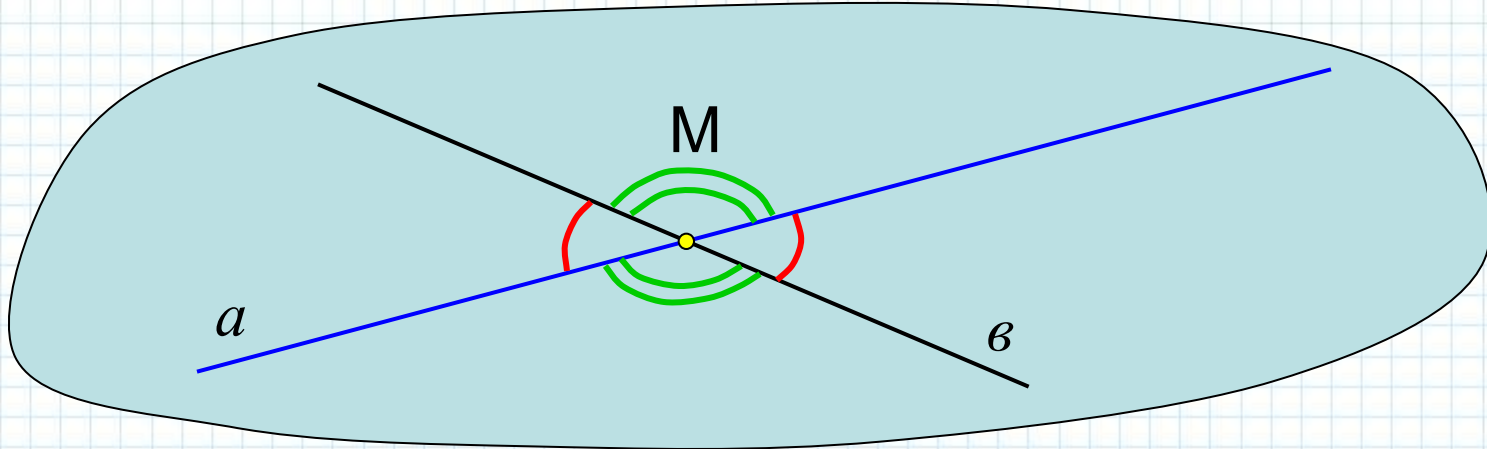


**Угол между прямыми. Угол между
прямой и плоскостью.**



**Геометрия, 10
класс.**

Две пересекающиеся прямые в пространстве определяют единственную плоскость, поэтому угол между пересекающимися прямыми в пространстве определяется так же как в плоскости. Вспомним это определение:



Определение . Меньший из неразвернутых углов, полученных при пересечении двух прямых, называется углом между данными прямыми.

Из определения следует, что угол между двумя пересекающимися прямыми не может превышать 90° т.е.

$$\alpha, \beta \in (0^{\circ}; 90^{\circ}]$$

Если прямые параллельные, то величина угла между ними считается равной 0° .

Пример 1. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите углы между прямыми: 1) CC_1 и BC_1 ; 2) BC_1 и CB_1 ; 3) AA_1 и CC_1 ; 4) $A_1 C_1$ и BC_1 .

