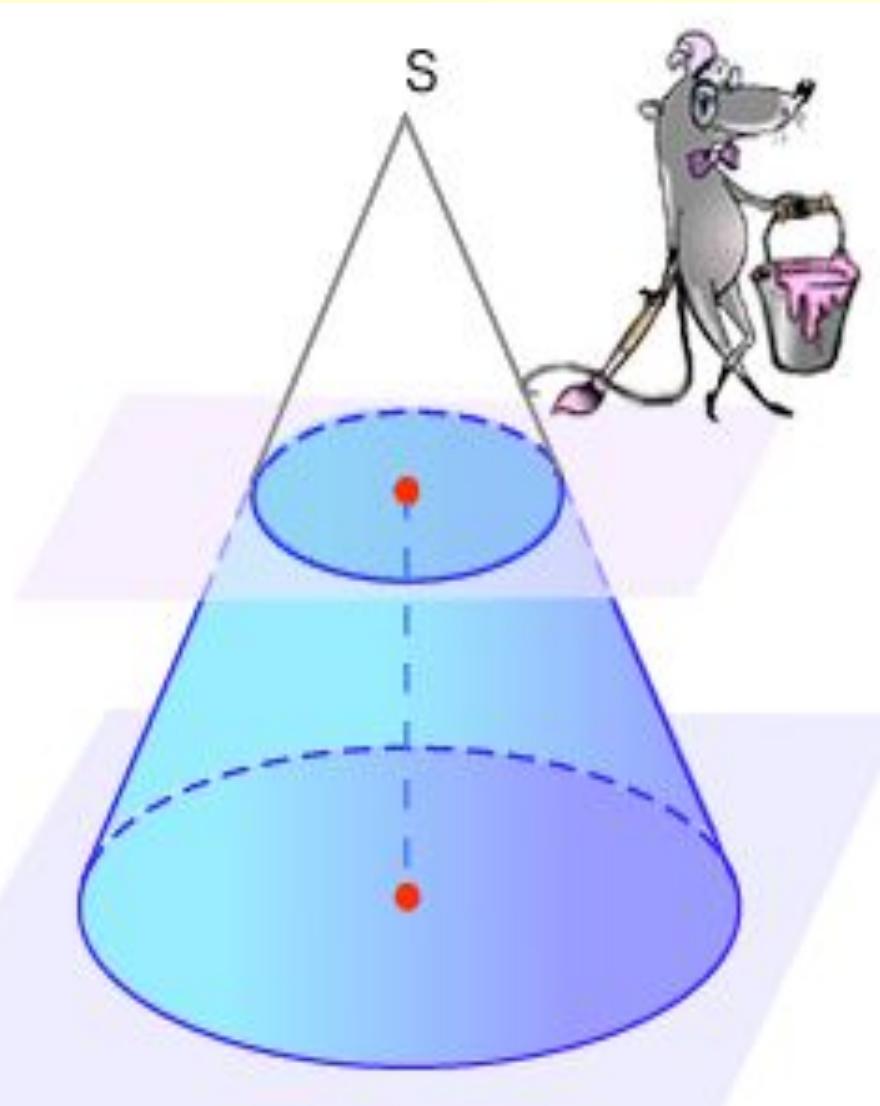


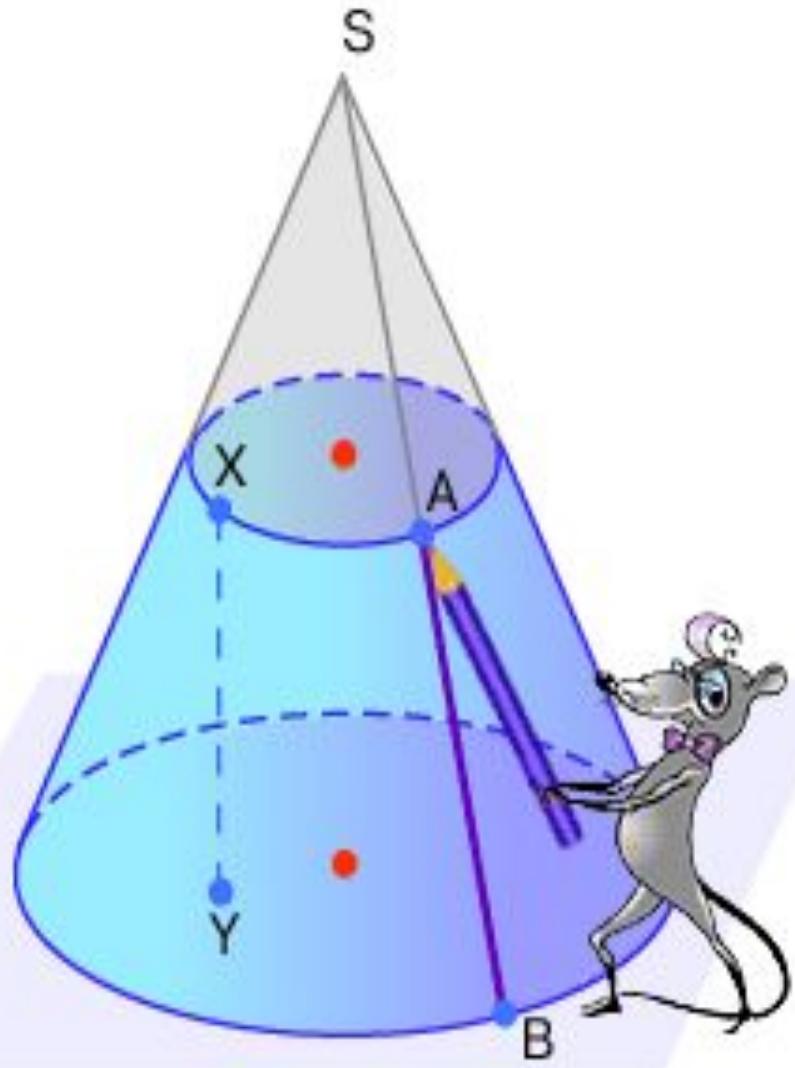
Усеченный конус.

МОУ СОШ
№256 г.
Фокино



Усеченым конусом называется часть полного конуса, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию. Круги, лежащие в параллельных плоскостях, называются основаниями усеченного конуса.



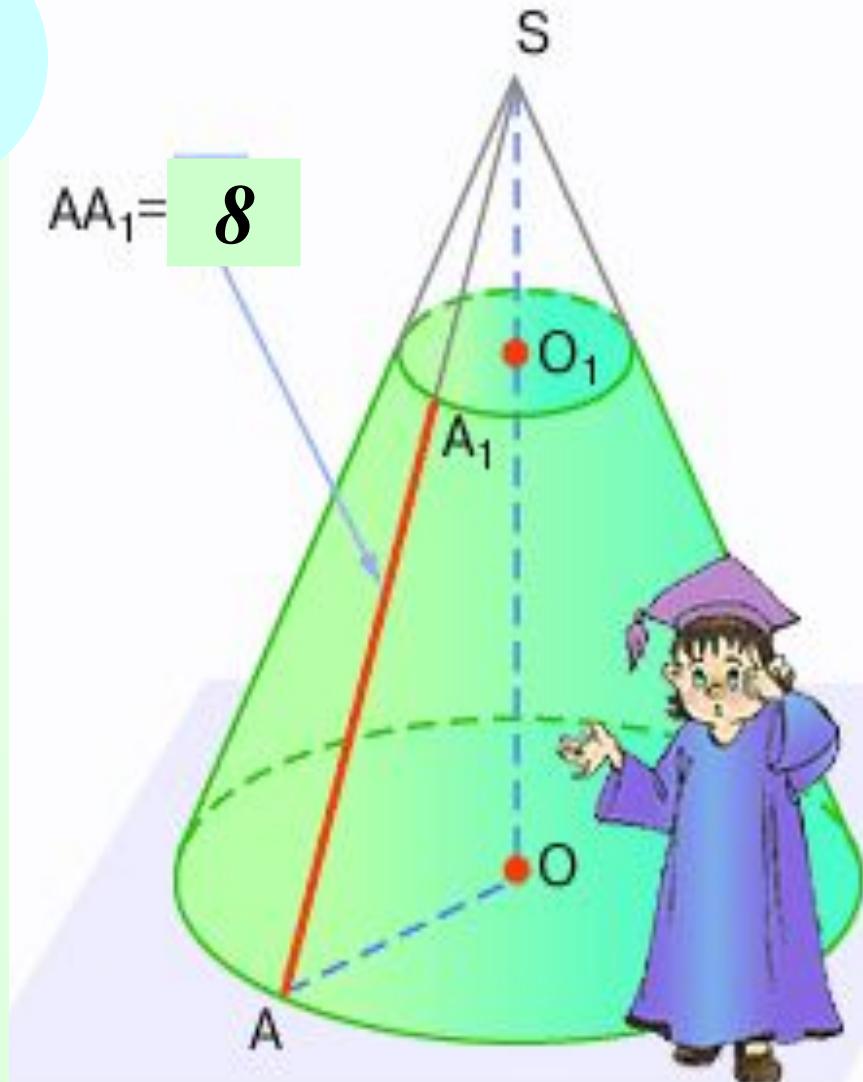


Образующей усеченного конуса называется часть образующей полного конуса, заключенная между основаниями.

Высотой усеченного конуса называется расстояние между основаниями.

?

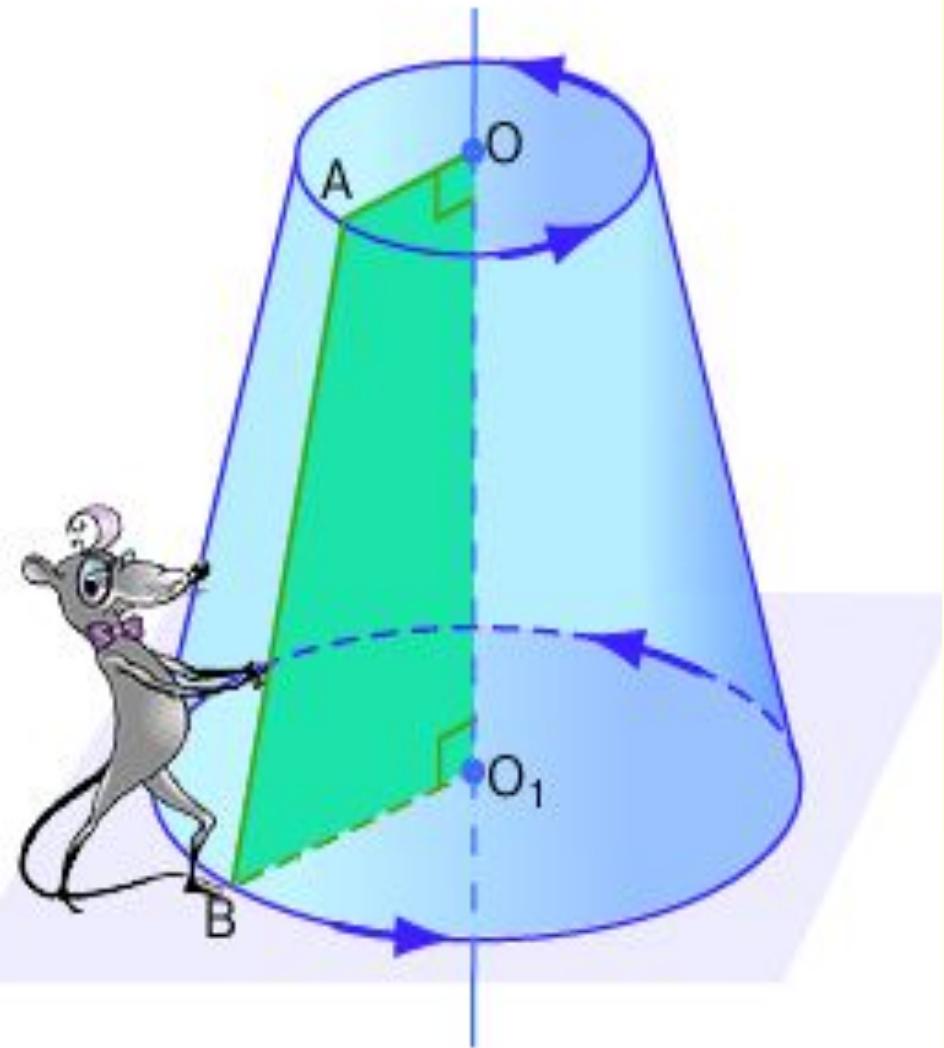
Пусть в конусе, высота которого известна, проведено сечение, находящееся на расстоянии три от вершины. Чему равна образующая получившегося усеченного конуса, если известна образующая полного конуса?



