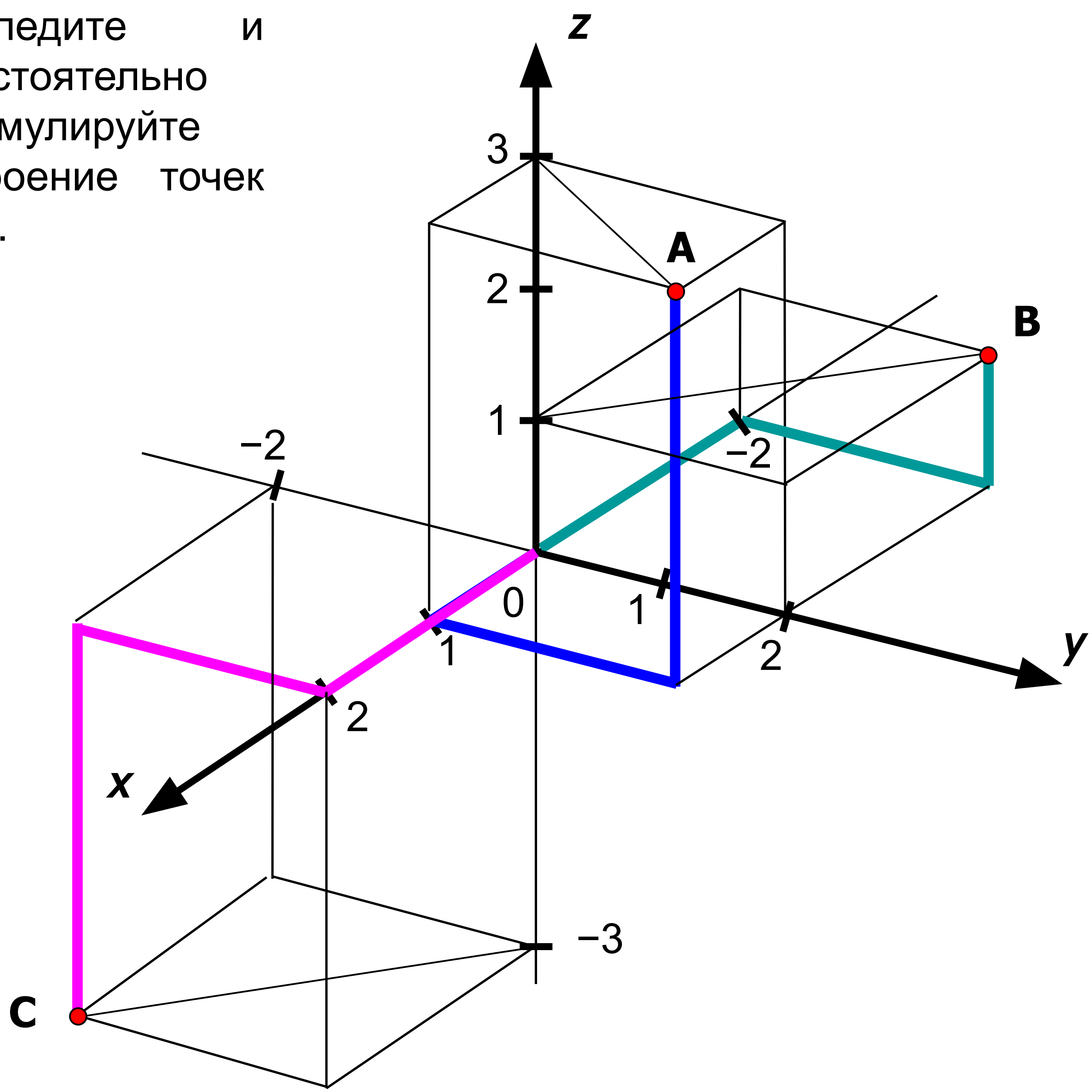
Координаты точки можно понимать как линейные размеры $|a| \times |b| \times |c|$ прямоугольного параллелепипеда (если координата отрицательная, то берется модуль числа), а положение точки – противоположная началу координат вершина получающегося прямоугольного параллелепипеда. Т.е. модуль каждой координаты равен расстоянию от данной точки до одной из координатных плоскостей.

Пример 1. Изобразить точки **A**(1; 2; 3), **B**(−2; 2; 1) и **C**(2; −2; − 3).



Для изображения точки **A** построим ломанную, состоящую из трех последовательных звеньев. От начала координат откладываем 1 ед.отр. вдоль оси ***Ox***. Затем второе звено длиной 2 ед.отр. параллельно оси ***Oy***. И последний отрезок длиной 3 ед.отр. параллельно оси ***Oz***.

Проследите и самостоятельно сформулируйте построение точек **B** и **C**.

