

# Введение в КОСМОЛОГИЮ

Наука о возникновении  
и развитии Вселенной

Дмитрий Доценко  
[dima@latnet.lv](mailto:dima@latnet.lv)

2003

## 2 лекция

# Космологические модели

- **Закон Хаббла**
  - Красное смещение
- Ньютоновская космология
- Релятивистская космология
  - Основы ОТО
  - Фридмановские модели
- Наша Вселенная
- Обобщение космологических моделей

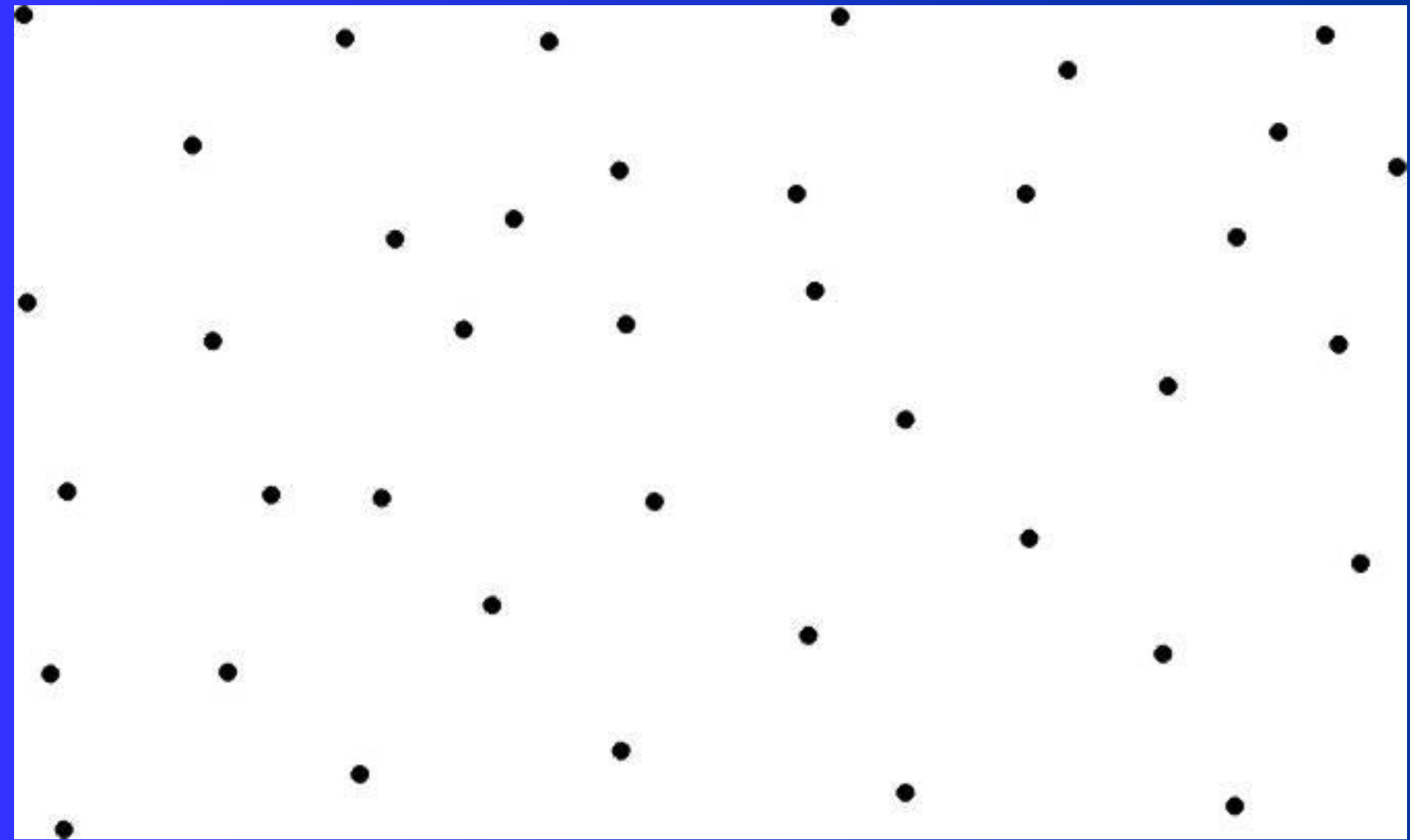
# Закон Хаббла (продолжение)