$$SO=9$$

$$SO_1=3$$

$$SA=12$$

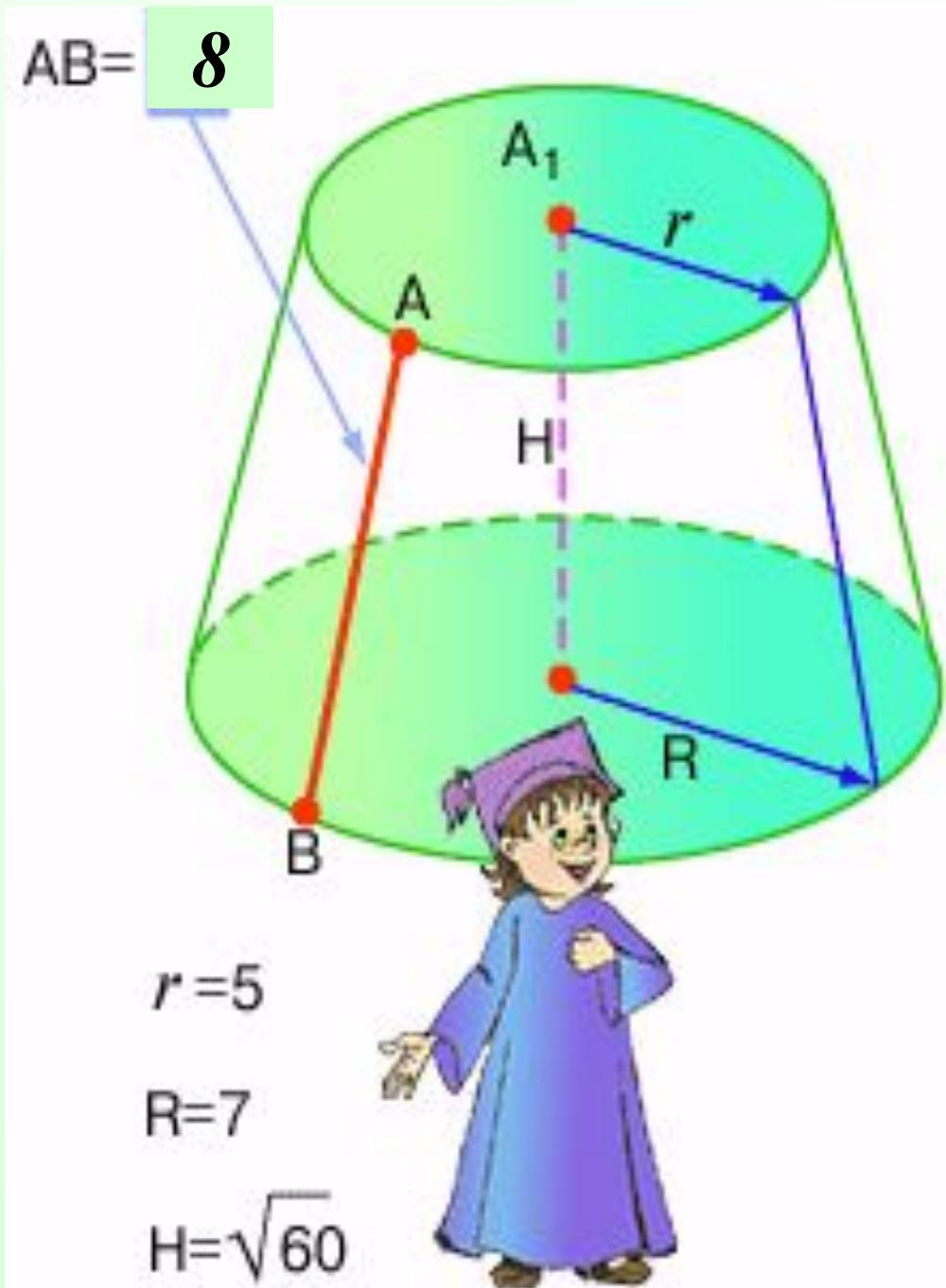


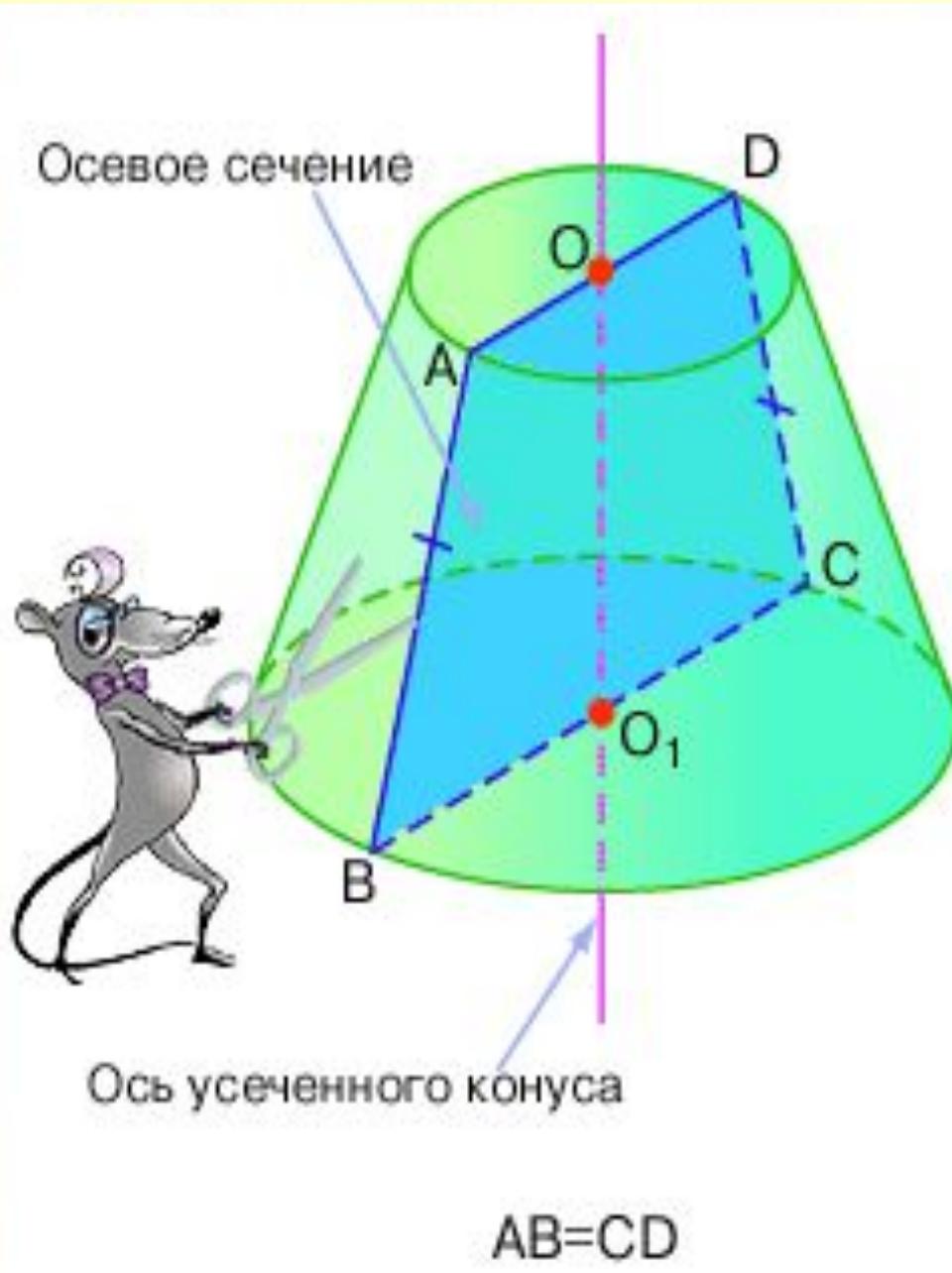
ABO_1O – прямоугольная трапеция

**Усеченный конус
можно
рассматривать как
тело, полученное при
вращении
прямоугольной
трапеции вокруг
боковой стороны,
перпендикулярной
основанию.**

?

Пусть дан
усеченный конус,
радиусы оснований
и высота которого
известны. Найдите
образующую
усеченного конуса.



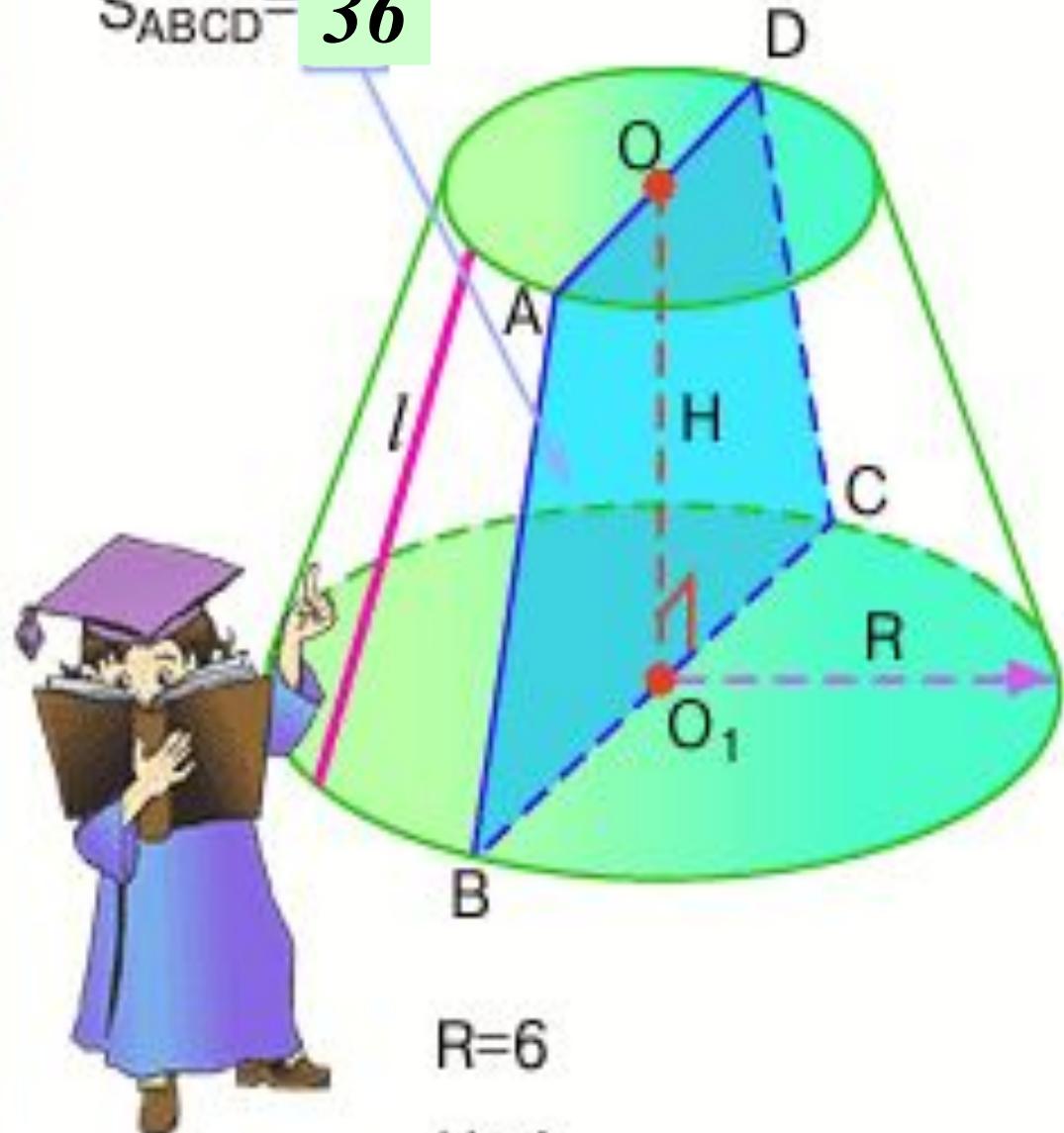


Прямая,
соединяющая
центры оснований,
называется **осью**
усеченного конуса.
Сечение, проходящее
через ось,
называется **осевым**.
Осьное сечение
является
равнобедренной
трапецией.

?

Найдите площадь осевого сечения, если известны радиус нижнего основания, высота и образующая.

$$S_{ABCD} = 36$$



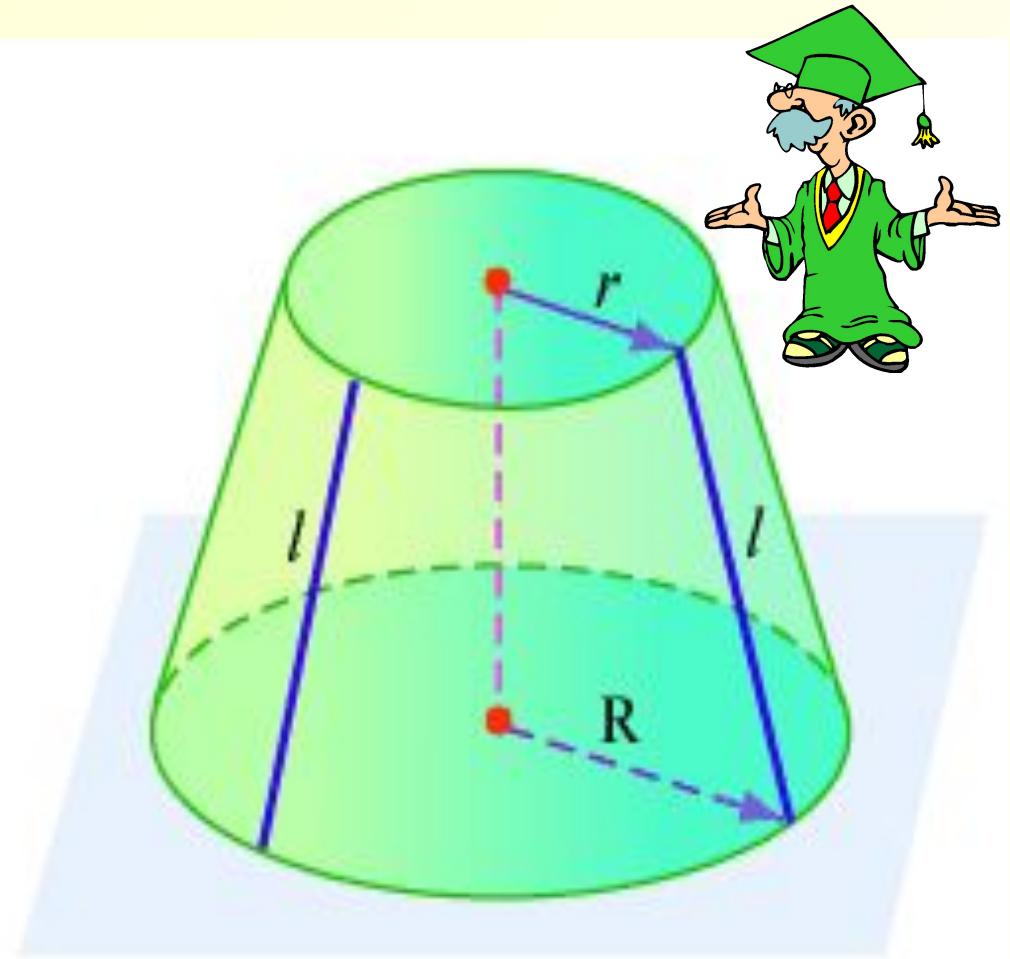
$$R=6$$

$$H=4$$

$$l=5$$

Боковая поверхность усеченного конуса. Площадь боковой поверхности усеченного конуса.