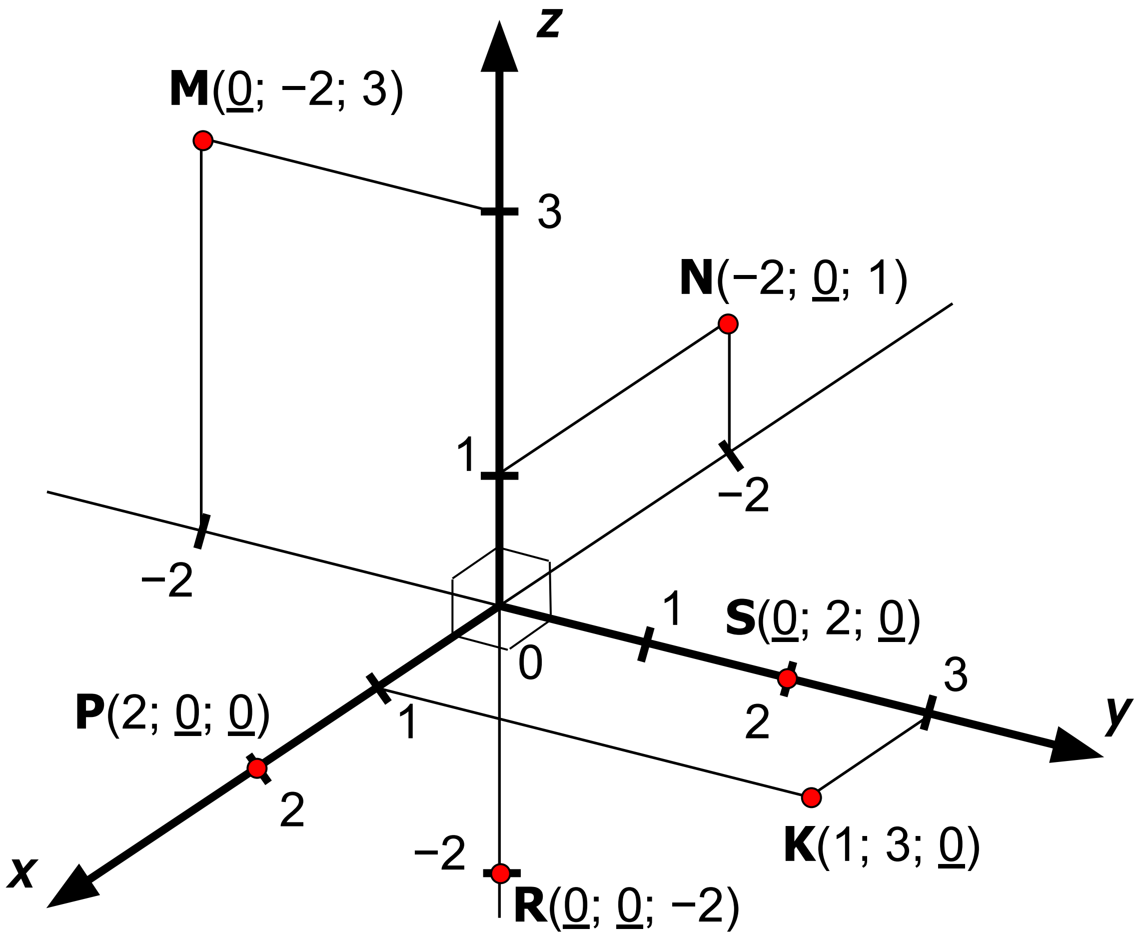


A(1; 2; 3)

B(−2; 2; 1)

C(2; −2; − 3)

Отметим некоторые свойства координат точек:

