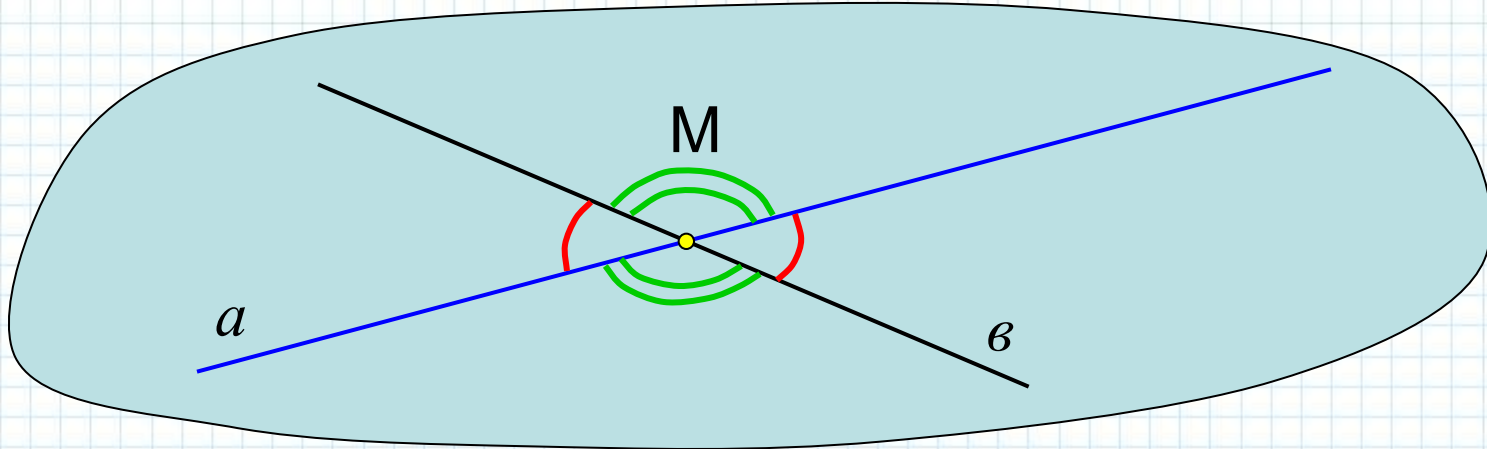


**Угол между прямыми. Угол между  
прямой и плоскостью.**



**Геометрия, 10  
класс.**

Две пересекающиеся прямые в пространстве определяют единственную плоскость, поэтому угол между пересекающимися прямыми в пространстве определяется так же как в плоскости. Вспомним это определение:



**Определение** . Меньший из неразвернутых углов, полученных при пересечении двух прямых, называется углом между данными прямыми.

Из определения следует, что угол между двумя пересекающимися прямыми не может превышать  $90^{\circ}$  т.е.

$$\alpha, \beta \in (0^{\circ}; 90^{\circ}]$$

Если прямые параллельные, то величина угла между ними считается равной  $0^{\circ}$ .

**Пример 1.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите углы между прямыми: 1)  $CC_1$  и  $BC_1$ ; 2)  $BC_1$  и  $CB_1$ ; 3)  $AA_1$  и  $CC_1$ ; 4)  $A_1 C_1$  и  $BC_1$ .