**Площадь боковой
поверхности усеченного
конуса равна
произведению
полусуммы длин
окружностей оснований
на образующую.**



Дано: r – радиус меньшего основания

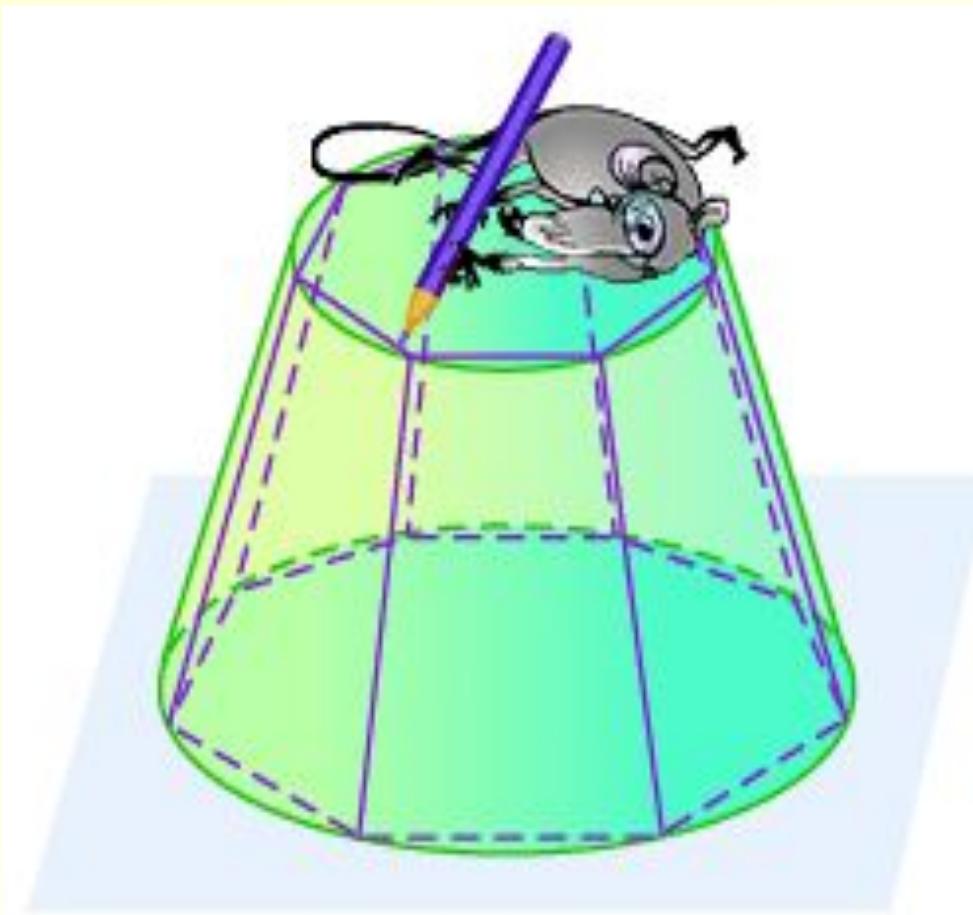
R – радиус большего основания

l – образующая

Докажем: $S_{\text{бок}} = \pi(R + r) \cdot l$

Доказательство:

Боковую поверхность усеченного конуса будем понимать как предел, к которому стремится боковая поверхность вписанной в этот конус правильной усеченной пирамиды, когда число боковых граней неограниченно увеличивается.



$S_{\text{бок.пирамиды}}$



$S_{\text{бок.конуса}}$

Доказательство:

**Впишем в конус
правильную пирамиду.
Ее боковая
поверхность состоит из
трапеций.**

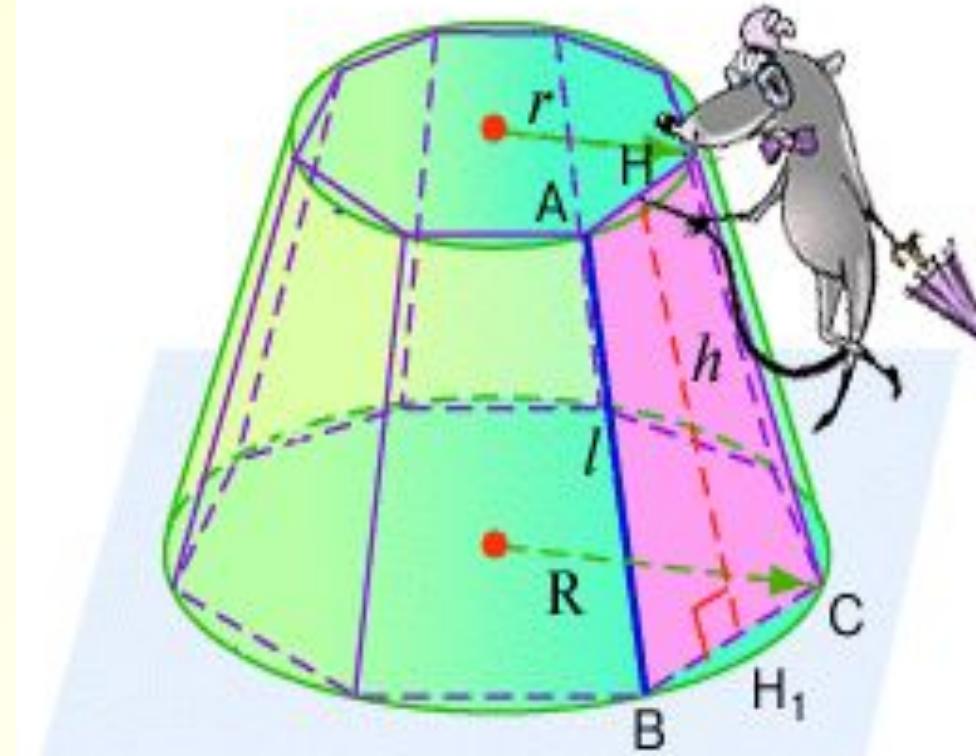
$$S_{бок.пир} = \frac{(p + P)}{2} h$$

$$S_{бок.пир} \rightarrow S_{бок.кон}$$

$$p \rightarrow c \quad P \rightarrow C \quad h \rightarrow l$$

$$c = 2\pi r \quad C = 2\pi R$$

$$\frac{2\pi(R + r)}{2}l = \pi(R + r)l$$

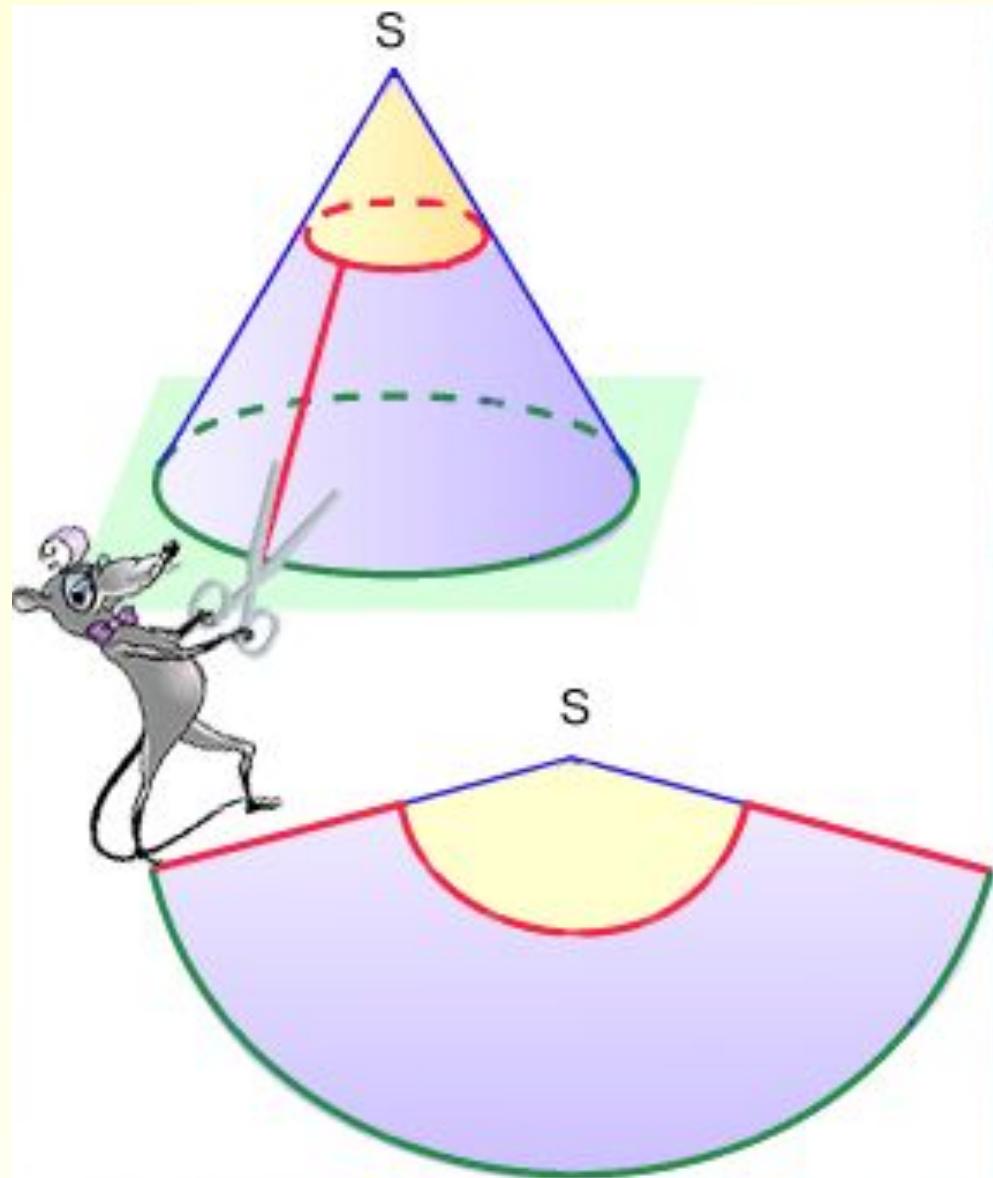


p – периметр меньшего основания

P – периметр большого основания

Замечание:

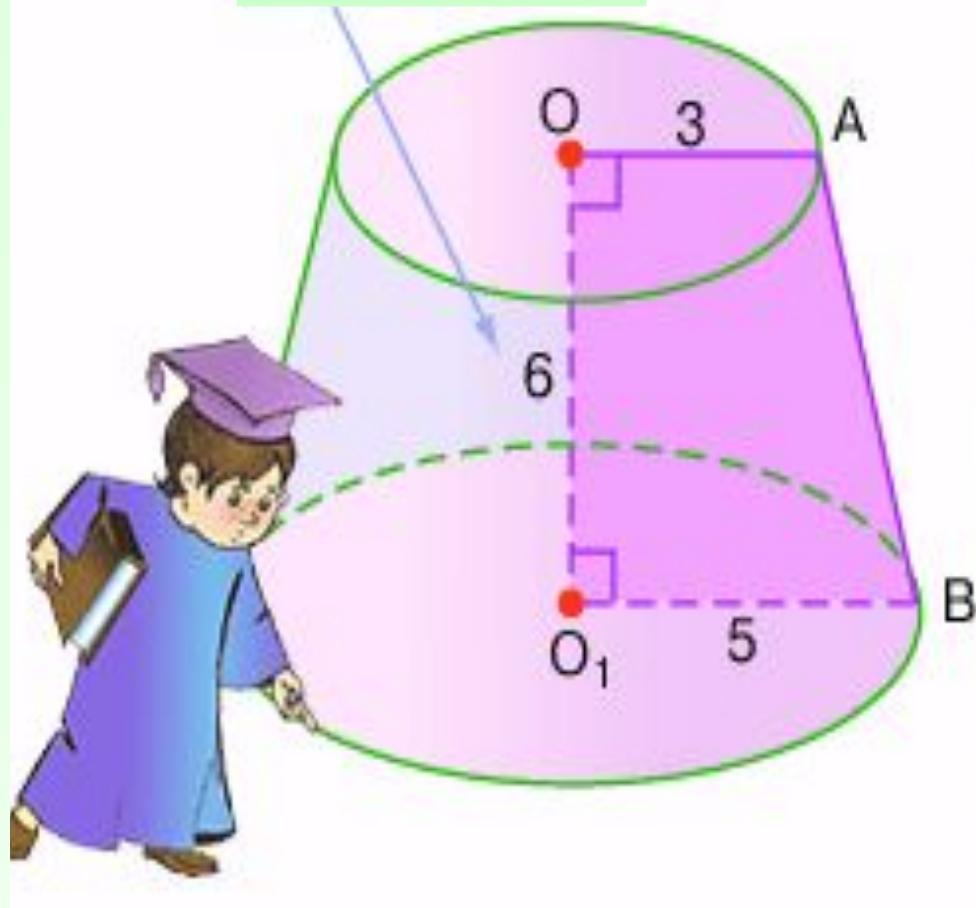
Площадь боковой поверхности усеченного конуса можно рассматривать как разность между площадями боковых поверхностей двух конусов. Поэтому развертка усеченного конуса – это часть круглого кольца.