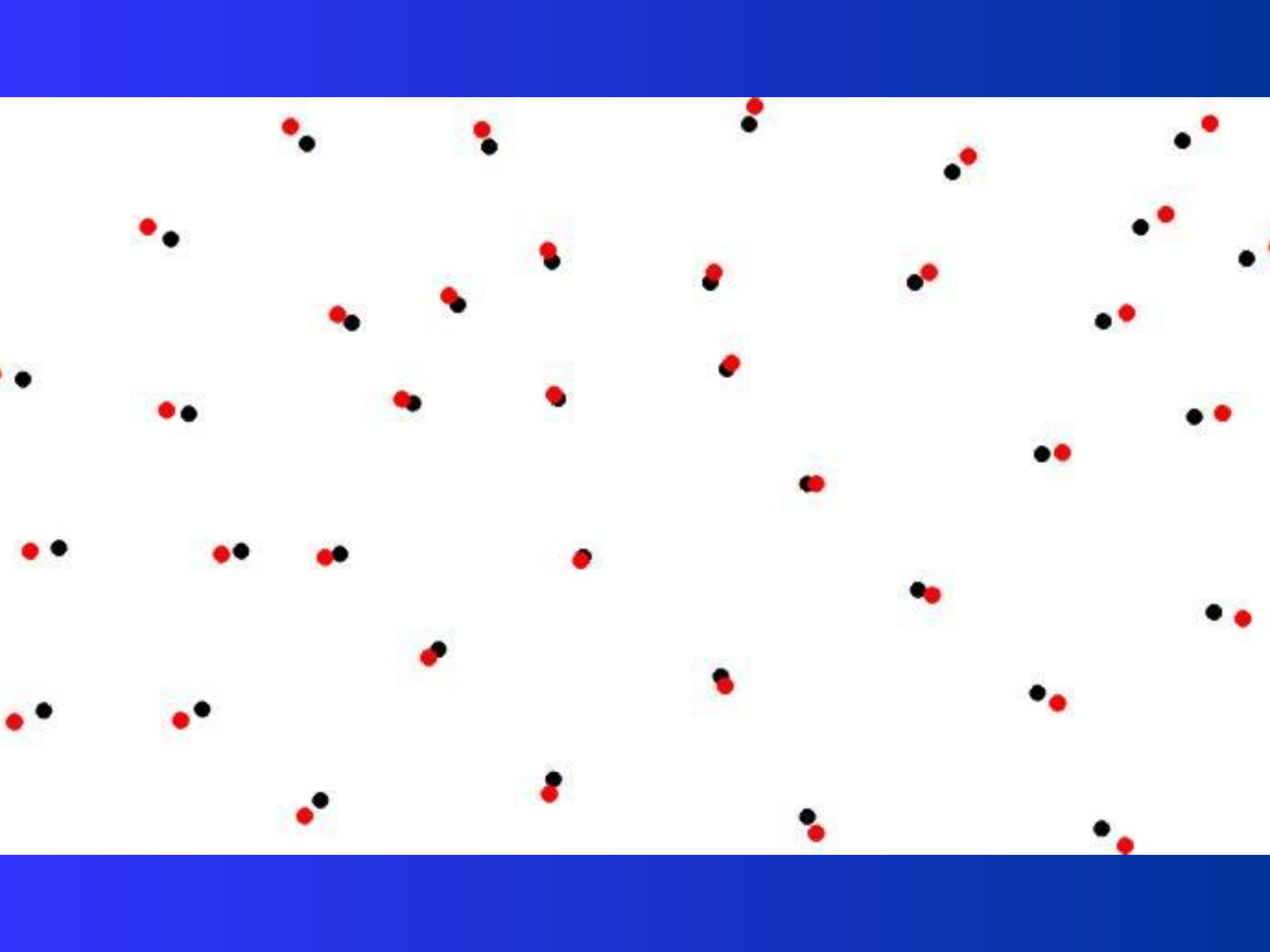
- Интерпретируя сдвиг длин волн как результат эффекта Доплера, скорость галактик пропорциональна этому сдвигу