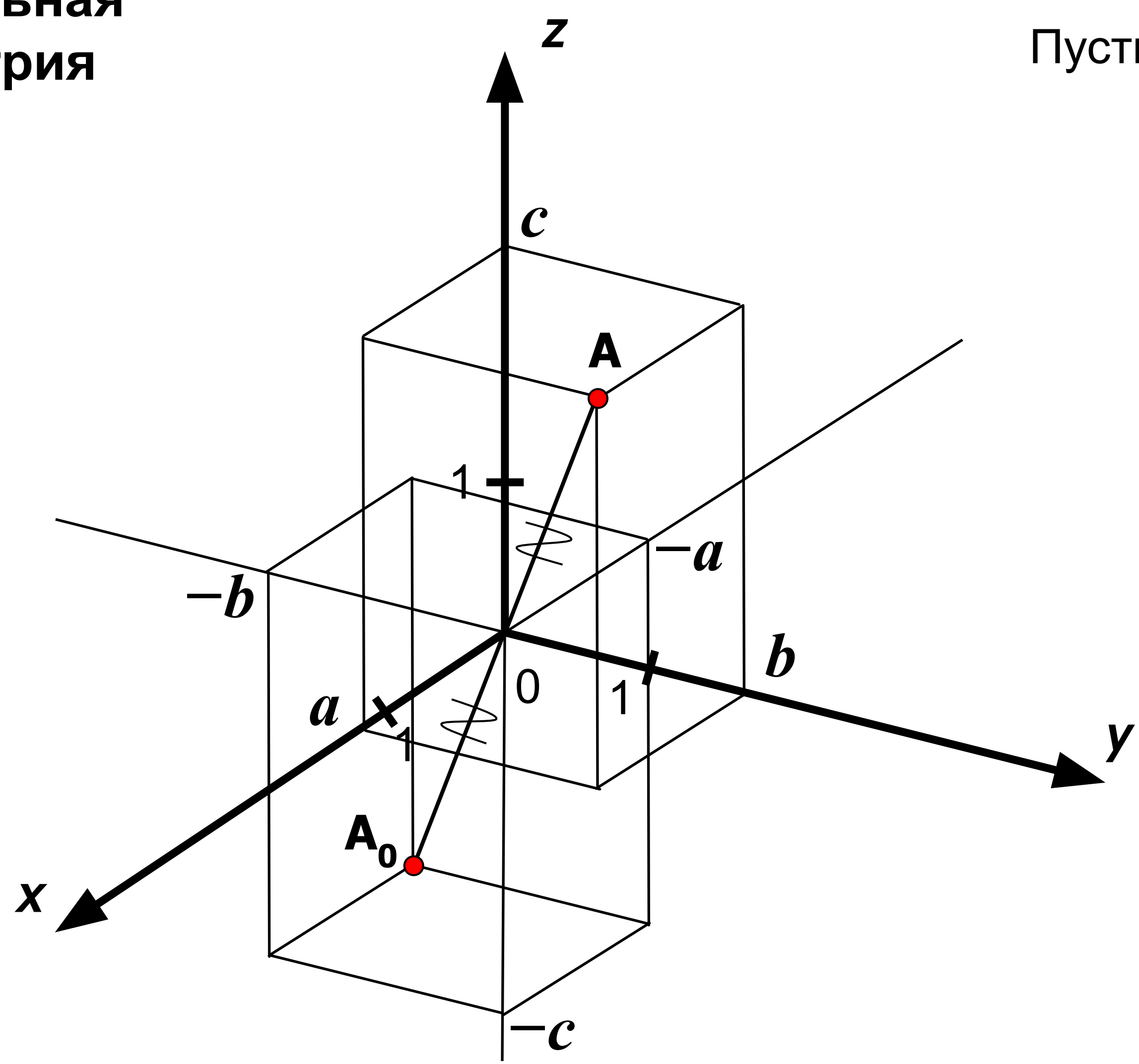


1). Если одна из координат точки равна 0, то точка лежит в одной из координатных плоскостей; (например, **M**∈***Oyz***, **N**∈***Oxz***, **K**∈***Oxy***).

2). Если две координаты точки равны 0, то точка принадлежит одной из координатных осей; (например, **P∈*Ox***, **S∈*Oy***, **R∈*Oz***).

Центральная симметрия

Пусть **A**(a; b; c)

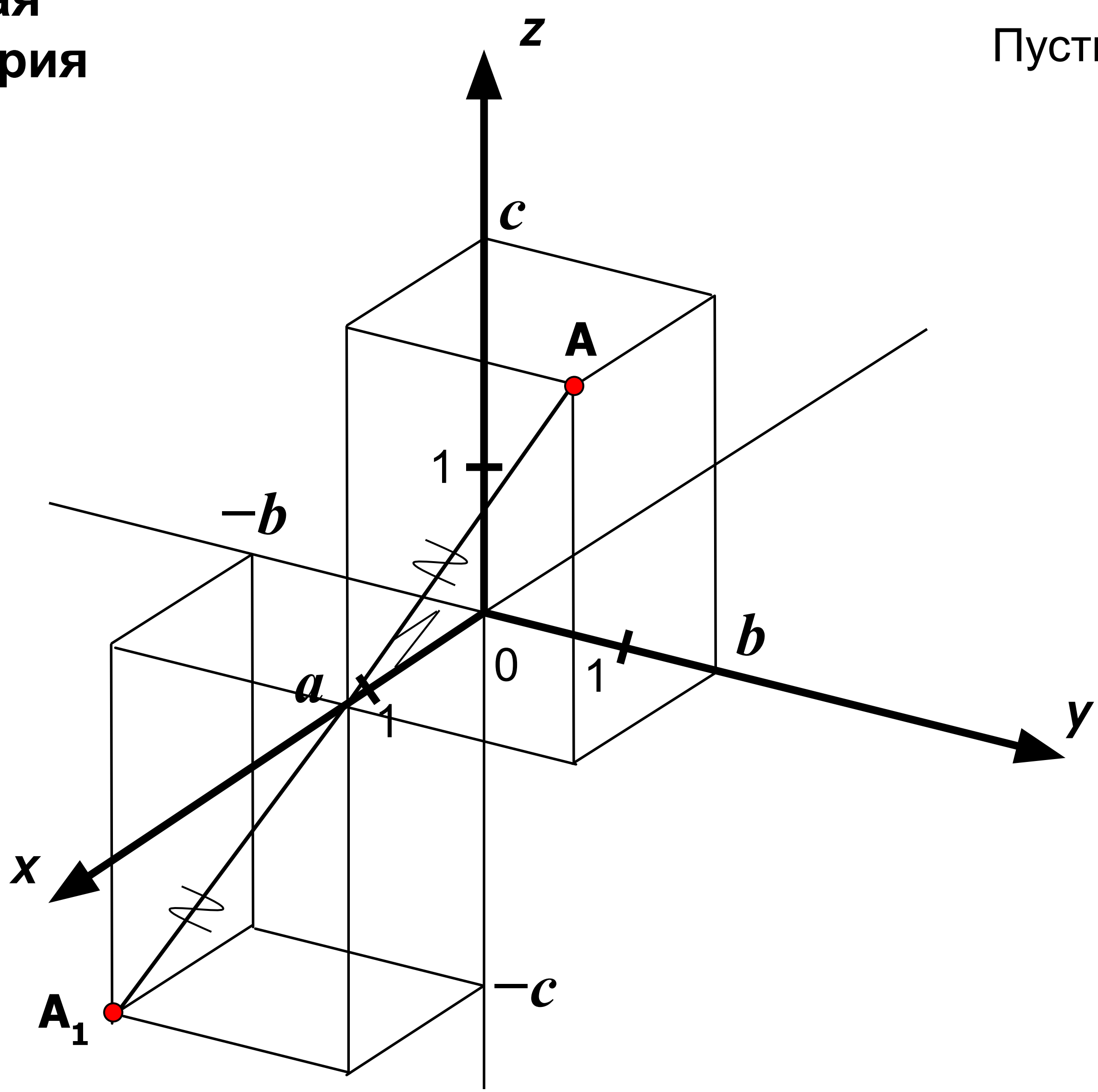


Построим точку **A**$_0$, симметричную данной точке относительно точки ***O***.

3). Тогда координаты точки **A**$_0$($-a$; $-b$; $-c$).