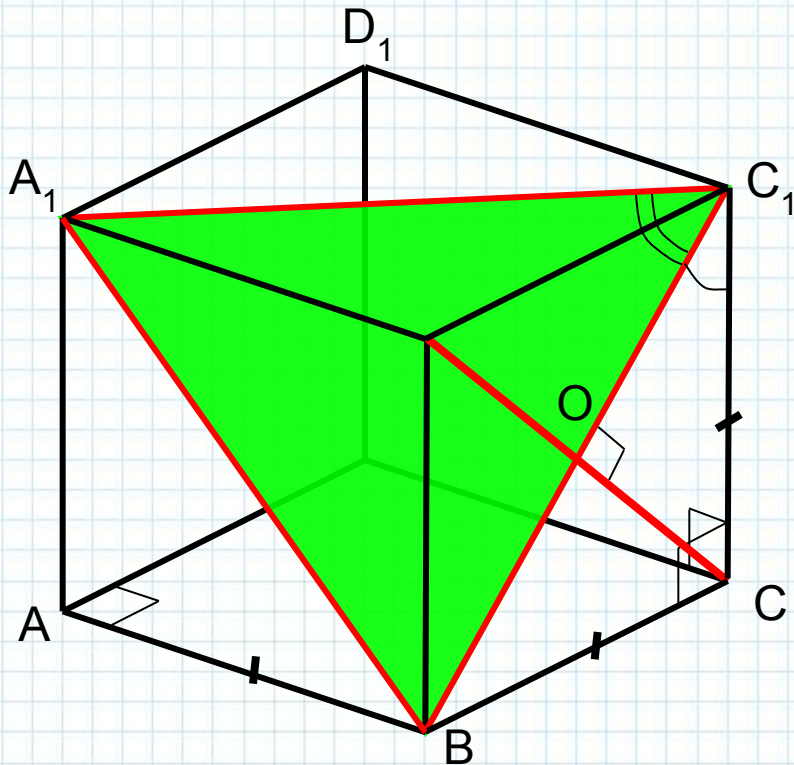
Решение.

1) $\sphericalangle CC_1, BC_1 = \sphericalangle BC_1 C = 45^\circ$ (по свойству диагоналей квадрата);

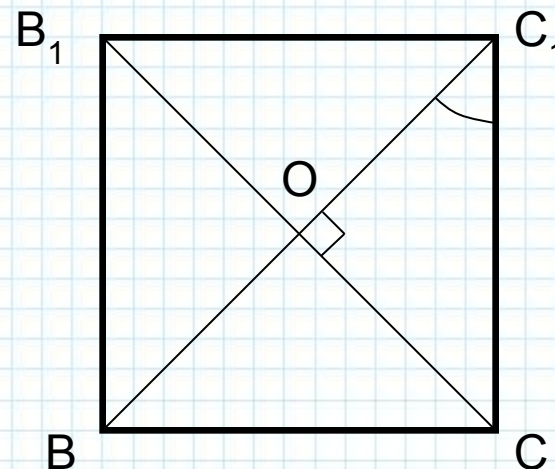
2) $\sphericalangle BC_1, CB_1 = \sphericalangle C_1 O C = 90^\circ$ (по свойству диагоналей квадрата);

3) $\sphericalangle AA_1, CC_1 = 0^\circ$, т.к. $AA_1 \parallel CC_1$;

4) $\sphericalangle A_1 C_1, BC_1 = \sphericalangle A_1 C_1 B = 60^\circ$ (по свойству равностороннего треугольника $\triangle A_1 C_1 B$);



Ответ: 1) 45° ; 2) 90° ; 3) 0° ; 4) 60° .

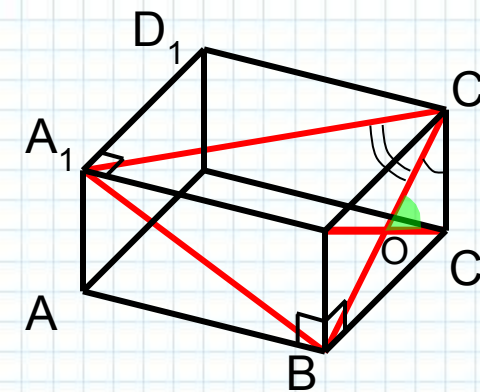


В общем случае, для нахождения угла между пересекающимися прямыми обычно рассматривают треугольник, в который входит интересующий нас угол. В прямоугольном треугольнике необходимо выразить какую-либо тригонометрическую функцию этого угла, в произвольном треугольнике – косинус данного угла (по следствию из теоремы косинусов). Далее сам угол находят с помощью обратных тригонометрических функций.