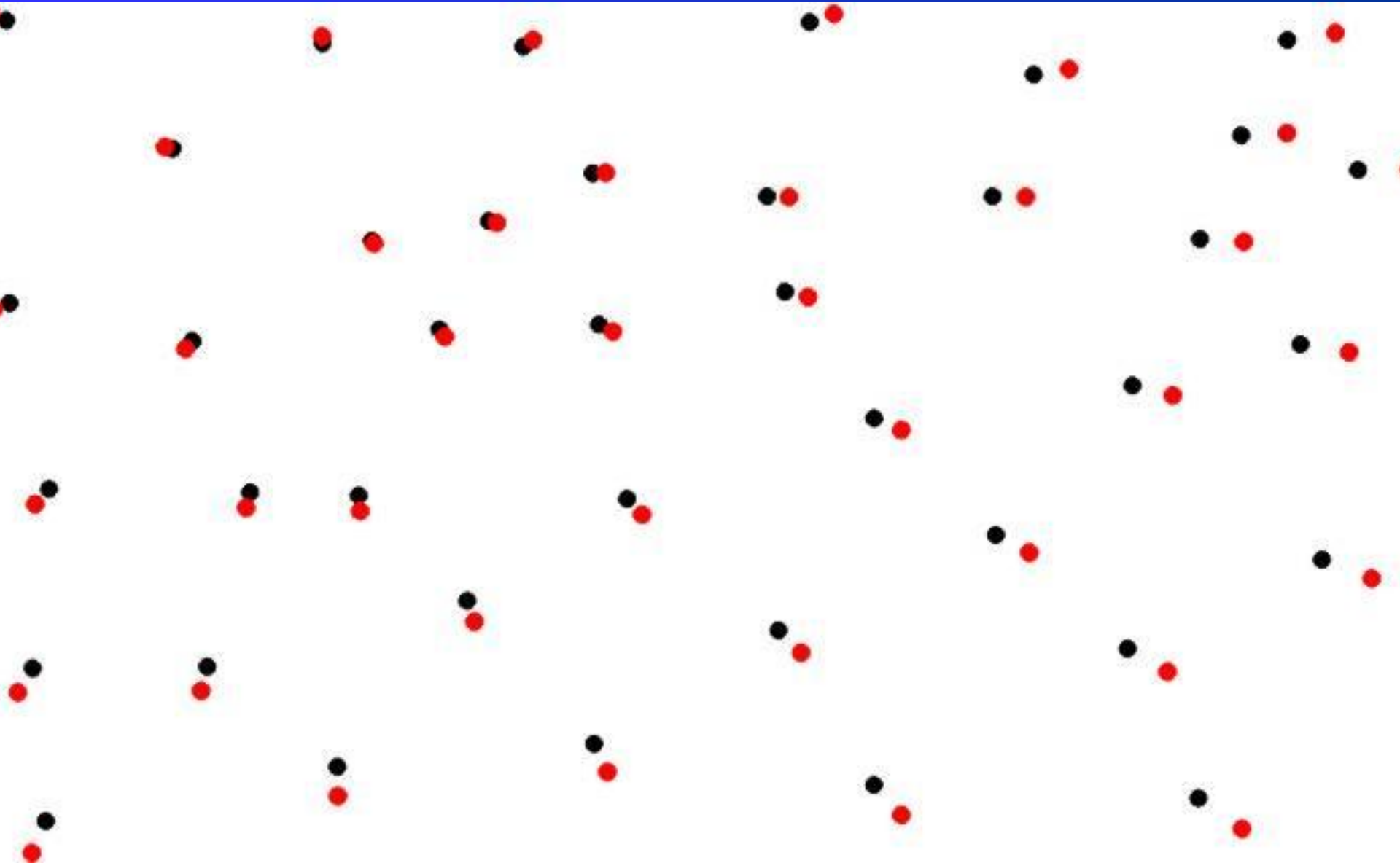
**На самом деле это не эффект Доплера!!!**