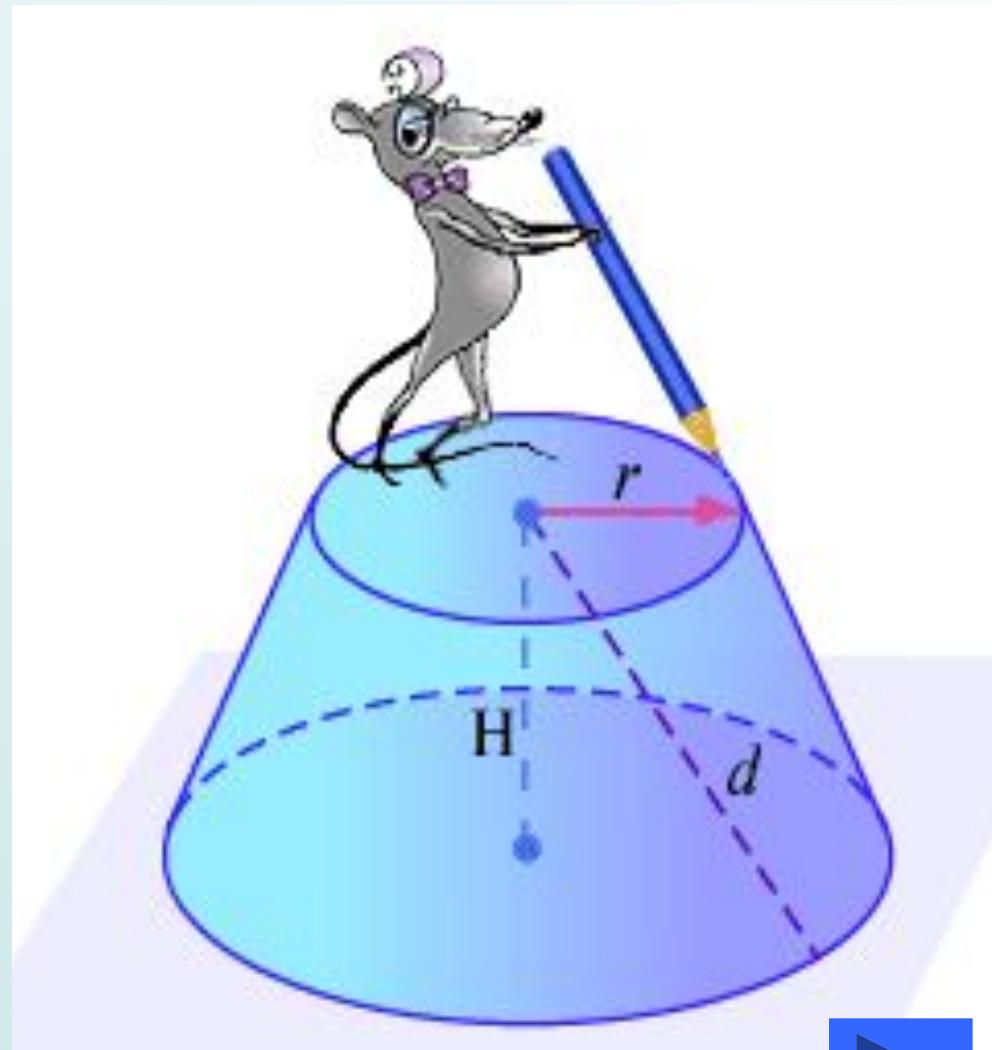
**Усеченный конус
получен от вращения
прямоугольной
трапеции вокруг
боковой стороны,
перпендикулярной
основаниям. Найдите
площадь боковой
поверхности усеченного
конуса, если известны
основания и боковая
сторона трапеции.**

$$S_{\text{бок.пов.}} = 16\sqrt{10} \cdot \pi$$



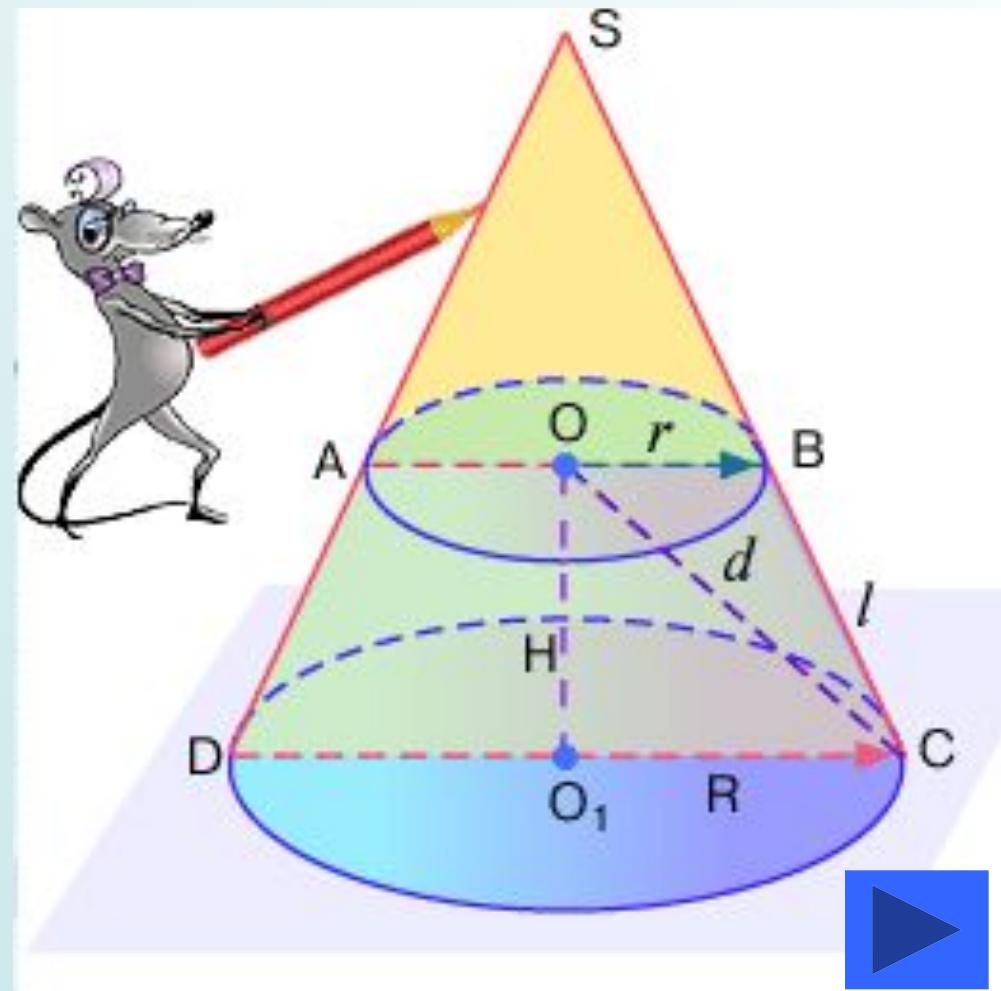
Задача.

- Радиус меньшего основания усеченного конуса равен 5, высота равна 6, а расстояние от центра меньшего основания до окружности большего основания равно 10. Найдите площадь боковых поверхностей усеченного и полного конусов.



Решение:

Достроим
усеченный конус до
полного и проведем
осевое сечение.

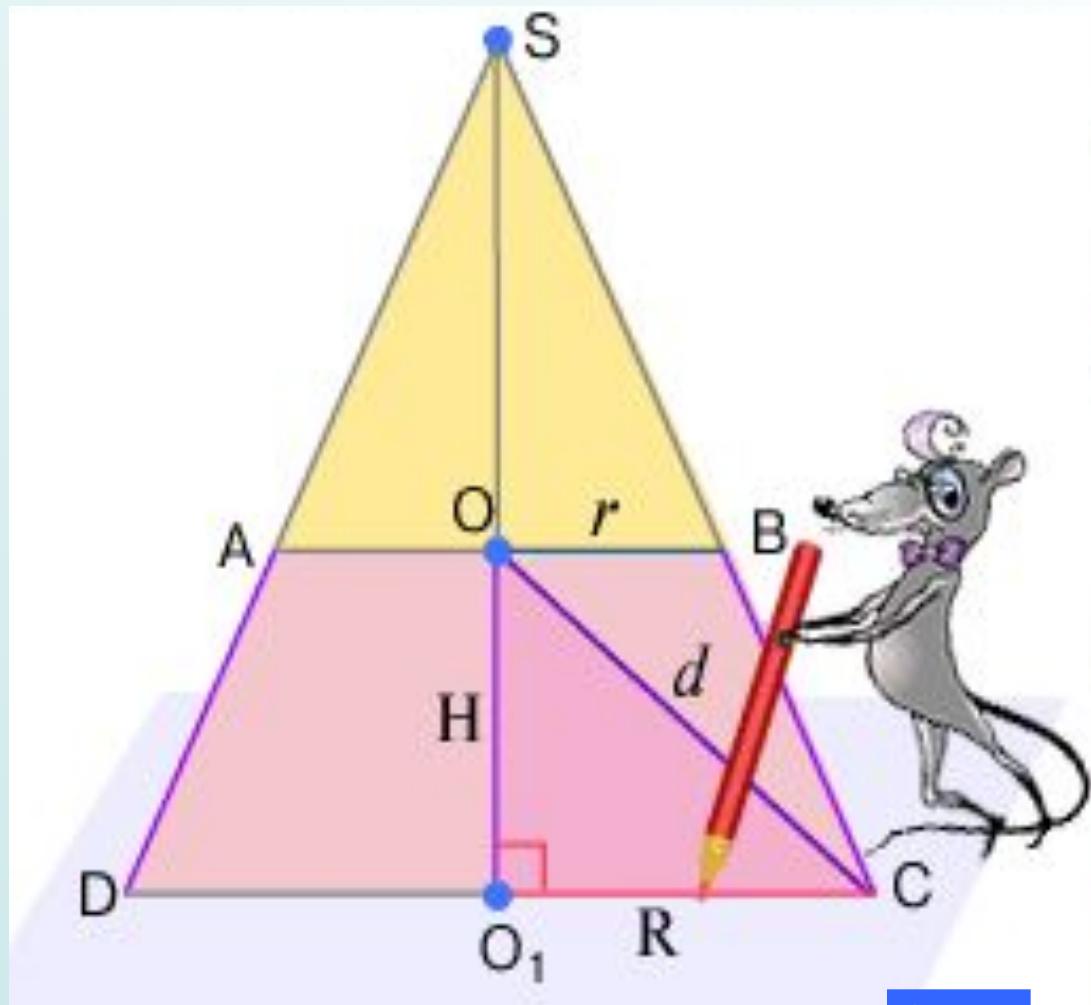


Решение:

1) Вычислим радиус большего основания.

ΔOO_1C :

$$d^2 = H^2 + R^2$$



$$R = \sqrt{d^2 - H^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$



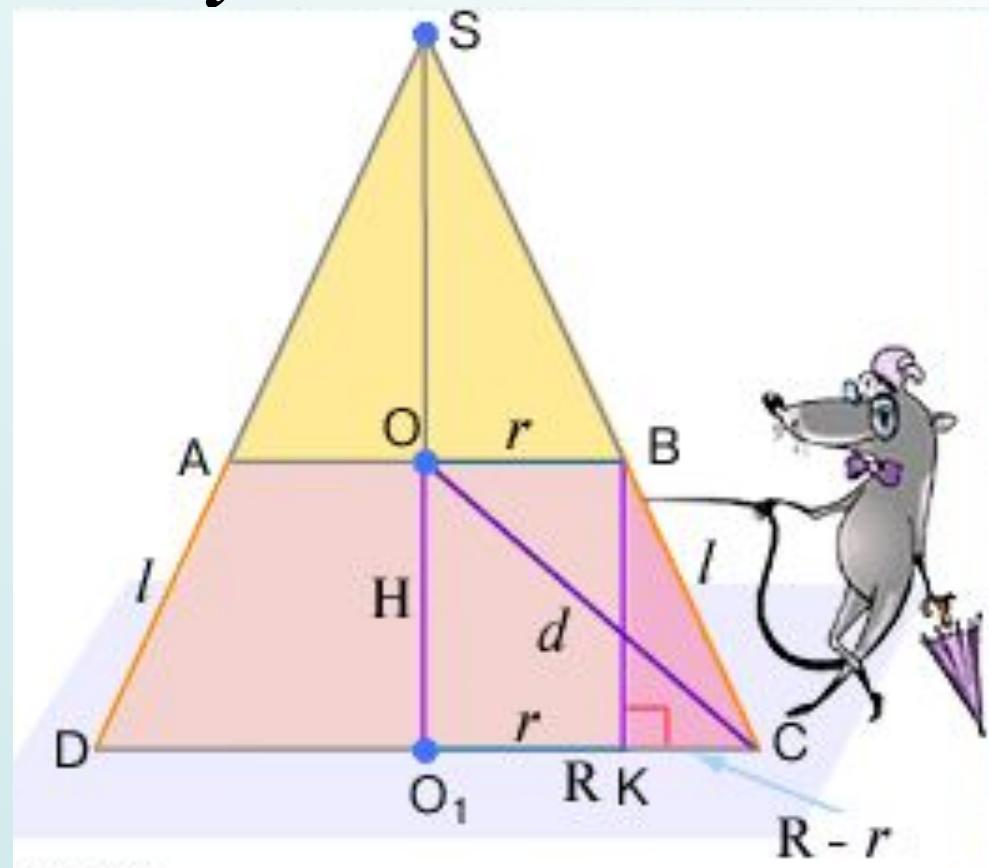
Решение:

2) Найдем боковую сторону трапеции – образующую усеченного конуса.

ΔBKC :

$$CK = R - r = 3$$

$$BC^2 = BK^2 + CK^2$$



$$l = \sqrt{H^2 + CK^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$$



Решение:

3) Используя подобие треугольников, найдем образующую полного конуса.