Пример 2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, $AB=4$ см, $BC=3$ см, $BB_1=2$ см. Найдите углы между прямыми: 1) CC_1 и BC_1 ; 2) BC_1 и CB_1 ; 3) AA_1 и CC_1 ; 3) $A_1 C_1$ и BC_1 .

Решение.

1) $CC_1, BC_1 = \angle BC_1 C$. Из $\triangle BC_1 C$, $\angle C=90^\circ$: $tg \angle BC_1 C = 1,5 \Rightarrow \angle BC_1 C = \text{arctg} 1,5 \approx 56^\circ 18'$;



2) $BC_1, CB_1 = \angle C_1 O C$. Из $\triangle OC_1 C$, $OC=OC_1$: $\angle O = 180^\circ - 2 \cdot \angle C_1 =$

$= 180^\circ - 2 \text{arctg} 1,5 \approx 180^\circ - 112^\circ 36' = 67^\circ 24'$; (по теореме о сумме углов треугольника и свойству равнобедренного тр-ка)

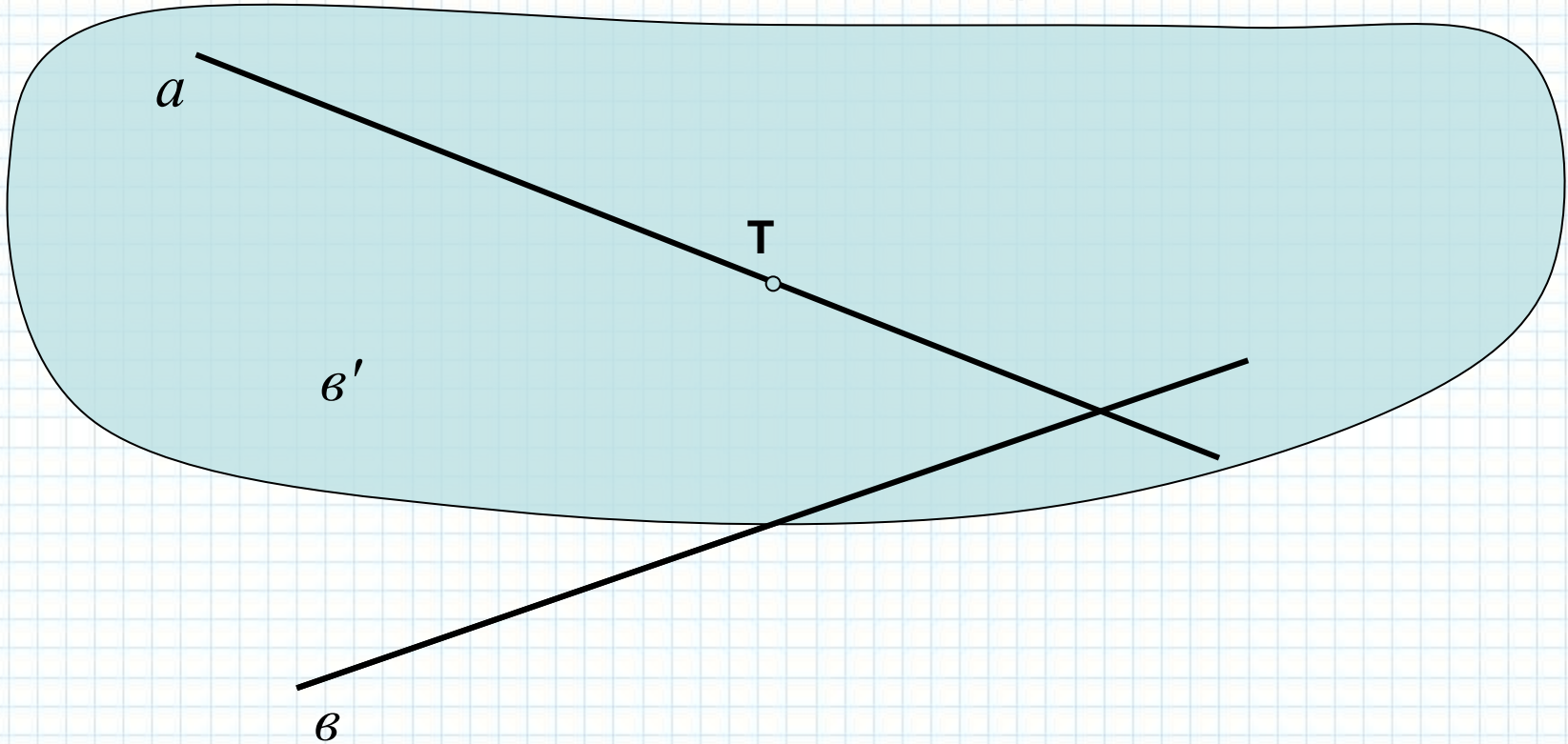
3) $AA_1, CC_1 = 0^\circ$, т.к. $AA_1 \parallel CC_1$;