Осевая симметрия

Пусть **A**(a; b; c)

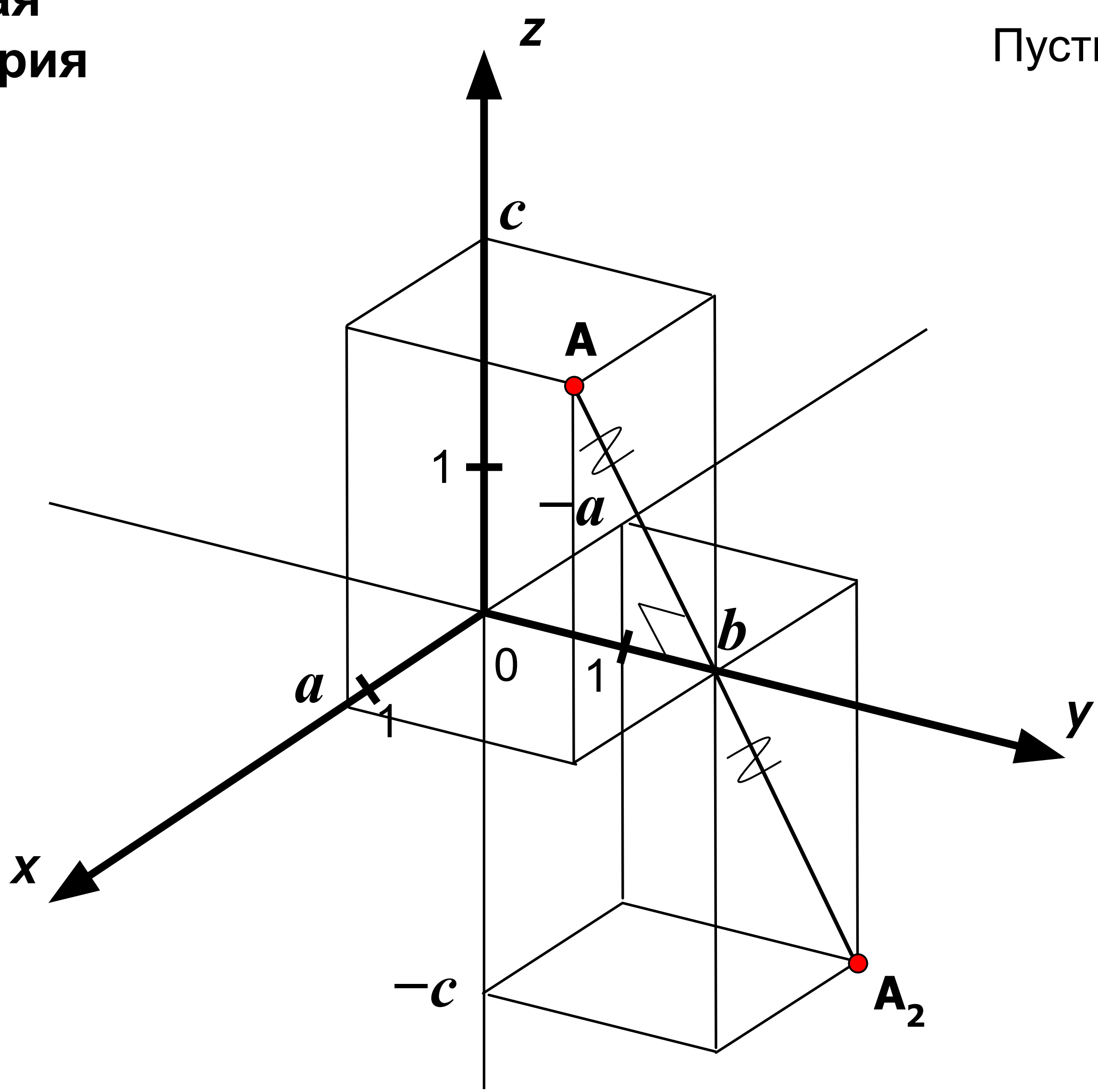


Построим точку **A$_1$**, симметричную данной точке относительно оси ***Ox***.

4). Тогда координаты точки **A$_1$**(a; $-b$; $-c$).

Осевая симметрия

Пусть **A**(a; b; c)