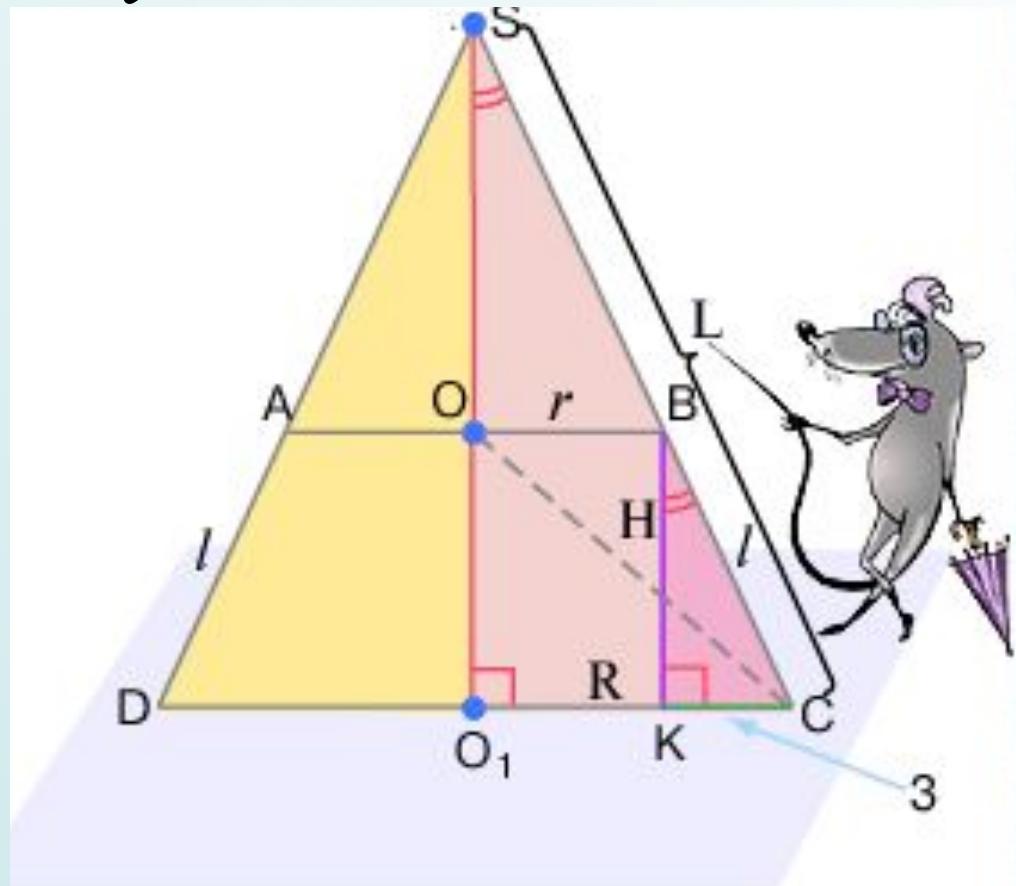
$$SC = L$$

$$\Delta SO_1C \sim \Delta BKC$$

$$\frac{SC}{BC} = \frac{O_1C}{KC}$$

$$\frac{L}{3\sqrt{5}} = \frac{8}{3}$$

$$L = 8\sqrt{5}$$



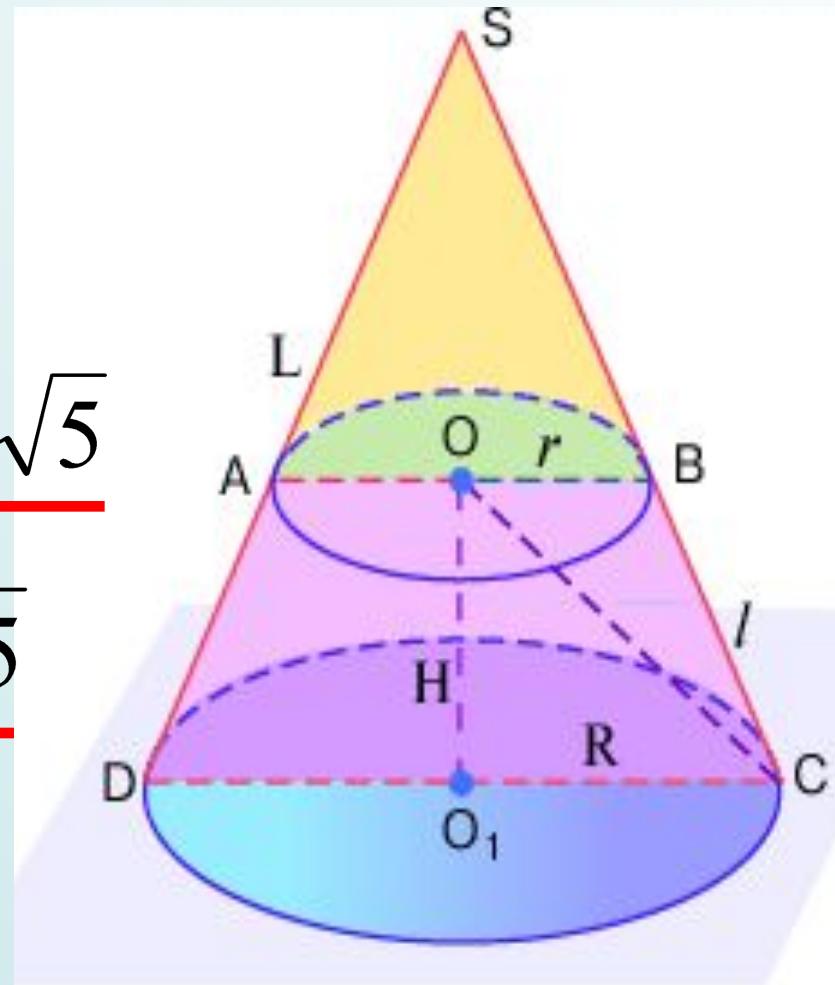
Решение:

4) Подставим найденные значения в формулы для площадей боковой поверхности полного и усеченного конусов.

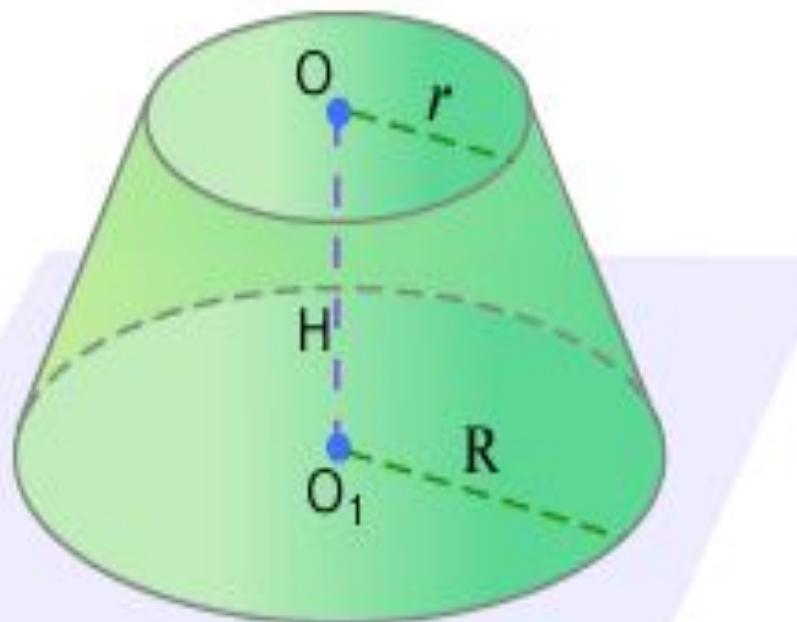
$$L = 8\sqrt{5} \quad l = 3\sqrt{5}$$

$$S_{ycech} = \pi(R + r) \cdot l = \underline{\underline{\pi \cdot 39\sqrt{5}}}$$

$$S_{полн} = \pi(RL) = \underline{\underline{\pi \cdot 64\sqrt{5}}}$$



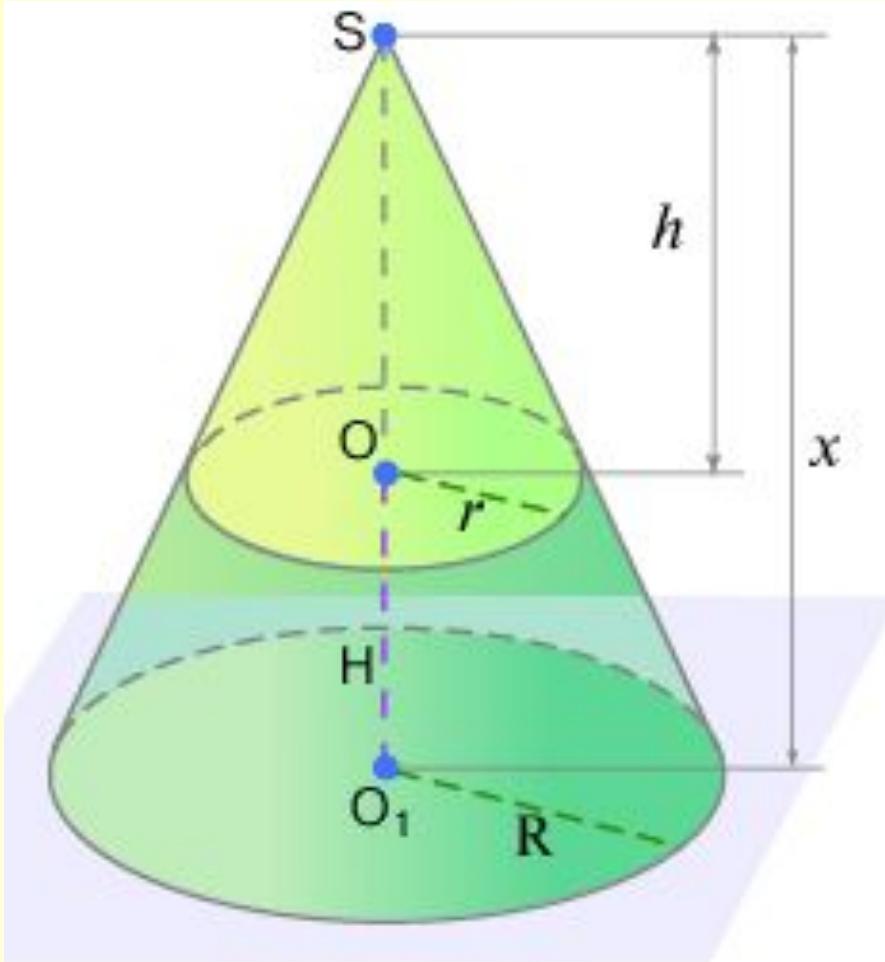
Формула объема усеченного конуса.



$$V = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + r^2 + Rr)$$

- **Объем усеченного конуса равен сумме объемов трех конусов, имеющих одинаковую высоту с усеченным конусом, а основаниями: один – нижнее основание этого конуса, другой – верхнее, а третий – круг, радиус которого есть среднее геометрическое между радиусами верхнего и нижнего оснований.**

Доказательство:

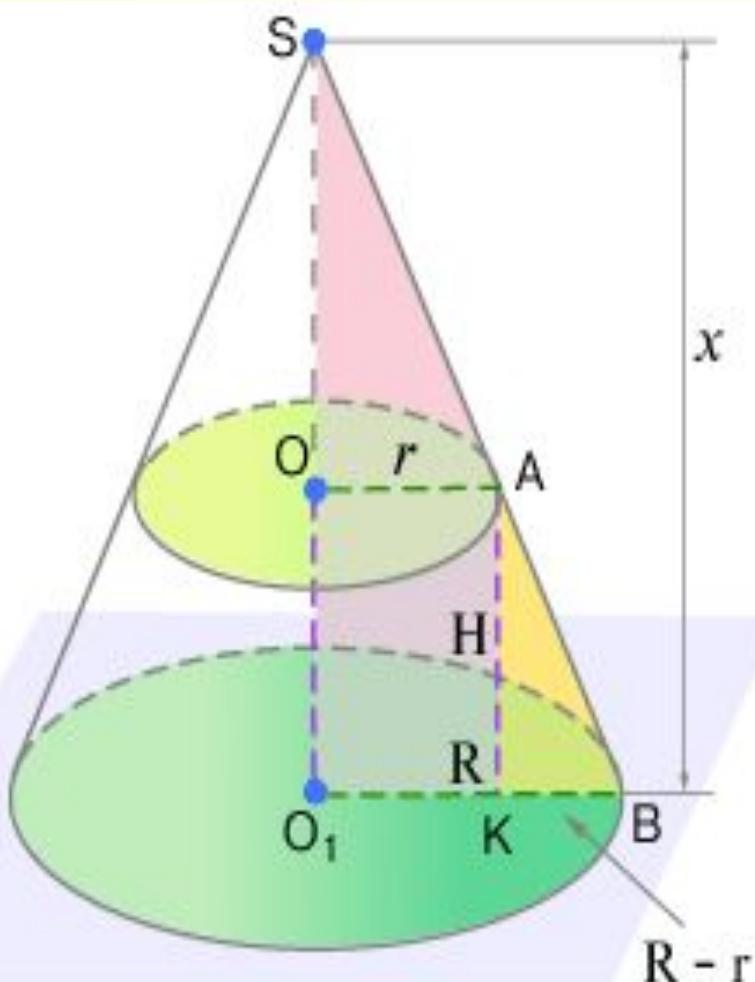


Поместим на верхнем основании усеченного конуса малый конус, дополняющий его до полного и рассмотрим объем его как разность объемов двух конусов.

$$V_{\text{усеч.кон}} = V_{\text{полн}} - V_{\text{доп}} = \frac{1}{3}\pi R^2 x - \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Доказательство:

Вычислим высоту полного конуса из подобия треугольников.