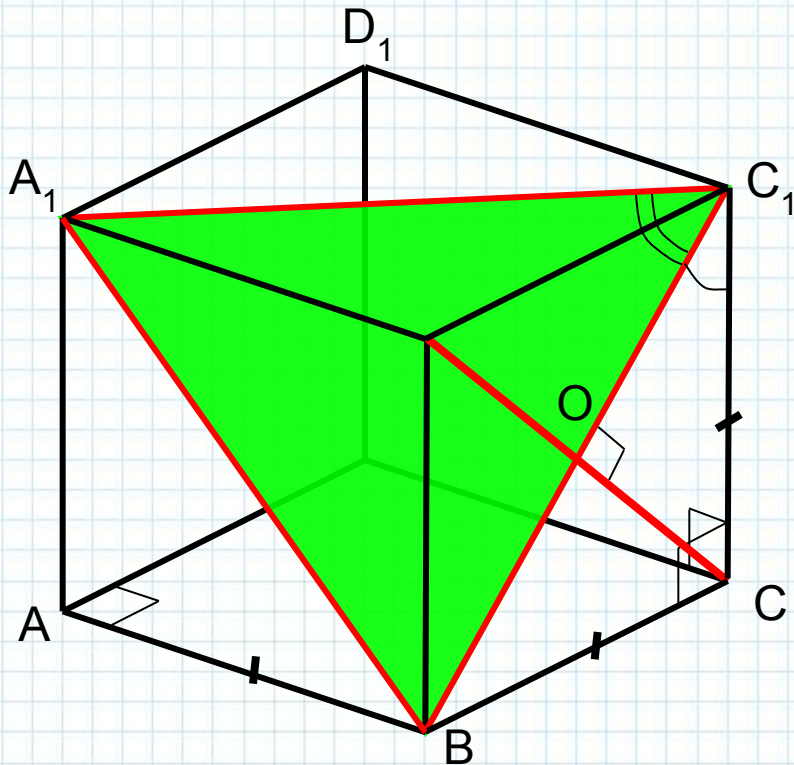
*Решение.*

1)  $\sphericalangle CC_1, BC_1 = \sphericalangle BC_1 C = 45^\circ$  (по свойству диагоналей квадрата);

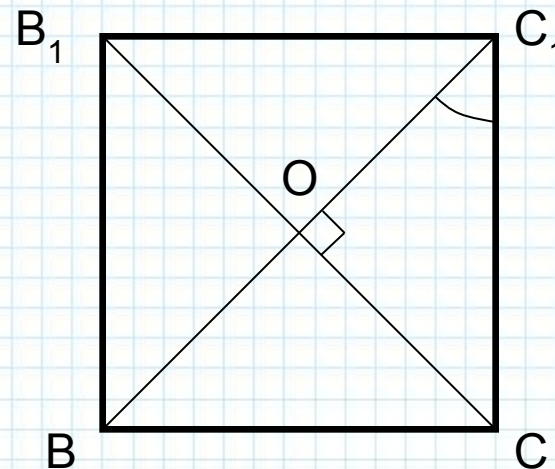
2)  $\sphericalangle BC_1, CB_1 = \sphericalangle C_1 OC = 90^\circ$  (по свойству диагоналей квадрата);

3)  $\sphericalangle AA_1, CC_1 = 0^\circ$ , т.к.  $AA_1 \parallel CC_1$ ;

4)  $\sphericalangle A_1 C_1, BC_1 = \sphericalangle A_1 C_1 B = 60^\circ$  (по свойству равностороннего треугольника  $\Delta A_1 C_1 B$ );



Ответ: 1)  $45^\circ$ ; 2)  $90^\circ$ ; 3)  $0^\circ$ ; 4)  $60^\circ$ .



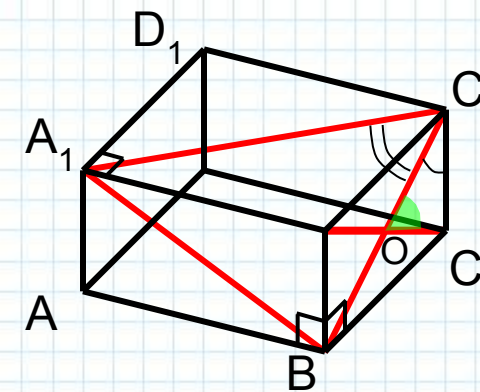


В общем случае, для нахождения угла между пересекающимися прямыми обычно рассматривают треугольник, в который входит интересующий нас угол. В прямоугольном треугольнике необходимо выразить какую-либо тригонометрическую функцию этого угла, в произвольном треугольнике – косинус данного угла (по следствию из теоремы косинусов). Далее сам угол находят с помощью обратных тригонометрических функций.