4) $A_1 C_1, BC_1 = \angle A_1 C_1 B$. Стороны $\triangle A_1 C_1 B$ находим из прямоугольных треугольников $\triangle A_1 C_1 D_1$, $\triangle AA_1 B$, $\triangle CC_1 B$ по теореме Пифагора: $A_1 C_1 = 5$ см, $A_1 B = 2\sqrt{5}$ см, $BC_1 = \sqrt{13}$ см. Теперь, по следствию из теоремы косинусов:

$$\cos \angle C_1 = \frac{25 + 13 - 20}{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{13}} = \frac{9}{5\sqrt{13}} = \frac{9\sqrt{13}}{65} \Rightarrow \angle C_1 = \text{arccos} \frac{9\sqrt{13}}{65} \approx 60^\circ 3'$$

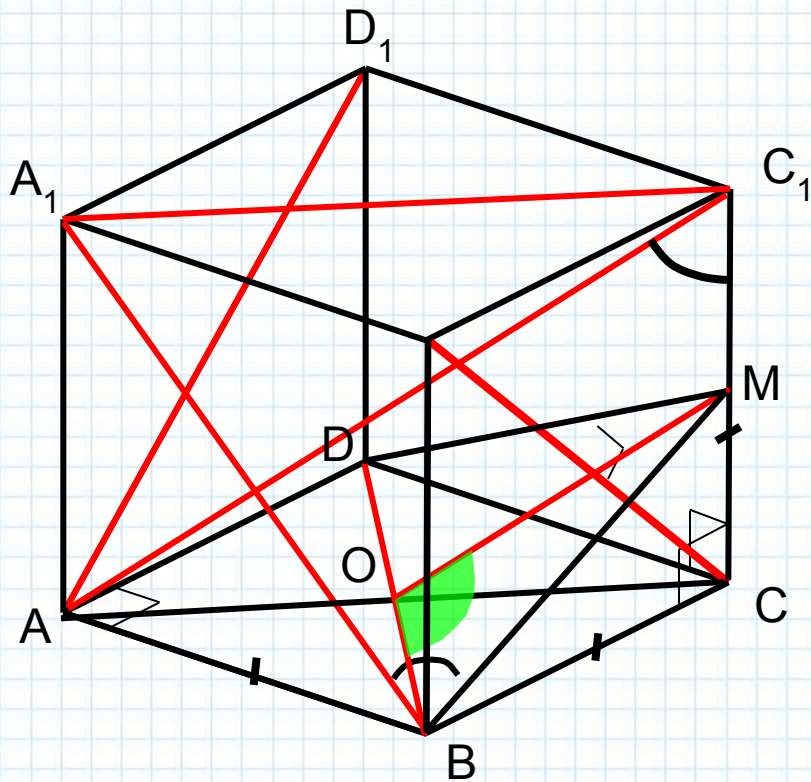
Определение. Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между соответственно параллельными им пересекающимися прямыми:

$$\sphericalangle a, b = \sphericalangle a', b' \quad a, b \notin \square, \quad b \parallel b', \quad T \in a, b'$$



Обратите внимание, что плоскость, образованная пересекающимися прямыми a и b' параллельна прямой b (по признаку параллельности прямой и плоскости).