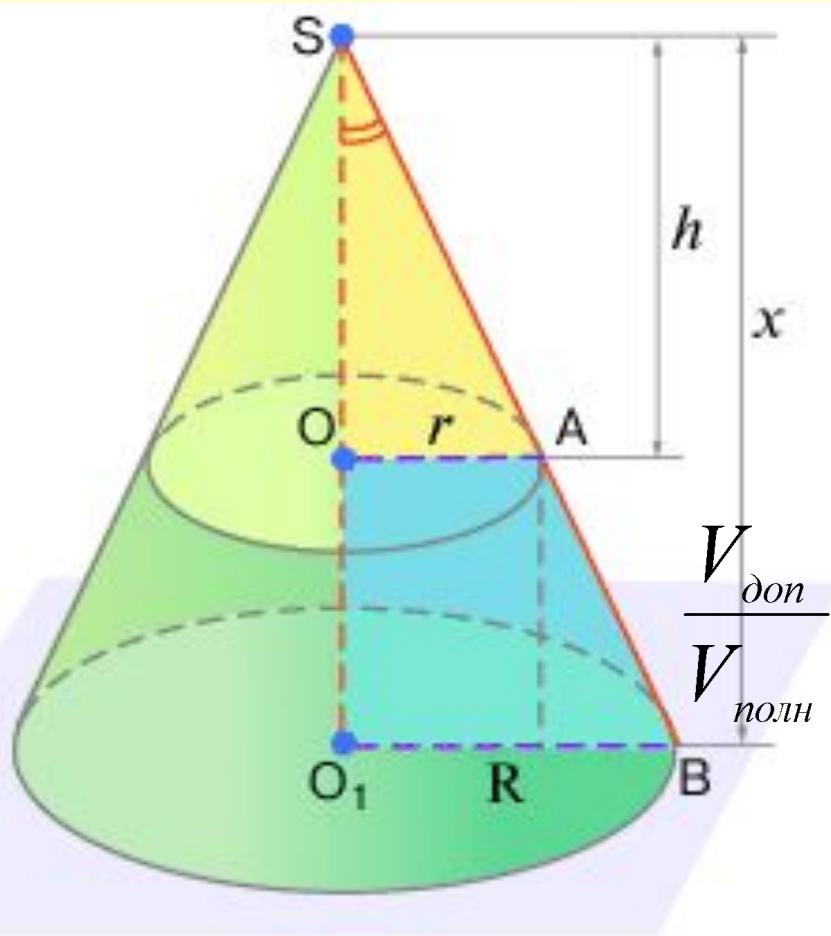


$$\Delta SO_1B \sim \Delta AKB$$

$$\frac{x}{R} = \frac{H}{R - r}$$

$$x = H \frac{R}{R - r}$$

Доказательство:



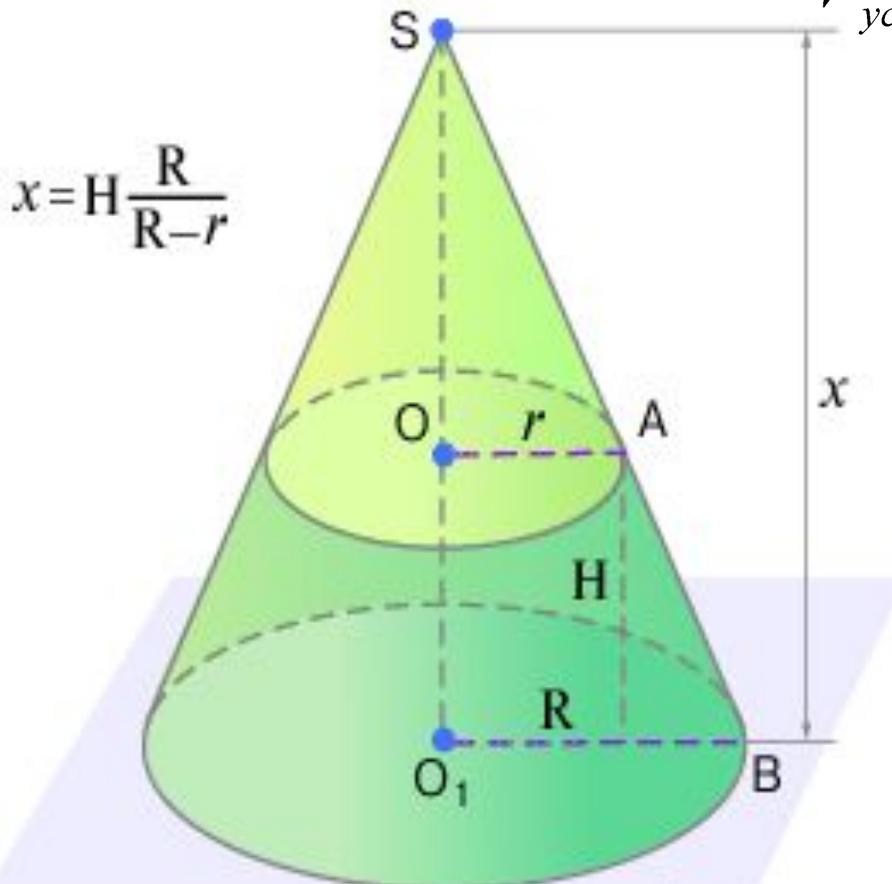
$$\Delta SOA \sim \Delta SO_1B$$

$$\frac{h}{x} = \frac{r}{R}$$

$$\frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi R^2 x} = \frac{r^2 h}{R^2 x} = \frac{r^2}{R^2} \frac{r}{R} = \frac{r^3}{R^3}$$

Объемы полного и дополнительного конусов относятся как кубы радиусов оснований.

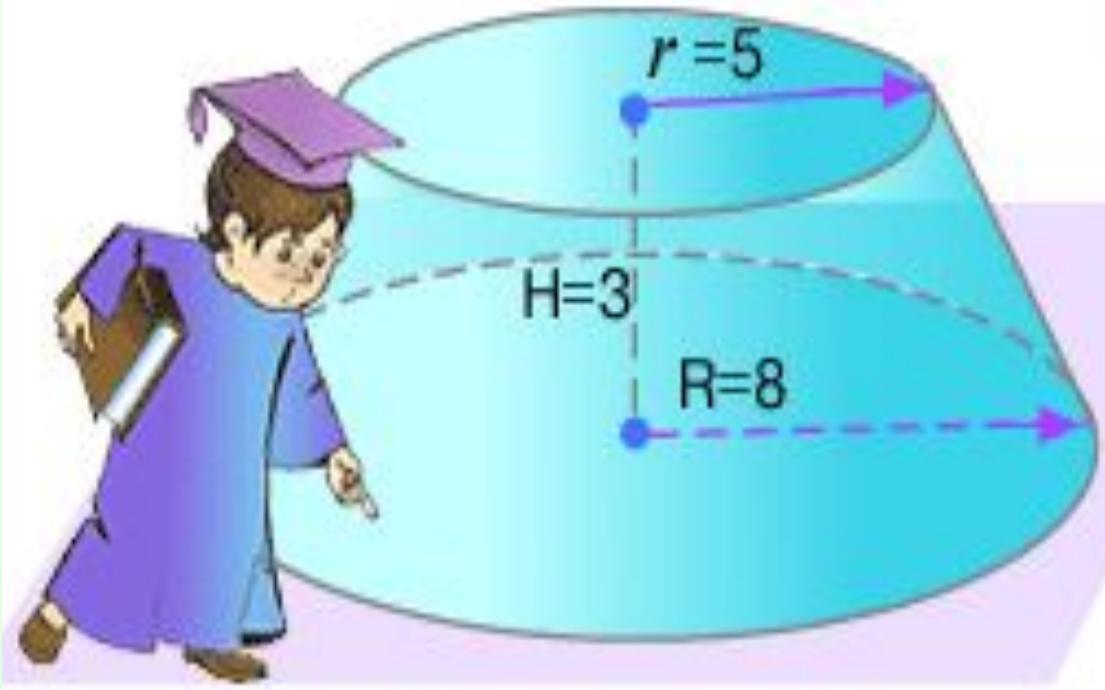
Доказательство:
Вычтем из объема большого конуса объем малого конуса.



$$\begin{aligned}
 V_{\text{усеч}} &= V_{\text{полн}} - V_{\text{доп}} = V_{\text{полн}} - \frac{r^3}{R^3} V_{\text{полн}} = \\
 &= \frac{1}{3} \pi R^2 x \left(1 - \frac{r^3}{R^3} \right) = \\
 &= \frac{1}{3} \pi \frac{R^2 H R}{R - r} \left(\frac{R^3 - r^3}{R^3} \right) = \\
 &= \frac{1}{3} \pi H \frac{(R - r)(R^2 + Rr + r^2)}{R - r} = \\
 &= \frac{1}{3} \pi H (R^2 + Rr + r^2)
 \end{aligned}$$

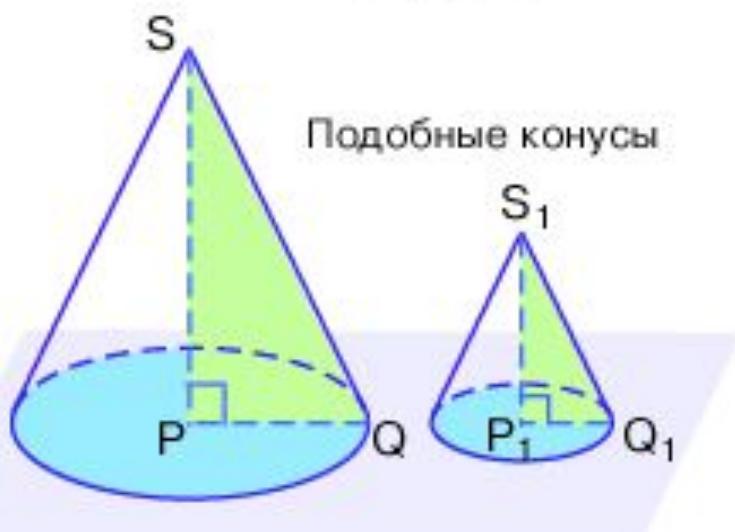
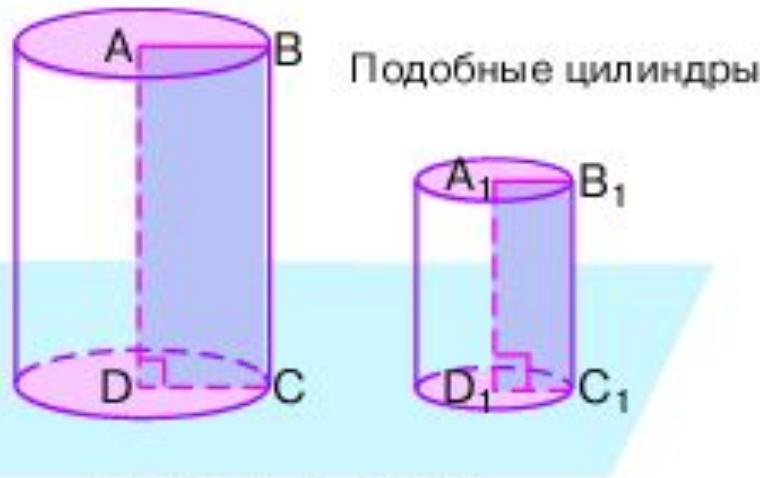
?

Найдите объем
усеченного
конуса, если
известны его
высота и радиусы
оснований.



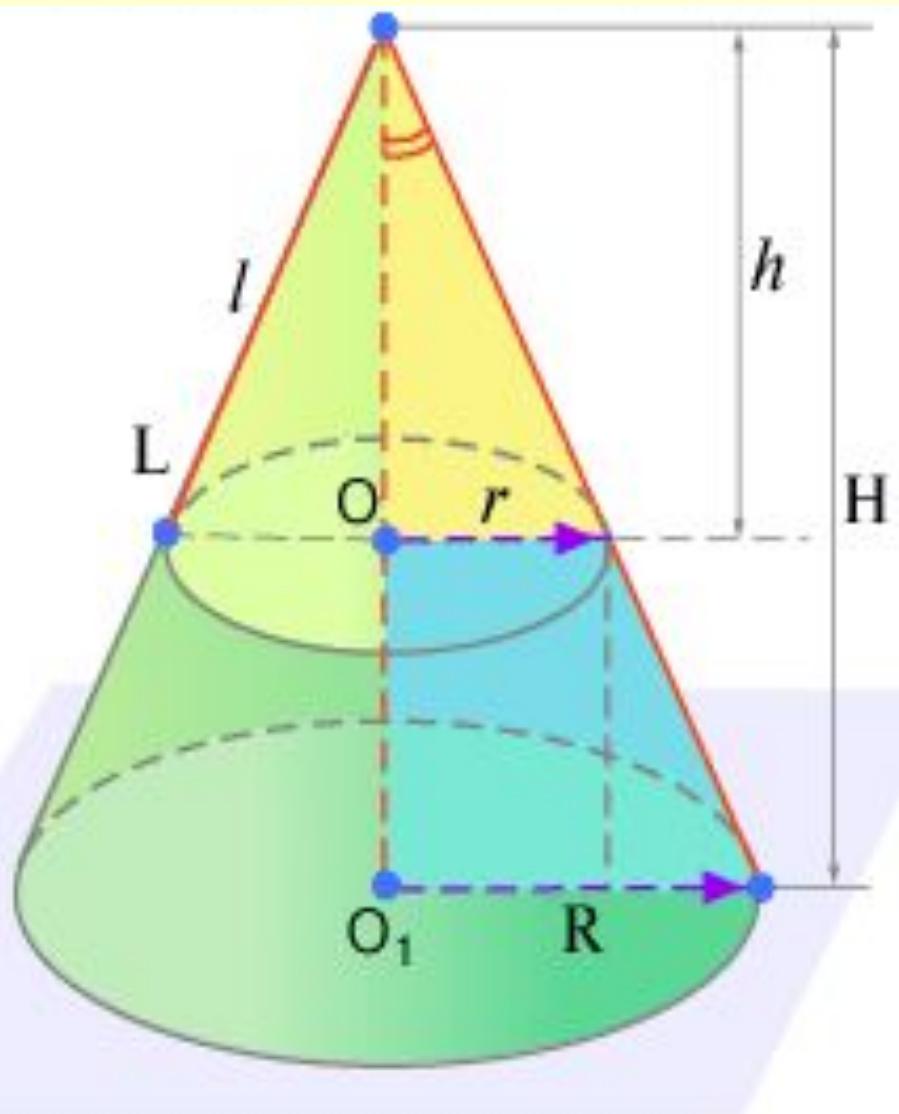
$$V_{\text{усеч.}} = 149\pi$$

Подобные цилиндры и конусы.



- Подобные цилинды или конусы можно рассматривать как тела, полученные от вращения подобных прямоугольников или треугольников.

Сечение, параллельное основанию конуса, отсекает от него малый конус, подобный большому.