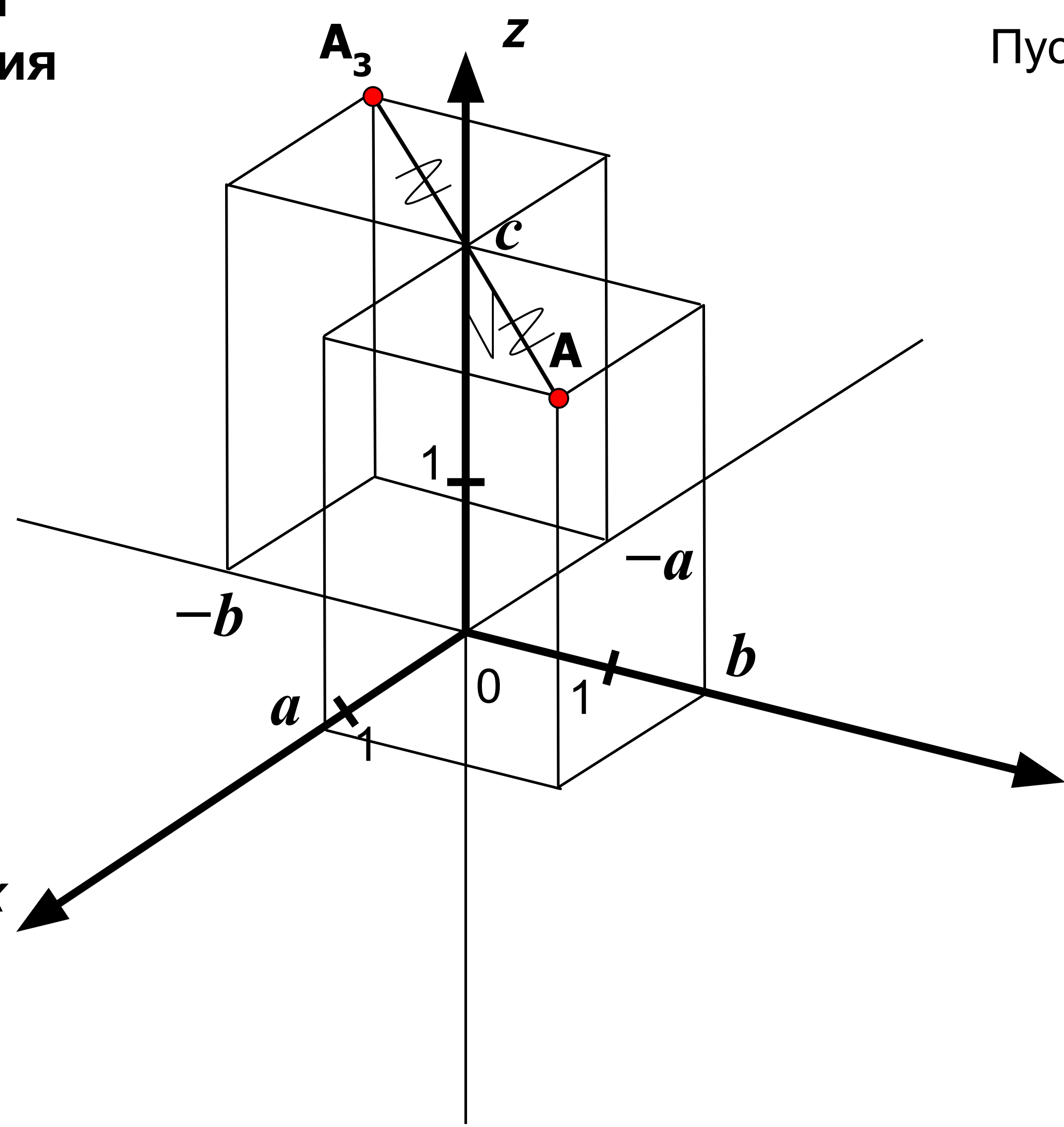


Построим точку **A**$_2$, симметричную данной точке относительно оси ***Oy***.

5). Тогда координаты точки **A**$_2$($-a$; b; $-c$).

Осевая симметрия

Пусть **A**(a; b; c)