Пример 3. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите углы между прямыми: 1) CC_1 и AB ; 2) AD_1 и CB_1 ; 3) AD_1 и BA_1 ; 4) AC_1 и BB_1 ; 5) AC_1 и BD .



Решение.

1) $CC_1, AB = CC_1, DC = 90^\circ$ (по определению квадрата);

2) $AD_1, CB_1 = BC_1, CB_1 = 90^\circ$ (по свойству диагоналей квадрата);

3) $AD_1, BA_1 = BC_1, BA_1 = 60^\circ$ (по свойству равностороннего треугольника $\Delta A_1 C_1 B$);

4) $AC_1, BB_1 = AC_1, CC_1 = \angle AC_1 C$.

В ΔACC_1 , $\angle C = 90^\circ$ можно выразить любую из тригонометрических функций, т.к. известны все его стороны: $CC_1 = a$, $AC = a\sqrt{2}$, $AC_1 = a\sqrt{3}$.

Например,

$$\cos \angle C_1 = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \angle C_1 = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 54^\circ 42'.$$

5) $AC_1, BD = OM, BD = \angle MOB$, где $O \in BD$, AC и M – середина CC_1 .

ΔBMD – равнобедренный с основанием BD , MO – медиана, а значит и высота, т.е. $\angle MOB = 90^\circ$.

Задание. Докажите, что все скрещивающиеся ребра правильной треугольной пирамиды попарно взаимно перпендикулярны.

Дано: $SABC$ – треугольная пирамида,
 $SA=SB=SC$, $AB=BC=AC$.

Доказать: $AC \perp BS$.

Доказательство.

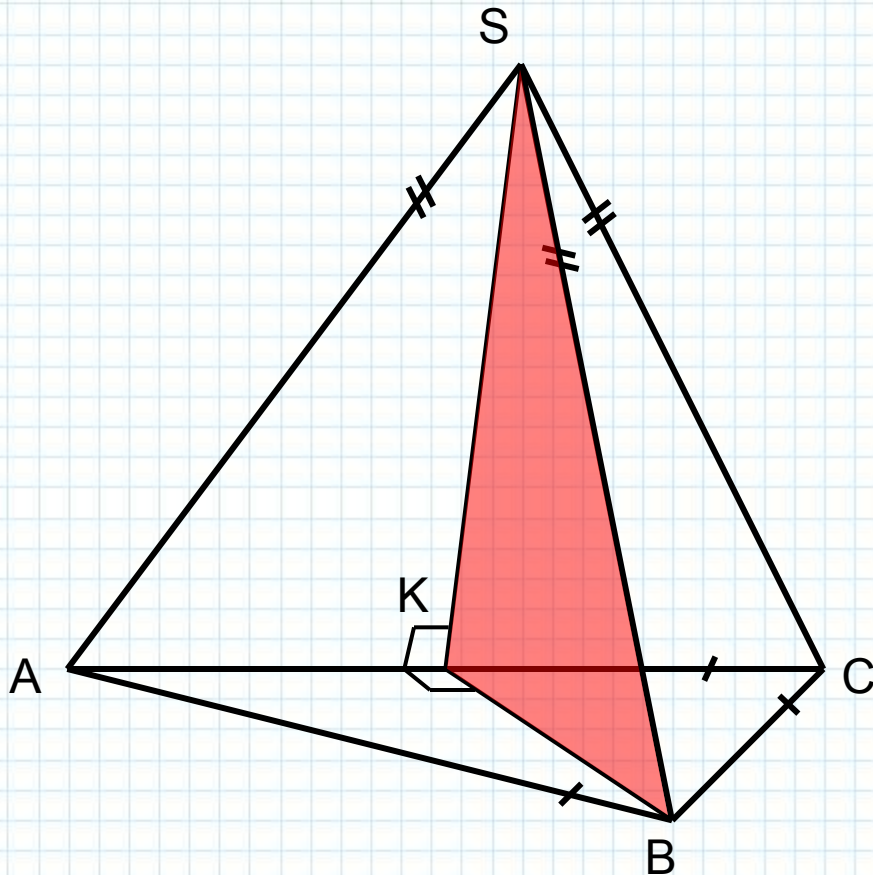
1) Построим сечение тетраэдра, проходящее через ребро BS и точку K – середину ребра AC .