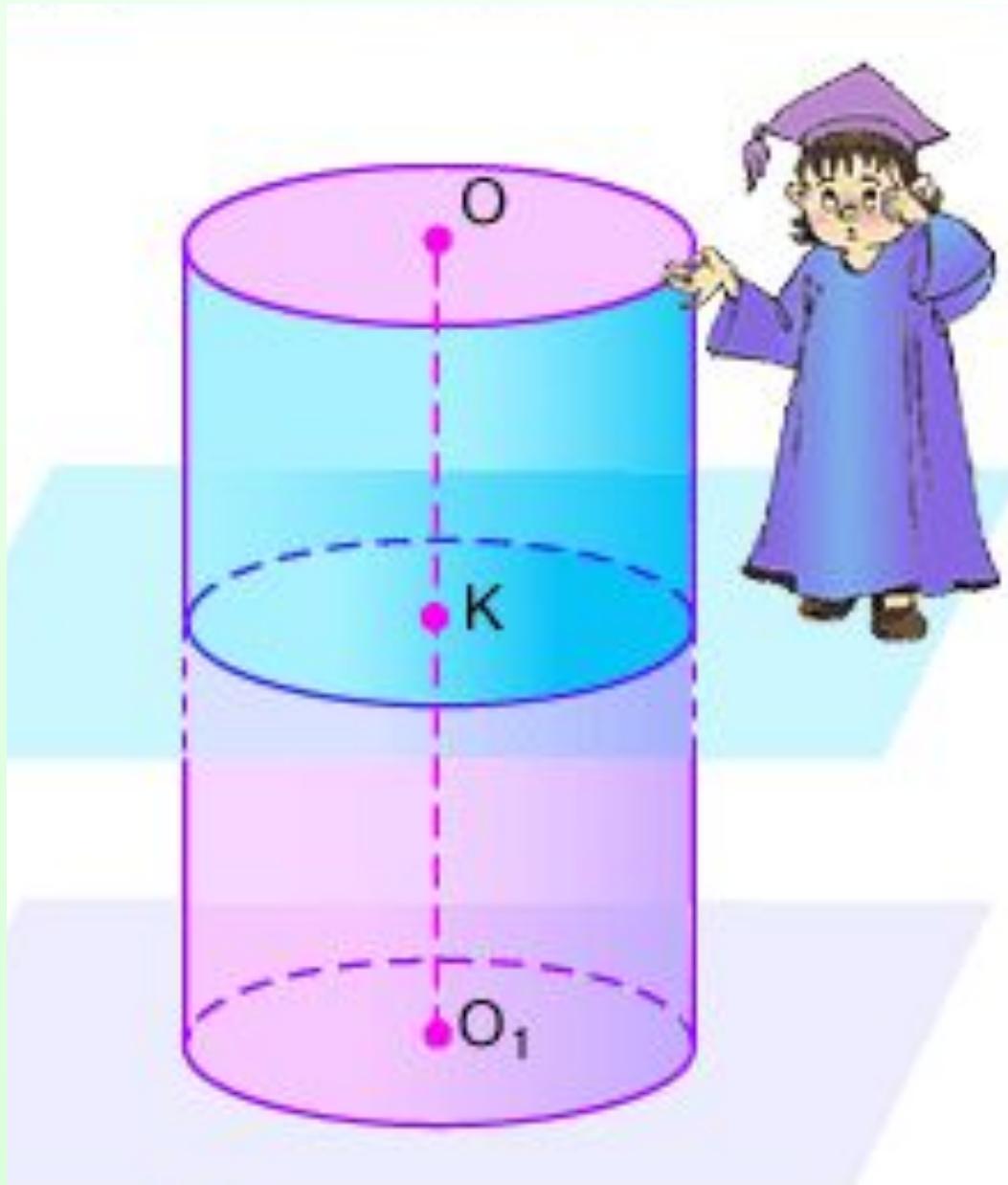
$$\frac{r}{R} = \frac{h}{H} = \frac{l}{L}$$

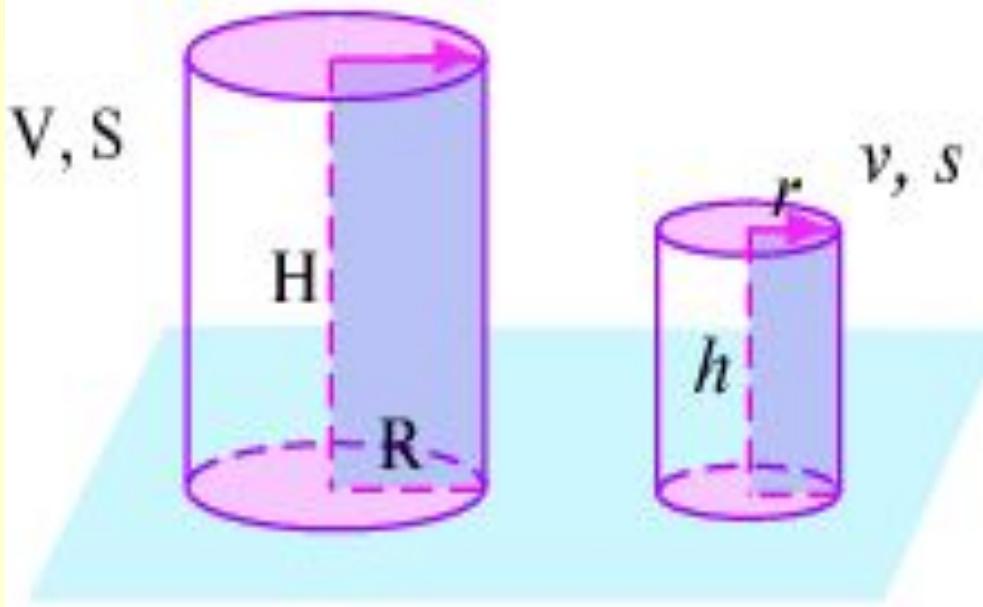
$$\frac{V_{\text{don.}}}{V_{\text{полн.}}} = \frac{r^3}{R^3} = \frac{h^3}{H^3}$$

$$\frac{S_{\text{бок.доп}}}{S_{\text{бок.полн}}} = \frac{2\pi r l}{2\pi R L} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{h^2}{H^2}$$

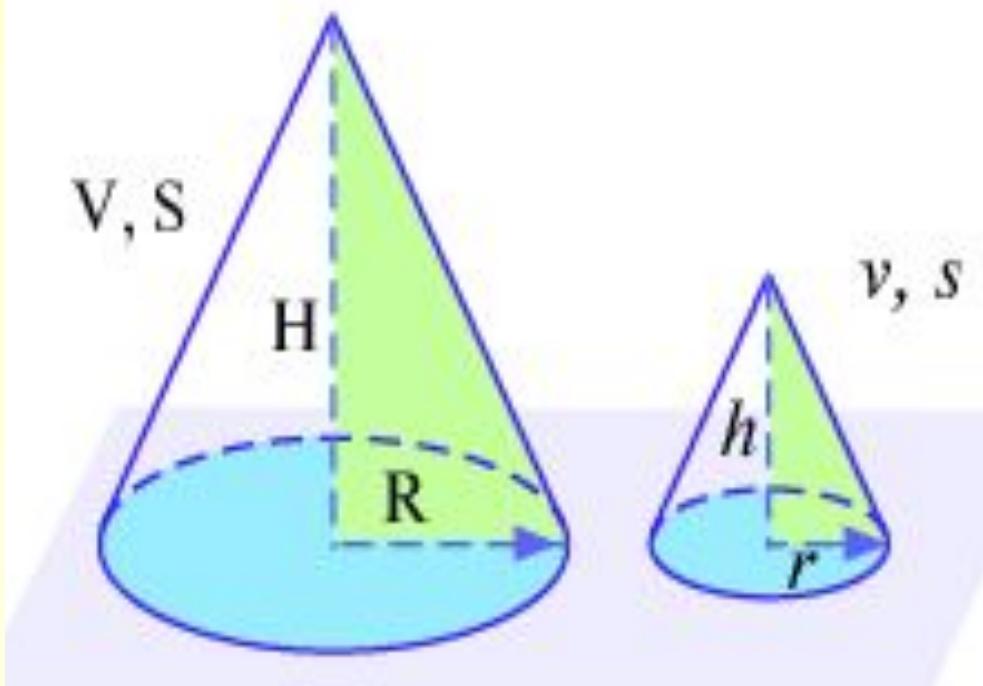
?

**В цилиндре
проведено сечение,
параллельное
основанию. Будет ли
малый цилиндр,
который отсекается
этим сечением,
подобен большому?**





**Площади боковых
поверхностей
подобных цилиндров
и конусов относятся
как квадраты
радиусов или высот,
а объемы – как кубы
радиусов или высот.**

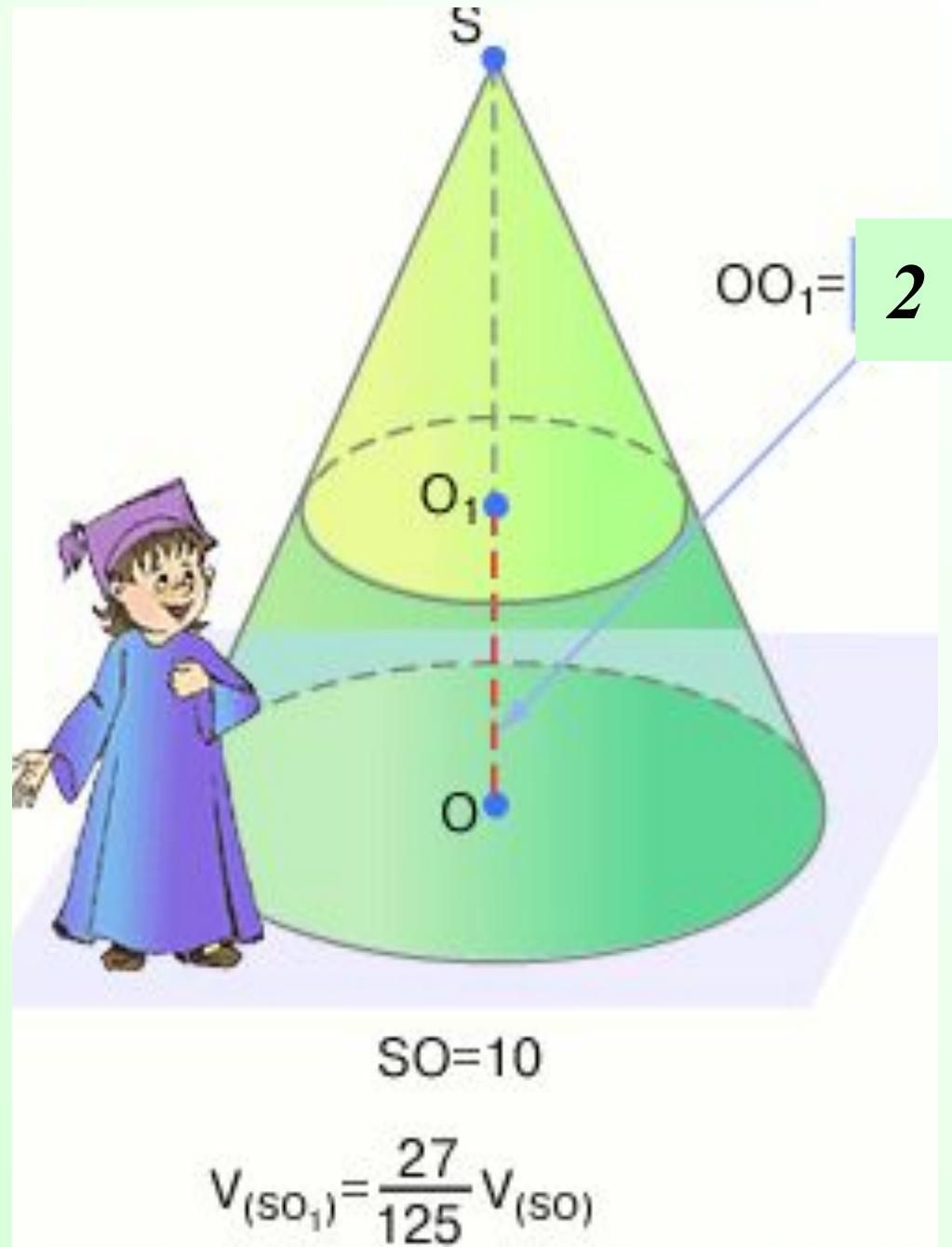


$$\frac{S}{S} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{h^2}{H^2}$$

$$\frac{V}{V} = \frac{r^3}{R^3} = \frac{h^3}{H^3}$$

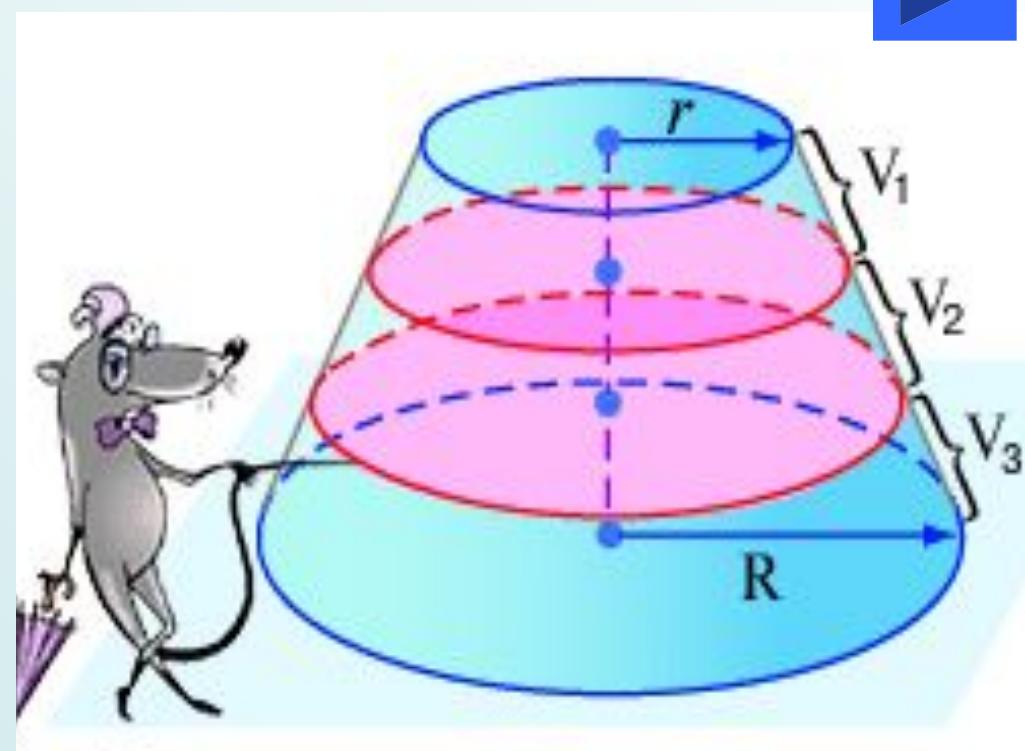
?