**Пример 2.** Дан прямоугольный параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ,  $AB=4$  см,  $BC=3$  см,  $BB_1=2$  см. Найдите углы между прямыми: 1)  $CC_1$  и  $BC_1$ ; 2)  $BC_1$  и  $CB_1$ ; 3)  $AA_1$  и  $CC_1$ ; 3)  $A_1 C_1$  и  $BC_1$ .

*Решение.*

1)  $CC_1, BC_1 = \angle BC_1 C$ . Из  $\triangle BC_1 C$ ,  $\angle C=90^\circ$ :  $tg \angle BC_1 C = 1,5 \Rightarrow \angle BC_1 C = \arctg 1,5 \approx 56^\circ 18'$ ;



2)  $BC_1, CB_1 = \angle C_1 O C$ . Из  $\triangle OC_1 C$ ,  $OC=OC_1$ :  $\angle O = 180^\circ - 2 \cdot \angle C_1 =$

$= 180^\circ - 2 \arctg 1,5 \approx 180^\circ - 112^\circ 36' = 67^\circ 24'$ ; (по теореме о сумме углов треугольника и свойству равнобедренного тр-ка)

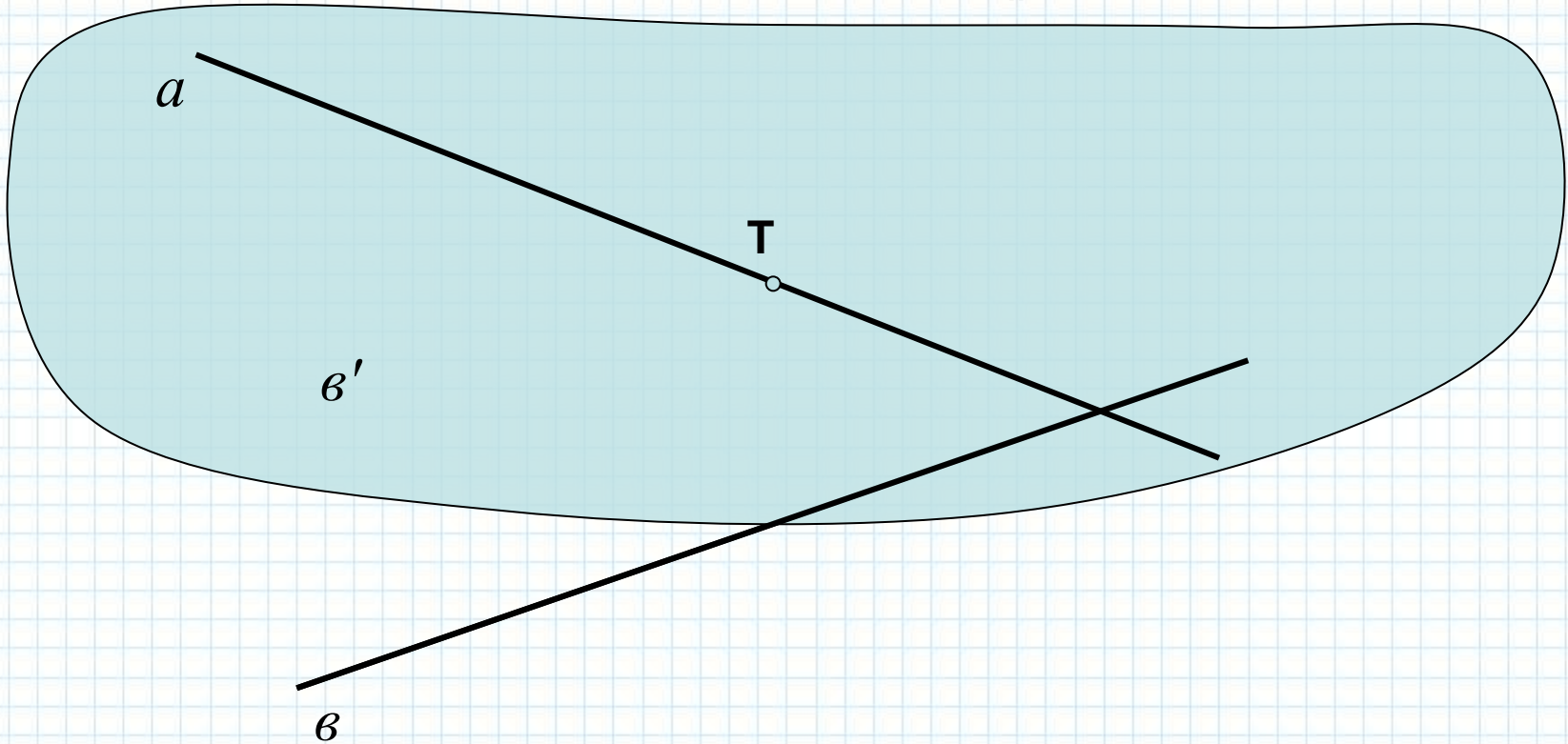
3)  $AA_1, CC_1 = 0^\circ$ , т.к.  $AA_1 \parallel CC_1$ ;

