

ЭКОНОМЕТРИКА

Лекция 7

Уравнение множественной регрессии

Теорема Гаусса-Маркова

**Автор: Костюнин Владимир Ильич, доцент кафедры:
«Математическое моделирование экономических
процессов»**

Уравнение множественной регрессии

$$y_t = a_0 + a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t} \dots + a_n x_{nt} + u_t = \sum_{i=0}^n a_i x_{it} + u_t \quad (7.1)$$

Наилучшая линейная процедура получения оценок параметров уравнения (7.1) и условия, при которых эта процедура дает несмещенные и эффективные оценки, сформулирована в теореме Гаусса-Маркова



Карл Фридрих Гаусс

Время жизни

30.04.1777 - 23.02.1855

Научная сфера –

математика, физика,
астрономия



Андрей Андреевич Марков

Время жизни

14.06.1856 - 20.07.1922

Научная сфера - математика

Теорема Гаусса - Маркова

Постановка задачи:

Имеем случайную выборку наблюдений за поведением экономического объекта объемом n

$$\left(\begin{array}{ccccc} y_1 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{k1} \\ y_2 & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{kn} \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{Выборка наблюдений за переменными} \\ \text{модели (7.1)} \\ \text{Первый индекс – номер регрессора} \\ \text{Второй индекс – номер наблюдения} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = a_0 + a_1 x_{11} + a_2 x_{21} \dots + a_n x_{k1} + u_1 \\ y_2 = a_0 + a_1 x_{12} + a_2 x_{22} \dots + a_n x_{k2} + u_2 \\ \dots \\ y_n = a_0 + a_1 x_{1n} + a_2 x_{2n} \dots + a_n x_{kn} + u_n \end{array} \right. \quad (7.2)$$

(7.2) - Система уравнений наблюдений, связывающая наблюдения в выборке

Теорема Гаусса - Маркова

Сформируем вектора и матрицу коэффициентов на основе системы (7.2)

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_k \end{pmatrix} \quad \hat{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \hat{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{kn} \end{pmatrix}$$

\hat{Y} – вектор выборочных значений эндогенной переменной

\hat{U} – вектор выборочных значений случайного возмущения

\hat{A} - вектор неизвестных параметров модели

x – вектор регрессоров

X – матрица коэффициентов при неизвестных параметрах

$$\hat{Y} = \hat{A}x + \hat{U}$$

Теорема Гаусса - Маркова

По данным выборки найти: \tilde{A} , $\text{Cov}(\tilde{A}\tilde{A})$, σ_u , $\sigma(\tilde{y}(z))$

Теорема (Гаусса – Маркова)

Если матрица X неколлинеарна и вектор случайных возмущений удовлетворяет следующим требованиям:

1. $M(u_i) = 0$ Математическое ожидание всех случайных возмущений равно нулю
2. $\sigma^2(u_i) = \sigma_u^2$ Дисперсия случайных возмущений постоянна во всех наблюдениях (условие **ГОМОСКЕДАСТИЧНОСТИ**)
3. $\text{Cov}(u_i, u_j) = 0$
при $i \neq j$ Случайные возмущения в разных наблюдениях не зависимы
4. $\text{Cov}(x_i, u_i) = 0$ Случайные возмущения и регрессоры не зависимы

Теорема Гаусса - Маркова

Тогда наилучшей линейной процедурой оценки параметров модели (7.1) является:

$$\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \quad (7.3)$$

которая удовлетворяет методу наименьших квадратов

При этом:

$$\text{Cov}(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{A}}) = \tilde{\sigma}_u^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$$

$$\tilde{\sigma}_u^2 = \frac{1}{n-k} \sum (y_i - \tilde{y}_i)^2 = \frac{1}{n-k} \sum u_i^2$$

$$\tilde{Y}(\mathbf{z}) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 z_1 + \dots + \tilde{a}_k z_k$$

$$\sigma^2(\tilde{y}(\mathbf{z})) = \tilde{\sigma}_u^2 (1 + q_0)$$

$$q_0 = \mathbf{z}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{z}$$

Теорема Гаусса - Маркова

Доказательство

Воспользуемся методом наименьших квадратов

$$S = \sum_{i=1}^n u_i^2 = \mathbf{u}^T \mathbf{u} \Rightarrow \min \quad (7.4)$$

где

$$\mathbf{u} = \mathbf{Y} - \tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\tilde{\mathbf{a}} \quad (7.5)$$

Подставив (7.5) в (7.4) получим

$$\begin{aligned} S &= \mathbf{u}^T \mathbf{u} = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\tilde{\mathbf{a}})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\tilde{\mathbf{a}}) = (\mathbf{Y}^T - \tilde{\mathbf{a}}^T \mathbf{X}^T) (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\tilde{\mathbf{a}}) = \\ &= \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - 2\tilde{\mathbf{a}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{Y} + \tilde{\mathbf{a}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\tilde{\mathbf{a}} \end{aligned} \quad (7.6)$$

Теорема Гаусса - Маркова

Для получения необходимого условия экстремума дифференцируем (7.6) по вектору параметров

$$\frac{\partial \mathbb{S}}{\partial \tilde{\mathbf{a}}} = -2 \mathbf{X}^T \mathbf{Y} + 2 \mathbf{X}^T \mathbf{X} \tilde{\mathbf{a}} = 0$$