В конусе, высота которого известна, проведено сечение, параллельное основанию. Известно также соотношение объемов малого и большого конусов. На каком расстоянии от основания находится сечение?



Радиусы оснований усеченного конуса относятся как 2:3. Высота конуса разделена на три равные части, и через точки деления проведены плоскости, параллельные основаниям. Найти, в каком отношении разделился объем усеченного конуса.

Задача.



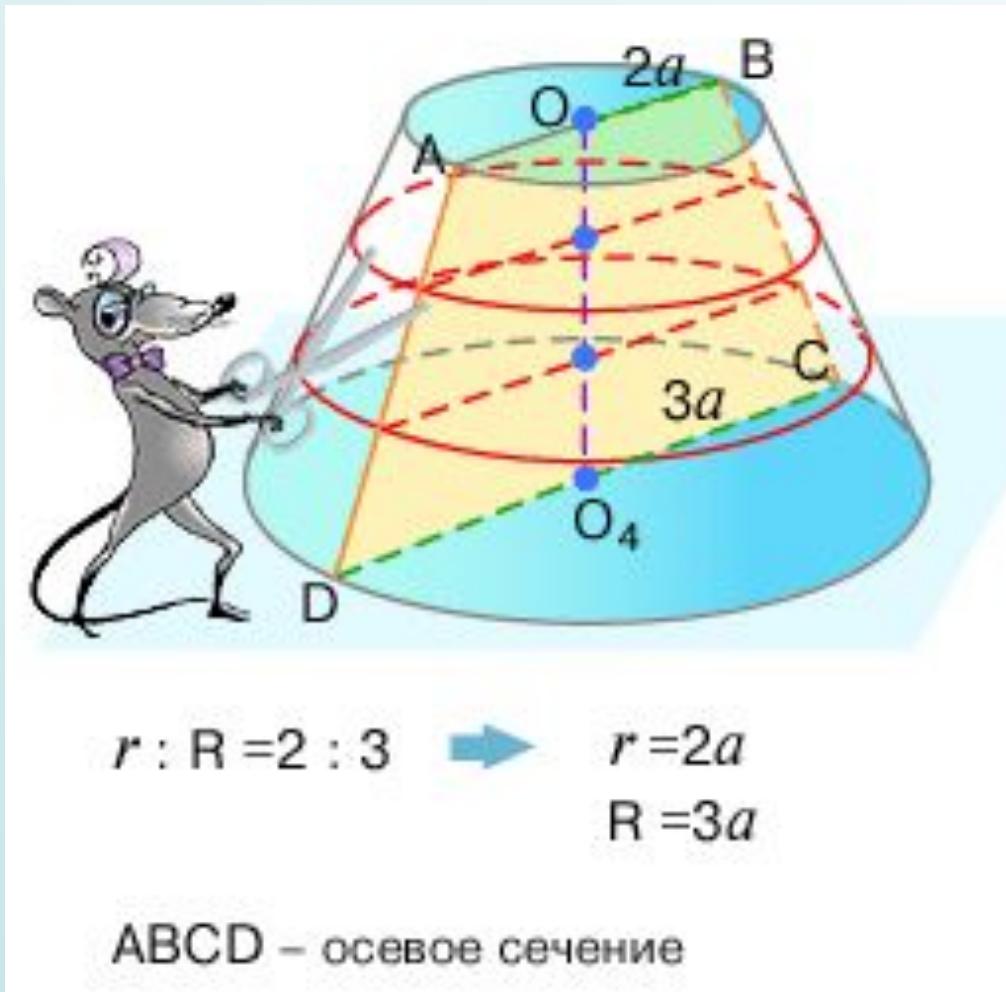
Дано: $\frac{r}{R} = \frac{2}{3}$

Н разделена на 3 части
 V_1, V_2, V_3 – объемы слоев

Найти: $V_1 : V_2 : V_3$

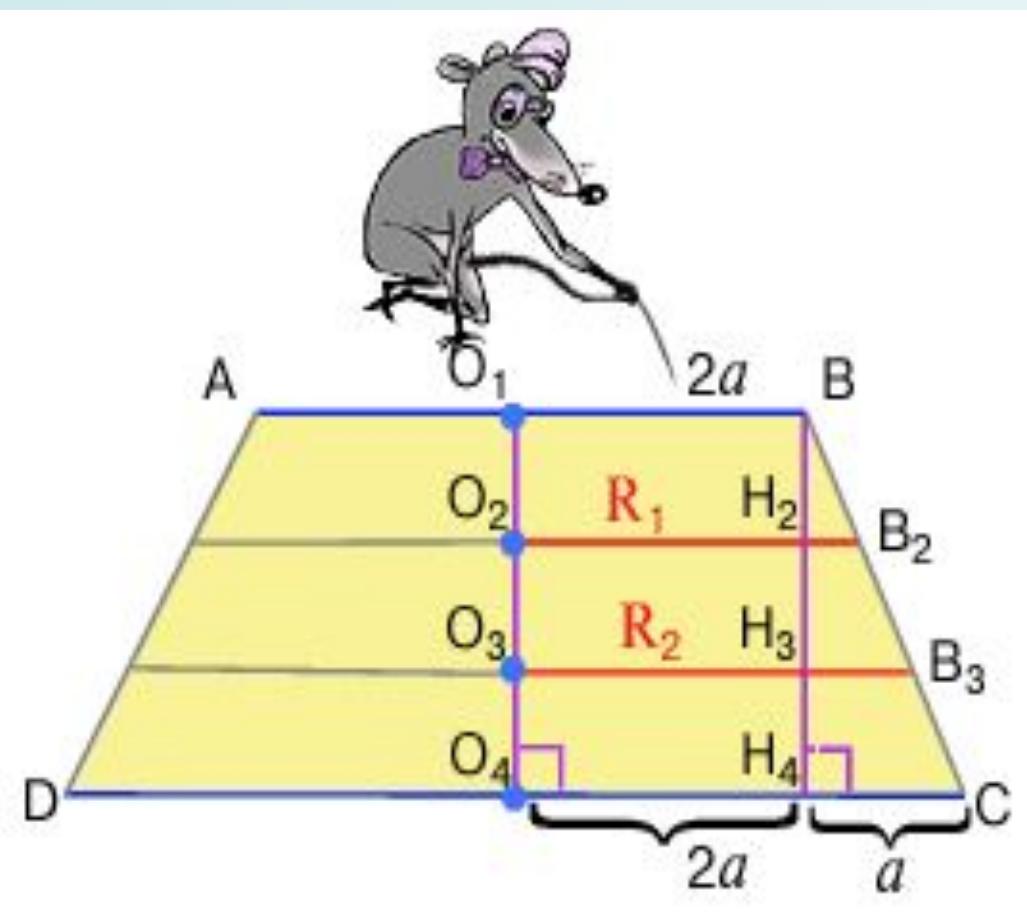
Решение:

Зная, что радиусы оснований конуса относятся как два к трем, обозначим радиусы как $2a$ и $3a$ и рассмотрим осевое сечение конуса.



Решение:

1) Используя подобие, найдем радиусы проведенных сечений.



$$CH_4 = 3a - 2a = a$$

$$H_2 B_2 = \frac{1}{3} CH_4 = \frac{a}{3}$$

$$H_3 B_3 = \frac{2}{3} CH_4 = \frac{2a}{3}$$

$$R_1 = 2a + \frac{a}{3} = \frac{7}{3}a$$

$$R_2 = 2a + \frac{2a}{3} = \frac{8}{3}a$$



Решение:

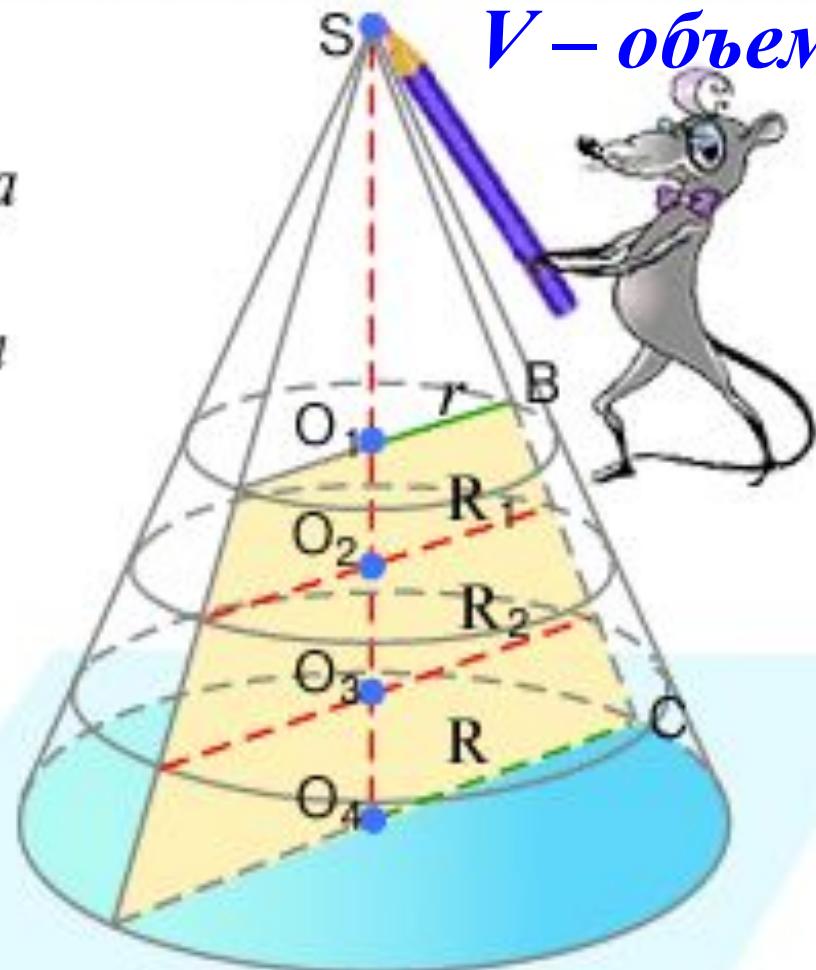
2) Достроив усеченный конус до полного, найдем, какую часть от полного конуса составляют меньшие конусы.

$$r = 2a$$

$$R_1 = \frac{7}{3}a$$

$$R_2 = \frac{8}{3}a$$

$$R = 3a$$



V – объем наибольшего конуса

$$\frac{V_{(SO_1)}}{V} = \frac{(2a)^3}{(3a)^3} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{6^3}{9^3}$$

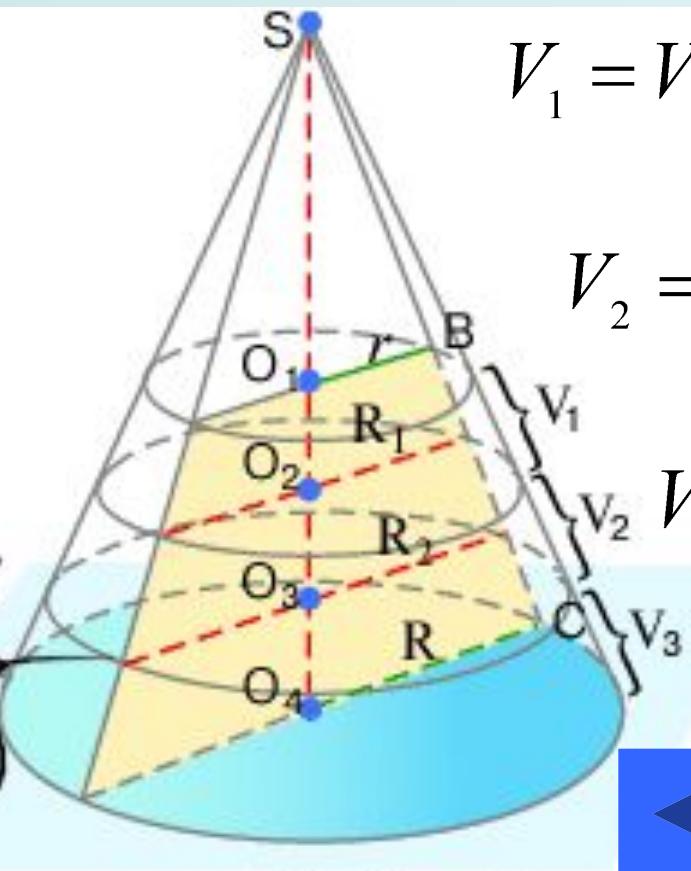
$$\frac{V_{(SO_2)}}{V} = \left(\frac{7}{3}a\right)^3 = \frac{7^3}{9^3}$$

$$\frac{V_{(SO_3)}}{V} = \left(\frac{8}{3}a\right)^3 = \frac{8^3}{9^3}$$



Решение:

3) Определим, какую часть от объема полного конуса составляют усеченные конусы, расположенные между соседними сечениями и найдем отношение объемов этих конусов.



$$V_1 = V_{(SO_2)} - V_{(SO_1)} = \frac{7^3 - 6^3}{9^3} V = \frac{127}{9^3} V$$

$$V_2 = V_{(SO_3)} - V_{(SO_2)} = \frac{8^3 - 7^3}{9^3} V = \frac{169}{9^3} V$$

$$V_3 = V - V_{(SO_3)} = \frac{9^3 - 8^3}{9^3} V = \frac{217}{9^3} V$$

Ответ:

$$V_1 : V_2 : V_3 = 127 : 168 : 217$$