4)  $A_1 C_1, BC_1 = \angle A_1 C_1 B$ . Стороны  $\triangle A_1 C_1 B$  находим из прямоугольных треугольников  $\triangle A_1 C_1 D_1$ ,  $\triangle AA_1 B$ ,  $\triangle CC_1 B$  по теореме Пифагора:  $A_1 C_1 = 5$  см,  $A_1 B = 2\sqrt{5}$  см,  $BC_1 = \sqrt{13}$  см. Теперь, по следствию из теоремы косинусов:

$$\cos \angle C_1 = \frac{25 + 13 - 20}{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{13}} = \frac{9}{5\sqrt{13}} = \frac{9\sqrt{13}}{65} \Rightarrow \angle C_1 = \arccos \frac{9\sqrt{13}}{65} \approx 60^\circ 3'$$

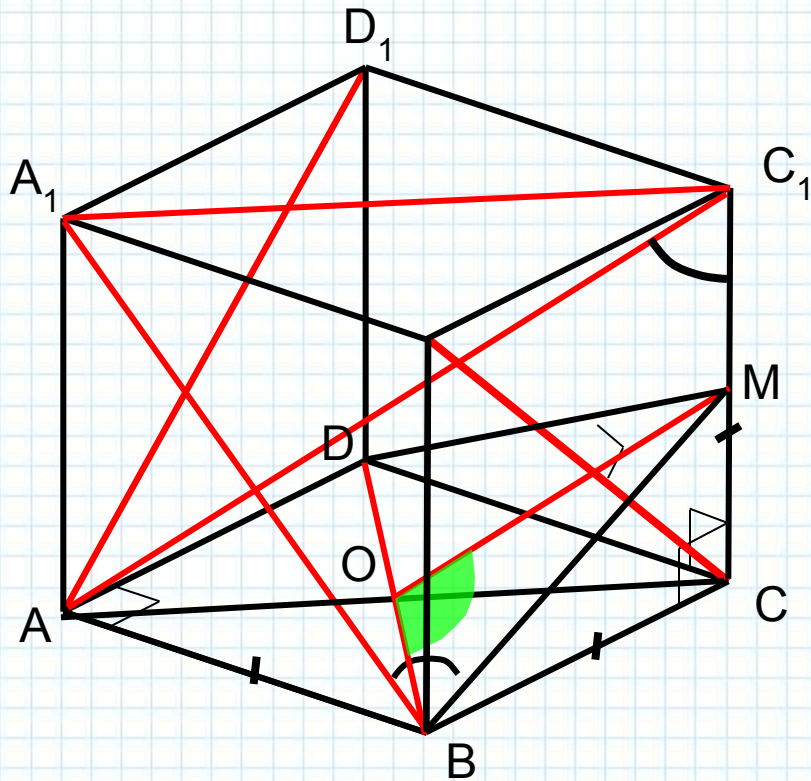
**Определение.** Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между соответственно параллельными им пересекающимися прямыми:

$$\sphericalangle a, b = \sphericalangle a', b' \quad a, b \notin \square, \quad b \parallel b', \quad T \in a, b'$$



Обратите внимание, что плоскость, образованная пересекающимися прямыми  $a$  и  $b'$  параллельна прямой  $b$  (по признаку параллельности прямой и плоскости).