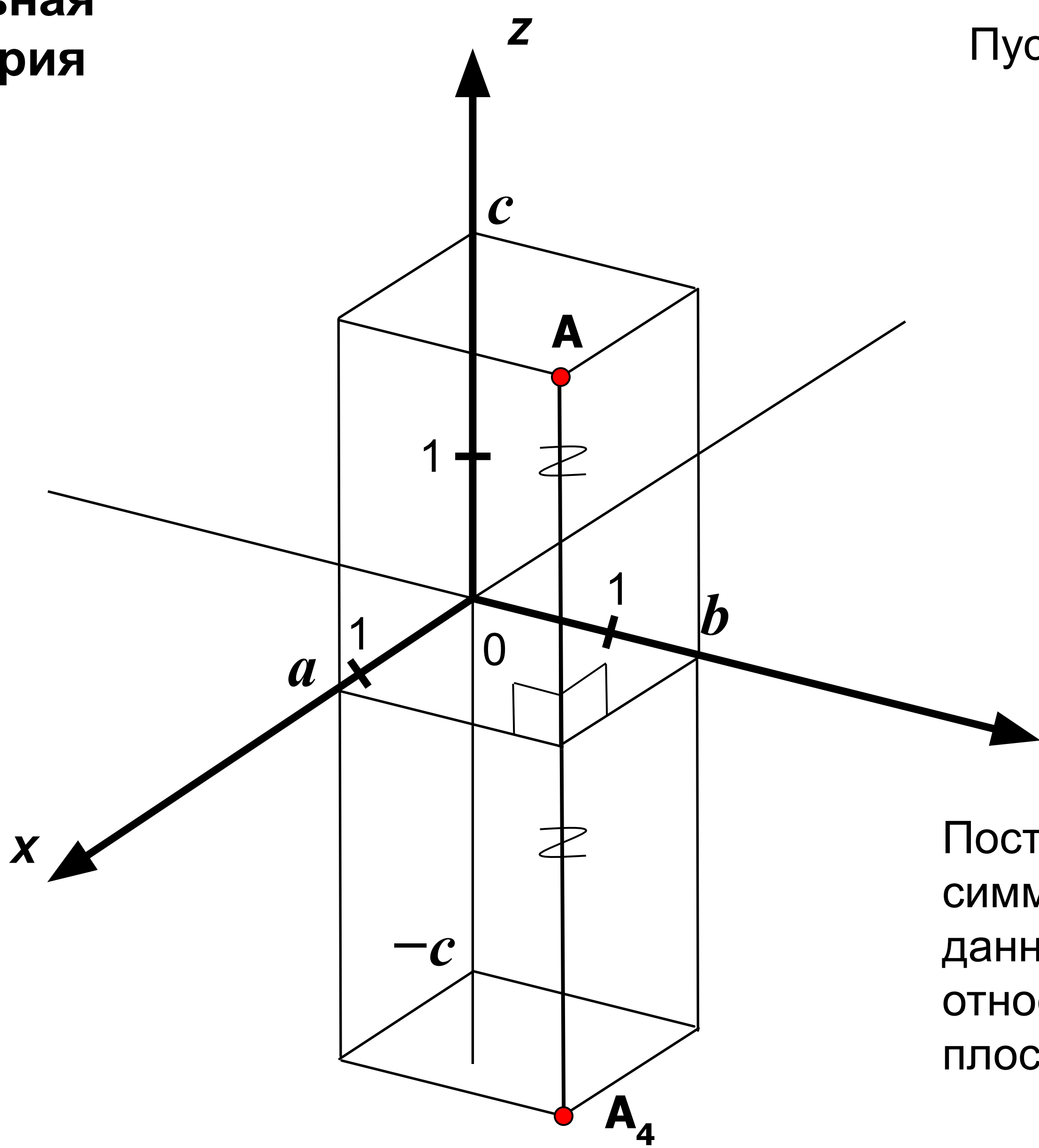


Построим точку $\mathbf{A_3}$, симметричную данной точке относительно оси ***Oz***.

6). Тогда координаты точки $\mathbf{A_3}$($-a$; $-b$; c).

Зеркальная симметрия

Пусть **A**(a; b; c)

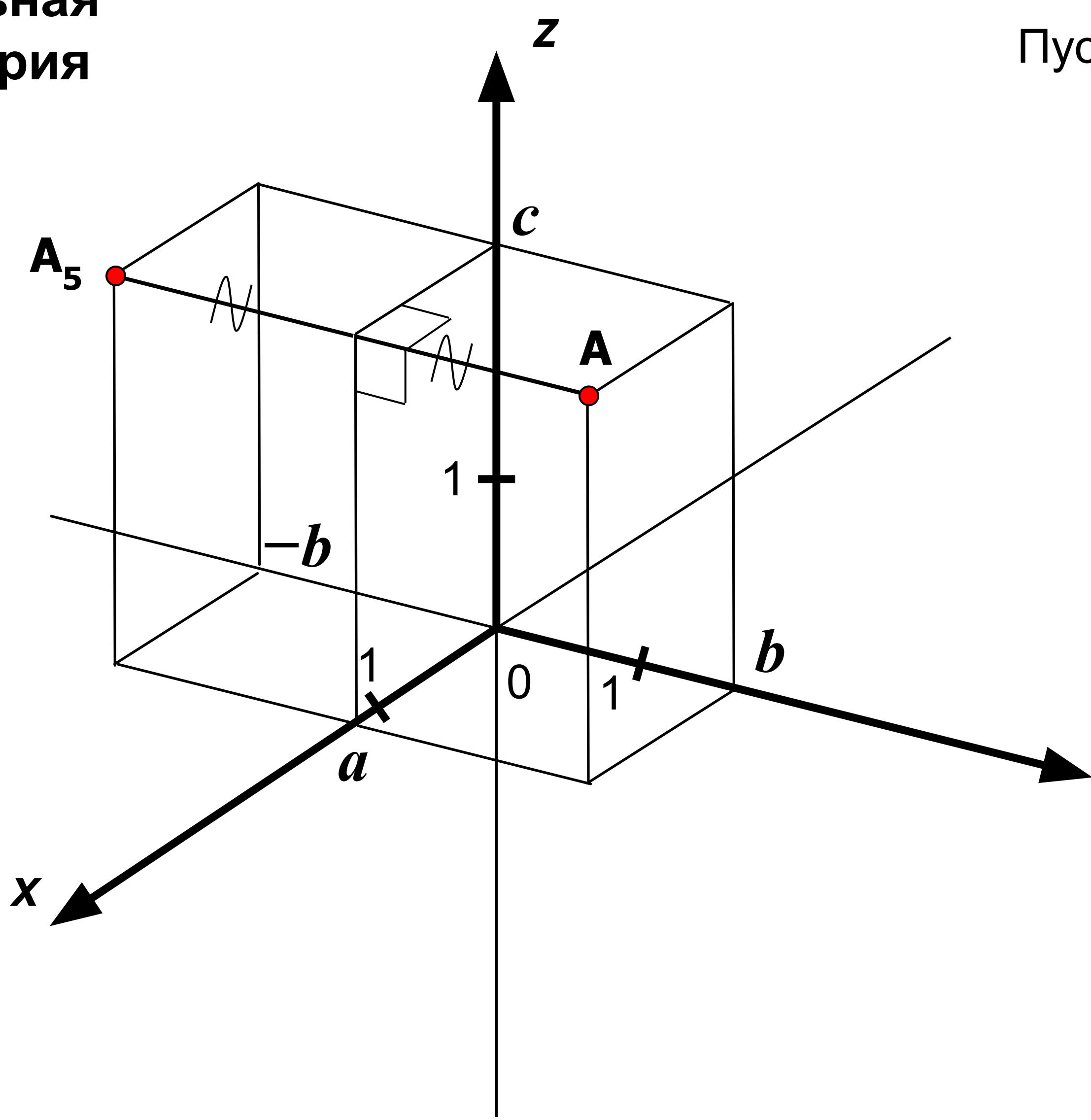


Построим точку **A**$_4$, симметричную данной точке относительно плоскости ***Oxy***.

7). Тогда координаты точки **A**$_4$(a; b; $-c$).