Откуда система нормальных уравнений для определения искомых параметров получает вид

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \quad (7.7)$$

Решение системы (7.7) в матричном виде есть

$$\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$$

Выражение (7.3) доказано

Теорема Гаусса - Маркова

Докажем несмещенность оценок (7.3)

$$\begin{aligned} M(\tilde{\mathbf{a}}) &= M\left[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{Y}}\right] = M\left[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T (\mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{u})\right] = \\ &= M\left[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})\mathbf{a} + \mathbf{u}\right] = \mathbf{a} \end{aligned}$$

Несмещенность оценки (7.3) доказана

Вычислим ковариационную матрицу оценок (7.3)

$$\text{Cov}(\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{a}}) = \text{Cov}\left[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{Y}}, (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{Y}}\right] = \sigma_u^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$$

В результате получено выражение (7.4)

Теорема Гаусса - Маркова

Пример 1. Пусть имеем выборку из n наблюдений за случайной величиной Y

Найти наилучшие оценки среднего значения и дисперсии этой переменной

В терминах теоремы Гаусса –Маркова задача формулируется так: необходимо построить модель типа $Y = a_0 + u$, при этом имеем:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \quad X^T = (1 \ 1 \ \dots \ 1)$$

Теорема Гаусса - Маркова

Решение

1. Вычисляем $(X^T X)^{-1}$

$$(X^T X) = (1 \ 1 \ \dots \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = n \quad (X^T X)^{-1} = \frac{1}{n}$$

2. Вычисляем $(X^T Y)$

$$(X^T Y) = (1 \ 1 \ \dots \ 1) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum y_i$$

3. Вычисляем оценку параметра a_0

$$\tilde{a}_0 = (X^T X)^{-1} X^T Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

4. Находим дисперсию среднего

$$\sigma^2(\tilde{a}_0) = \sigma_u^2 (X^T X)^{-1} = \frac{\sigma_u^2}{n-1}$$

Теорема Гаусса - Маркова

Пример 2. Уравнение парной регрессии

Построить модель типа $Y = a_0 + a_1 x + u$, по данным выборки наблюдений за переменными Y и x объемом n

В схеме Гаусса-Маркова имеем:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \quad X^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$$

1. Вычисляем матрицы $(X^T X)$ и $(X^T X)^{-1}$

$$(X^T X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \quad (X^T X)^{-1} = \frac{1}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & n \end{pmatrix}$$

Теорема Гаусса - Маркова

2. Вычисляем $X^T Y$

$$(X^T Y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$$

3. Вычисляем оценку вектора параметров a

$$\tilde{a} = \frac{1}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & - \sum x_i \\ - \sum x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} \begin{pmatrix} \sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i \\ n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i \end{pmatrix}$$

Теорема Гаусса - Маркова

Вычислим дисперсии (ковариационную матрицу) параметров модели

$$\text{Cov} \begin{pmatrix} \tilde{a}_0 \\ \tilde{a}_1 \end{pmatrix} = \sigma_u^2 (X^T X)^{-1} = \sigma_u^2 \frac{1}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & n \end{pmatrix}$$

Следовательно:

$$\sigma^2(\tilde{a}_0) = \sigma_u^2 \frac{\sum x_i^2}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i}$$

$$\sigma^2(\tilde{a}_1) = \sigma_u^2 \frac{n}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i}$$

$$\text{Cov}(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1) = \sigma_u^2 \frac{-\sum x_i}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i}$$

Теорема Гаусса - Маркова

Расчет дисперсии прогнозирования

Прогноз осуществляется в точке $Z = \{1, z\}^T$

$$\sigma^2(Y(z)) = \sigma_u^2(1 + q_0)$$

$$q_0 = Z^T (X^T X)^{-1} Z = (1 \ z) \frac{1}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & -z \sum x_i \\ -\sum x_i & nz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\sum x_i^2 - 2z \sum x_i + n z^2}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} = \frac{\sum x_i^2 - \frac{1}{n} \sum x_i^2 \sum x_i^2 + (z - \bar{x})^2}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i}$$

$$\sigma^2(Y(z)) = \sigma_u^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(z - \bar{x})^2}{n \sum (x_i - \bar{x})^2} \right)$$

Оценка уравнений регрессии с помощью EXCEL

Процедура «ЛИНЕЙН» в приложении EXCEL

Алгоритм использования процедуры:

1. Подготовка таблицы исходных данных
2. Вызов процедуры «ЛИНЕЙН»
3. Ввод исходных данных в процедуру
4. Анализ результата

Рассмотрим алгоритм на примере

Теорема Гаусса - Маркова

Выводы:

1. Теорема Гаусса-Маркова формулирует наилучшую линейную процедуру расчета оценок параметров линейной модели множественной регрессии
2. Линейная процедура соответствует методу наименьших квадратов
3. Предпосылки теоремы обеспечивают получение оценок, обладающих свойствами несмещенности и эффективности
4. При выполнении предпосылок свойства эффективности и несмещенности достигаются при любом законе распределения случайного возмущения