**Пример 3.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите углы между прямыми: 1)  $CC_1$  и  $AB$ ; 2)  $AD_1$  и  $CB_1$ ; 3)  $AD_1$  и  $BA_1$ ; 4)  $AC_1$  и  $BB_1$ ; 5)  $AC_1$  и  $BD$ .



*Решение.*

1)  $CC_1, AB = CC_1, DC = 90^\circ$  (по определению квадрата);

2)  $AD_1, CB_1 = BC_1, CB_1 = 90^\circ$  (по свойству диагоналей квадрата);

3)  $AD_1, BA_1 = BC_1, BA_1 = 60^\circ$  (по свойству равностороннего треугольника  $\Delta A_1 C_1 B$ );

4)  $AC_1, BB_1 = AC_1, CC_1 = \angle AC_1 C$ .

В  $\Delta ACC_1$ ,  $\angle C = 90^\circ$  можно выразить любую из тригонометрических функций, т.к. известны все его стороны:  $CC_1 = a$ ,  $AC = a\sqrt{2}$ ,  $AC_1 = a\sqrt{3}$ .

Например,

$$\cos \angle C_1 = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \angle C_1 = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 54^\circ 42'.$$

5)  $AC_1, BD = OM, BD = \angle MOB$ , где  $O \in BD$ ,  $AC$  и  $M$  – середина  $CC_1$ .

$\Delta BMD$  – равнобедренный с основанием  $BD$ ,  $MO$  – медиана, а значит и высота, т.е.  $\angle MOB = 90^\circ$ .

**Задание.** Докажите, что все скрещивающиеся ребра правильной треугольной пирамиды попарно взаимно перпендикулярны.

Дано:  $SABC$  – треугольная пирамида,  
 $SA=SB=SC$ ,  $AB=BC=AC$ .

Доказать:  $AC \perp BS$ .

Доказательство.

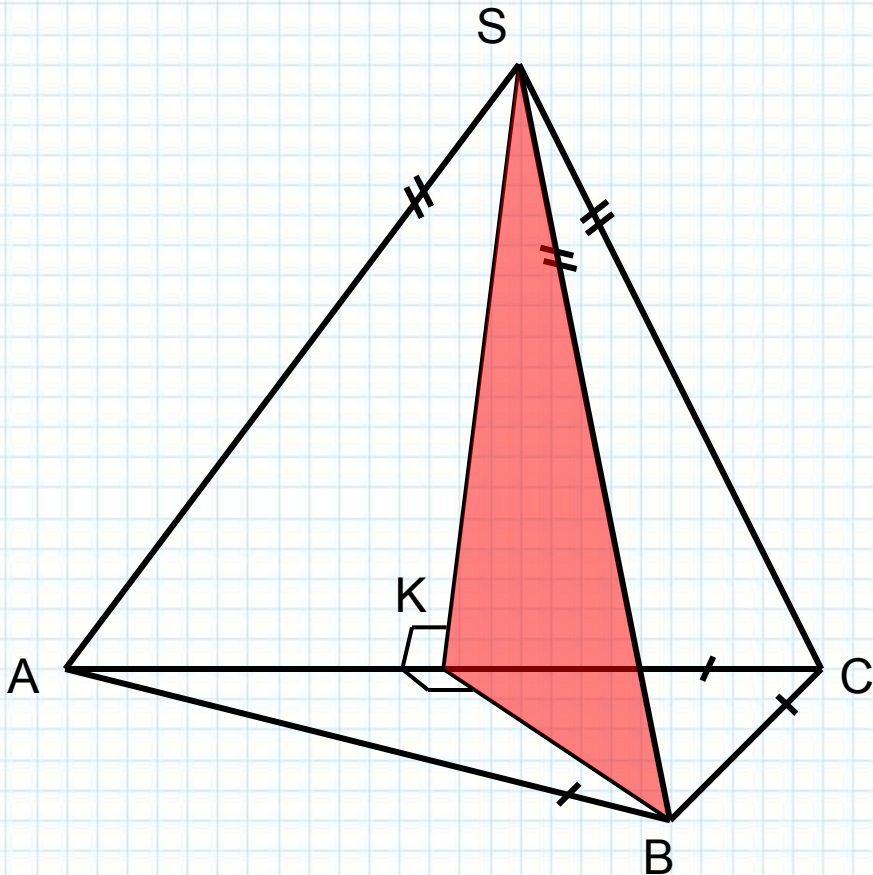
1) Построим сечение тетраэдра, проходящее через ребро  $BS$  и точку  $K$  – середину ребра  $AC$ .