Зеркальная симметрия

Пусть **A**(a; b; c)

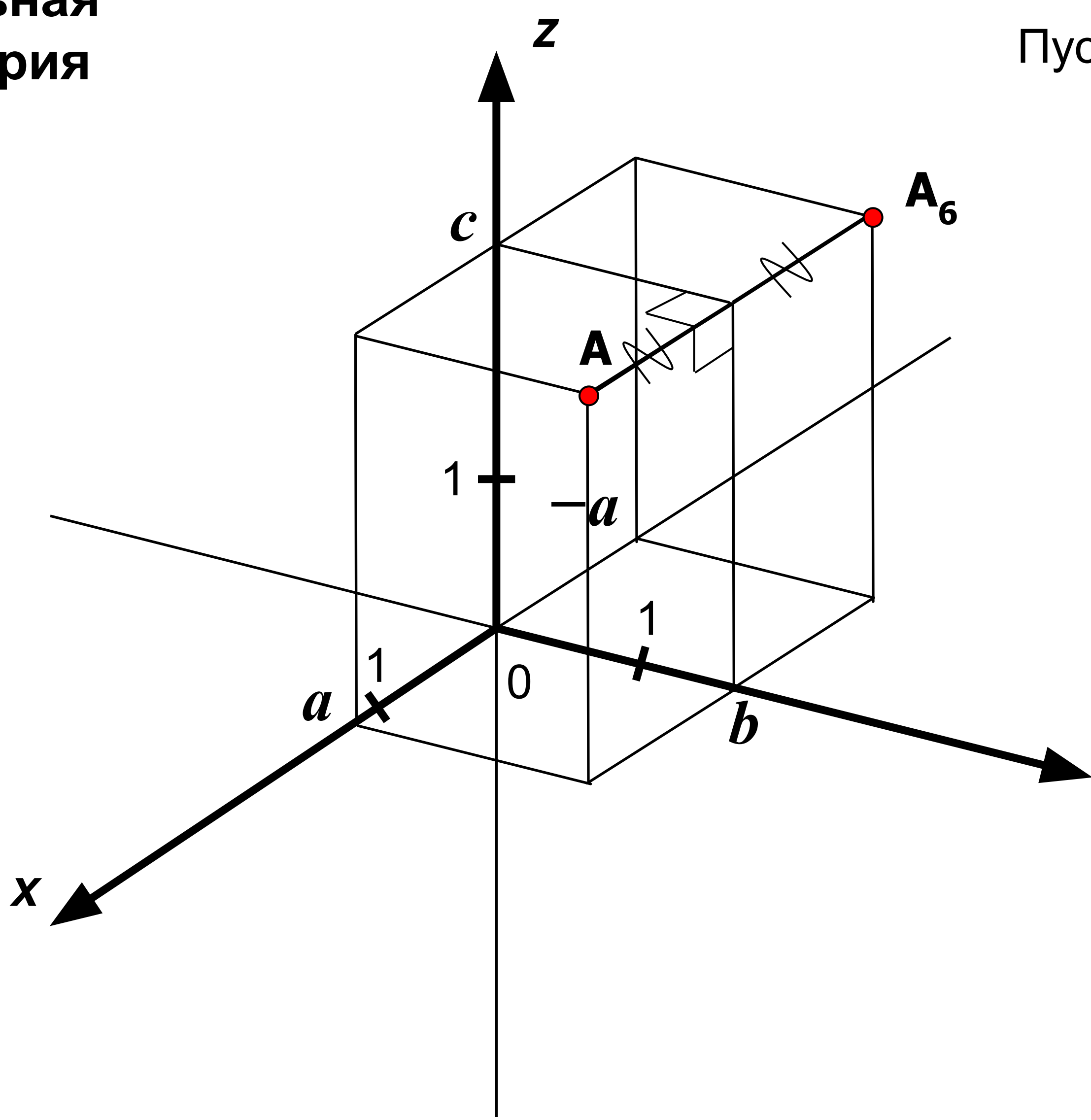


Построим точку $\mathbf{A_5}$, симметричную данной точке относительно плоскости ***Oxz***.

8). Тогда координаты точки $\mathbf{A_5}$(a; $-b$; c).