2) По свойству медианы, проведённой к основанию равнобедренного треугольника $AC \perp SK$ и $AC \perp BK$.

Перед заключительным этапом доказательства вспомните определение и признак перпендикулярных прямой и плоскости.

3) Т.к. $AC \perp SK$ и $AC \perp BK$, то $AC \perp (BKS)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

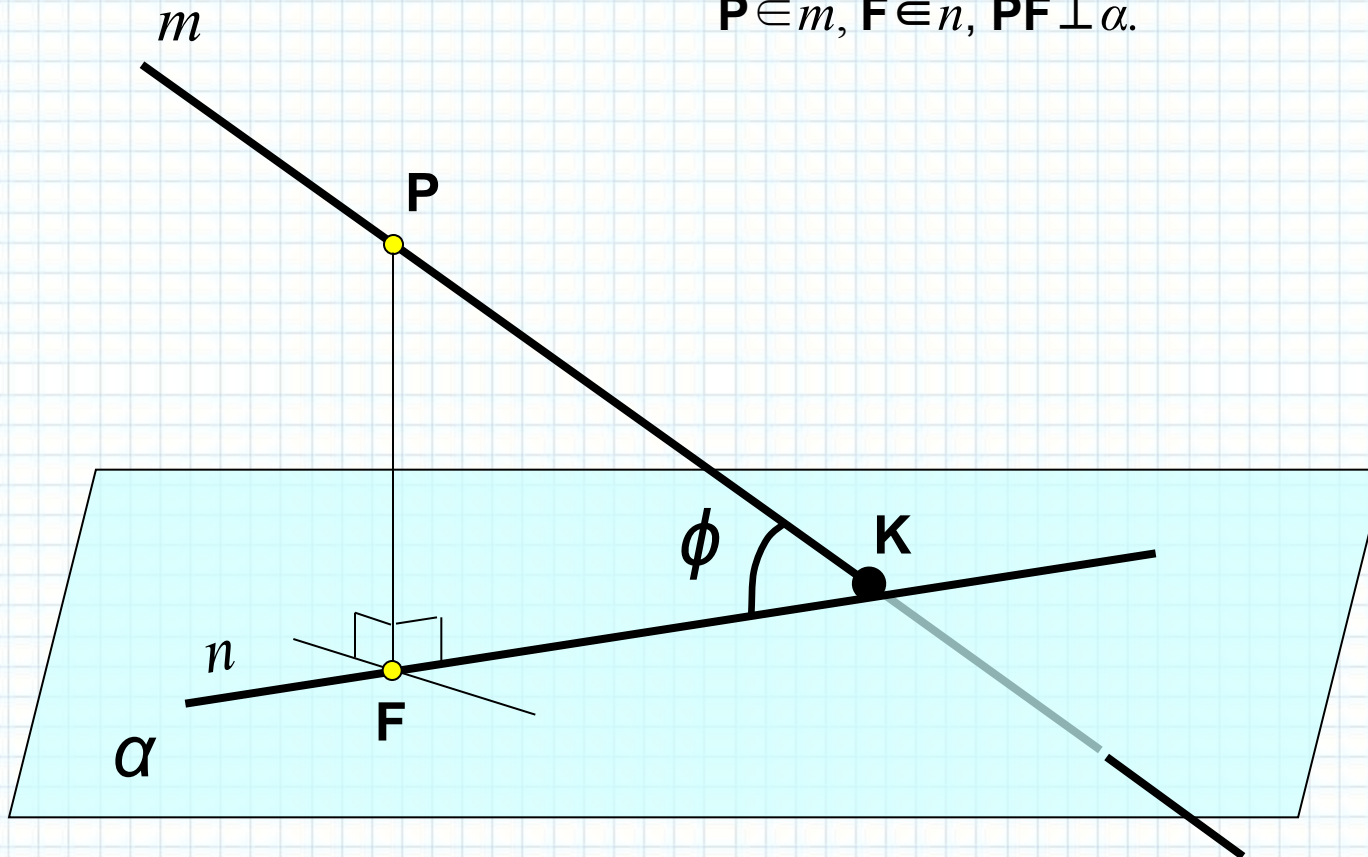
А значит, $AC \perp BS \subset (BKS)$ (по определению перпендикулярности прямой и плоскости)