2) По свойству медианы, проведённой к основанию равнобедренного треугольника  $AC \perp SK$  и  $AC \perp BK$ .

Перед заключительным этапом доказательства вспомните определение и признак перпендикулярных прямой и плоскости.

3) Т.к.  $AC \perp SK$  и  $AC \perp BK$ , то  $AC \perp (BKS)$  (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

А значит,  $AC \perp BS \subset (BKS)$  (по определению перпендикулярности прямой и плоскости)

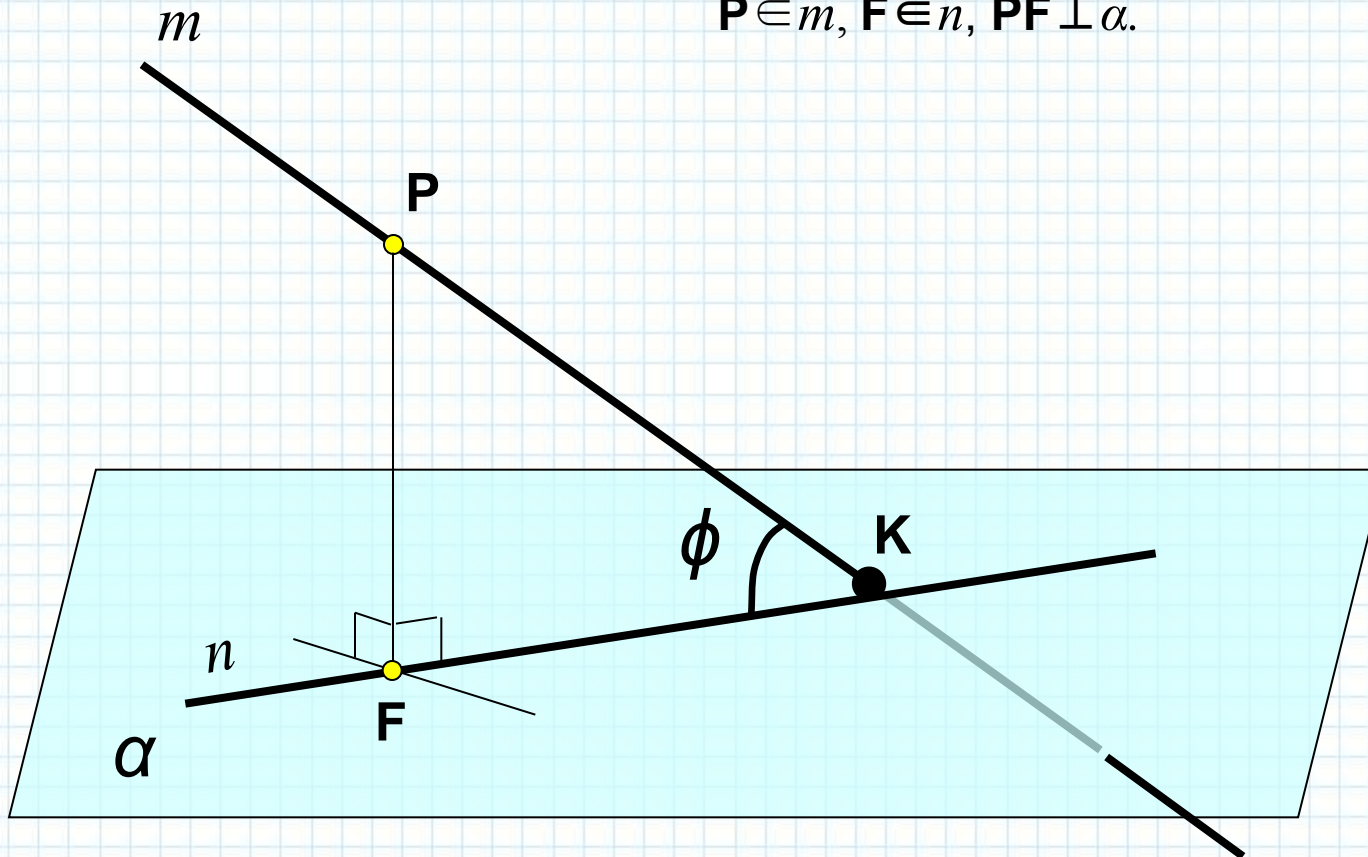




**Определение.** Углом между плоскостью и пересекающей её прямой называется угол между данной прямой и её прямоугольной (ортогональной) проекцией на данную плоскость.

$\alpha, m = n, m = \varphi$ , где  $m \cap \alpha = K$ ,  $m \cap n = K$ ,  $n \subset \alpha$ ,

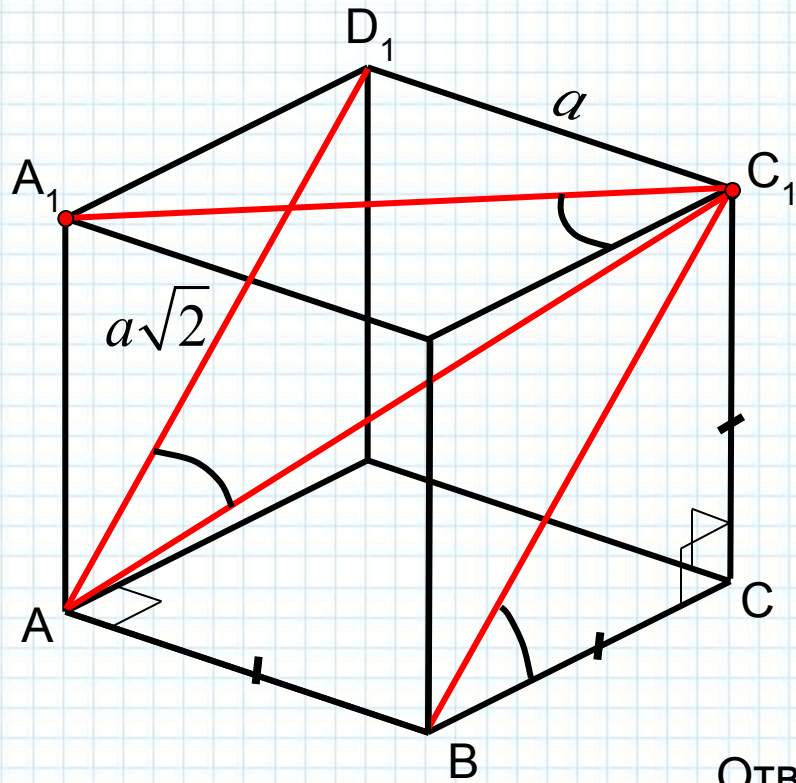
$P \in m$ ,  $F \in n$ ,  $PF \perp \alpha$ .



Обратите внимание, что понятия угла между скрещивающимися прямыми и угла между прямой и плоскостью сводятся к понятию угла между пересекающимися прямыми.



**Пример 4.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите углы между : 1)  $BC_1$  и  $(ABC)$ ; 2)  $A_1 C_1$  и  $(CBB_1)$ ; 3)  $AC_1$  и  $(AA_1 D_1)$ .



*Решение.*

1)  $\angle BC_1, (ABC) = \angle BC_1, BC = 45^\circ$  (по свойству диагоналей квадрата);

2)  $\angle A_1 C_1, (CBB_1) = \angle A_1 C_1, B_1 C_1 = 45^\circ$  (по свойству диагоналей квадрата);

3)  $\angle AC_1, (AA_1 D_1) = \angle AC_1, AD_1 = \arctg \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Ответ: 1)  $45^\circ$ ; 2)  $45^\circ$ ; 3)  $\arctg \frac{\sqrt{2}}{2}$ .