Зеркальная симметрия

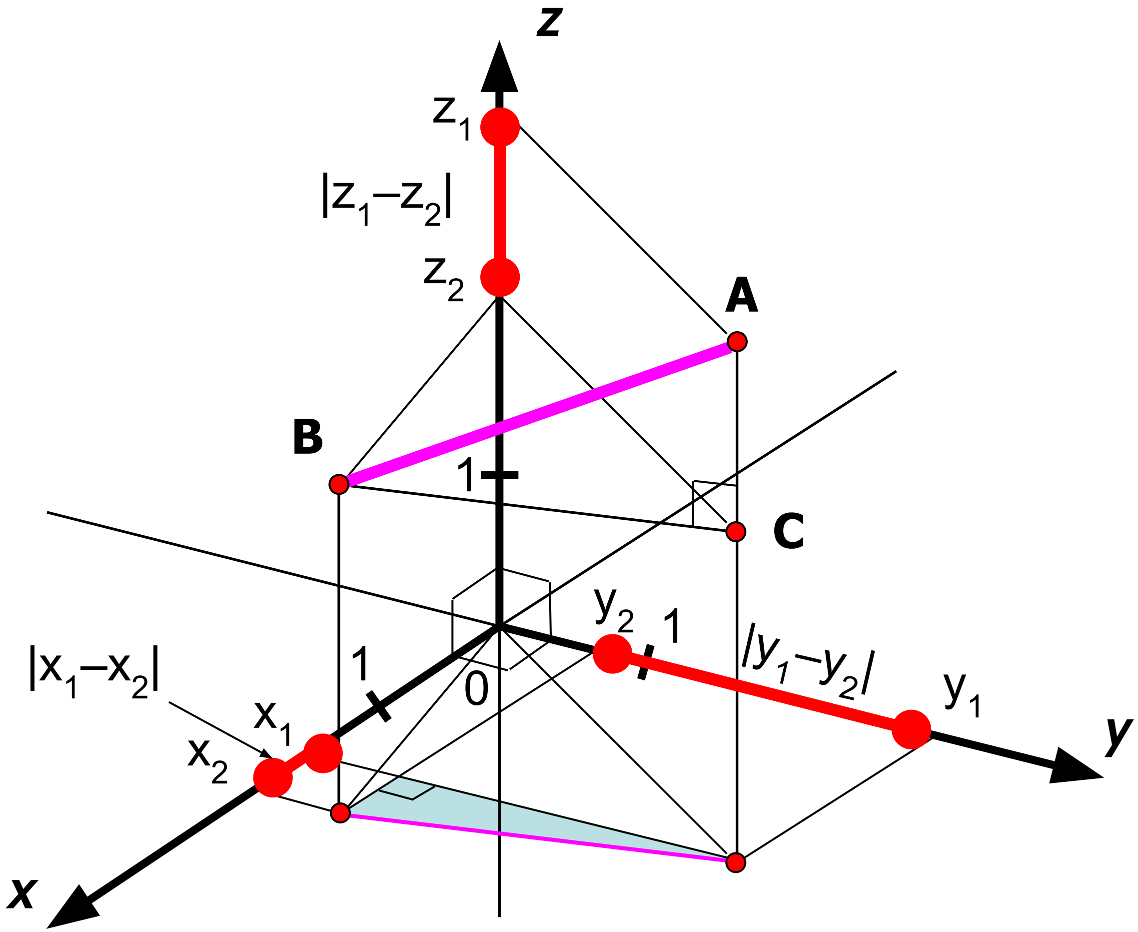
Пусть **A**(a; b; c)



Построим точку **A_6**, симметричную данной точке относительно плоскости ***Oyz***.

9). Тогда координаты точки **A_6**($-a$; b; c).

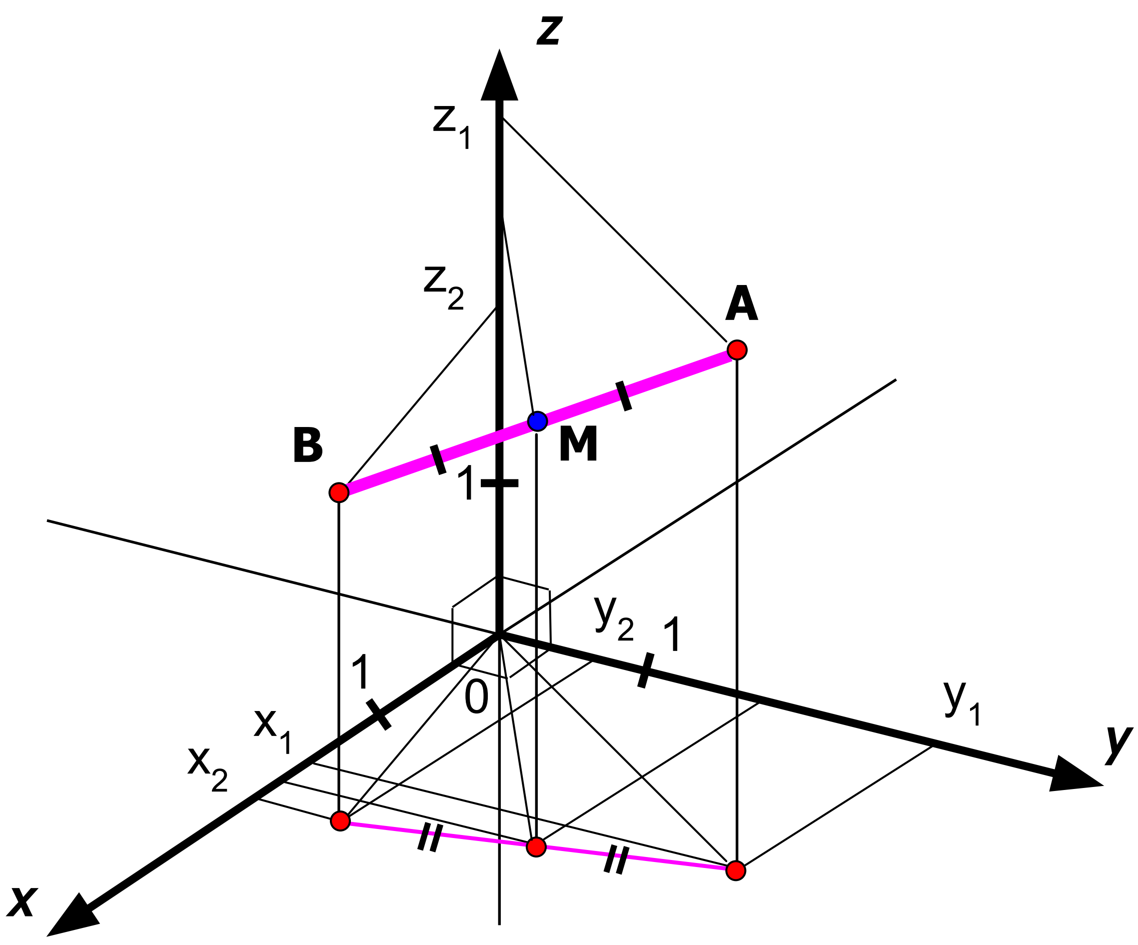
Расстояние между точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$



$$\sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2}$$

$$\sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2 + \left(z_1 - z_2\right)^2}$$

Координаты середины отрезка AB, где $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$



$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2};\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$