Определение. Углом между плоскостью и пересекающей её прямой называется угол между данной прямой и её прямоугольной (ортогональной) проекцией на данную плоскость.

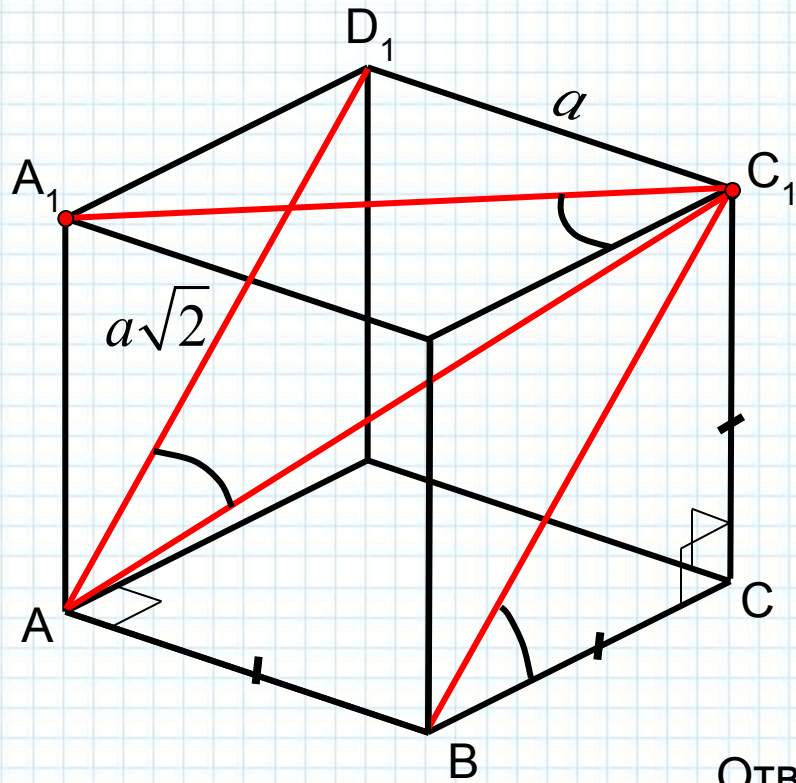
$\alpha, m = n, m = \varphi$, где $m \cap \alpha = K$, $m \cap n = K$, $n \subset \alpha$,

$P \in m$, $F \in n$, $PF \perp \alpha$.



Обратите внимание, что понятия угла между скрещивающимися прямыми и угла между прямой и плоскостью сводятся к понятию угла между пересекающимися прямыми.

Пример 4. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите углы между : 1) BC_1 и (ABC) ; 2) $A_1 C_1$ и (CBB_1) ; 3) AC_1 и $(AA_1 D_1)$.



Решение.

1) $\angle BC_1, (ABC) = \angle BC_1, BC = 45^\circ$ (по свойству диагоналей квадрата);

2) $\angle A_1 C_1, (CBB_1) = \angle A_1 C_1, B_1 C_1 = 45^\circ$ (по свойству диагоналей квадрата);

3) $\angle AC_1, (AA_1 D_1) = \angle AC_1, AD_1 = \arctg \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: 1) 45° ; 2) 45° ; 3) $\arctg \frac{\sqrt{2}}{2}$.