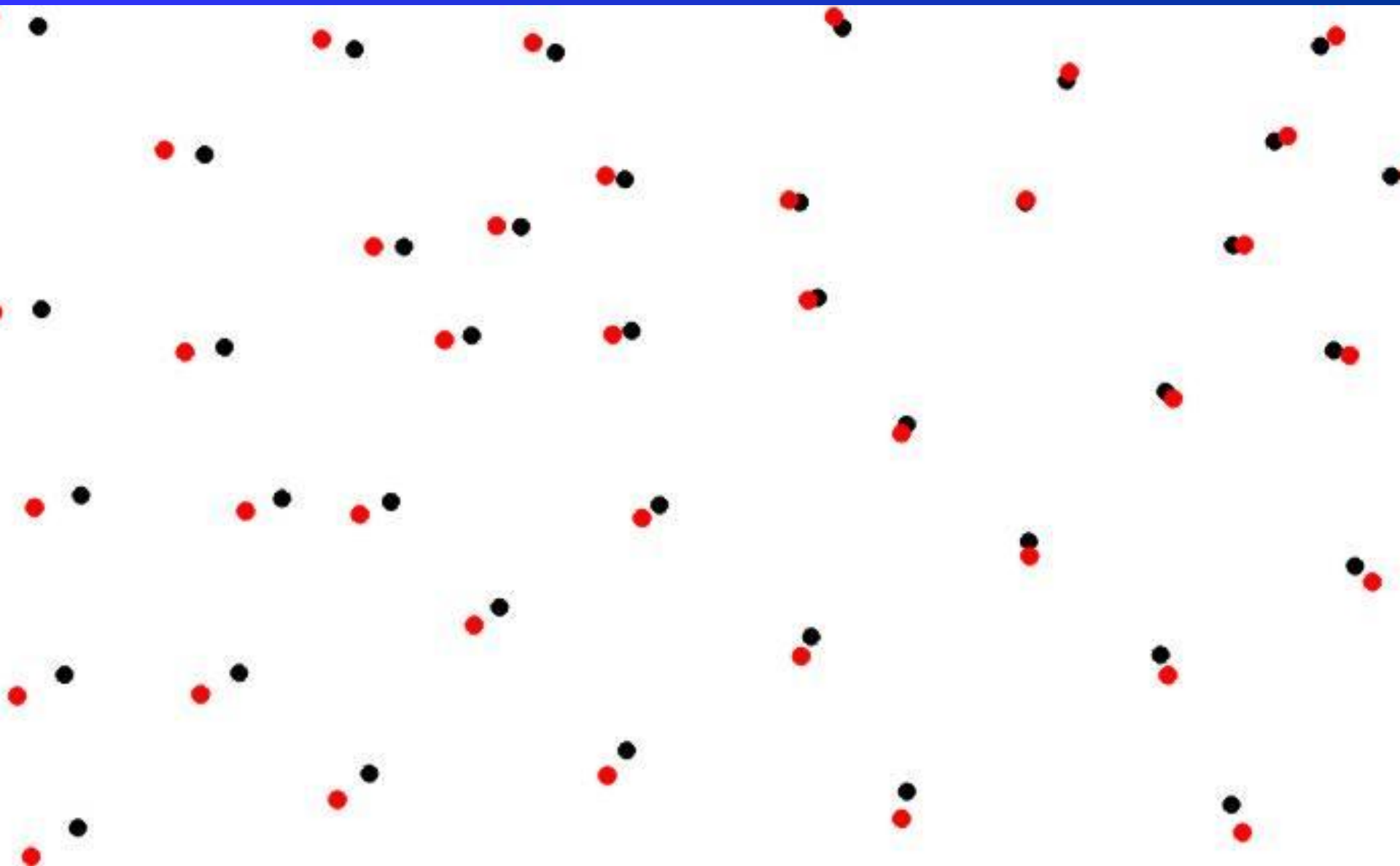
- И так, скорость удаления галактики пропорциональна расстоянию до неё
- Значит ли это, что вблизи нашей Галактики произошел гигантский взрыв?

$$V = HR$$









# Закон Хаббла

- Итак, в случае линейной зависимости удаление всех тел не означает существования центра расширения
- Все тела удаляются от всех!
- Но когда-то тела были ближе... Может даже все галактики, вся Вселенная расширяется из одной точки...



## 2 лекция

# Космологические модели

- Закон Хаббла
  - Красное смещение
- Ньютоновская космология
- Релятивистская космология
  - Основы ОТО
  - Фридмановские модели
- Наша Вселенная
- Обобщение космологических моделей

# Красное смещение

- Сдвиг длины волны определяют как

$$z = (\lambda - \lambda_0) / \lambda_0, \text{ где}$$

$\lambda_0$  – длина волны, измеренная в лаборатории

$\lambda$  – наблюдаемая длина волны

- Обычно ее называют **красным смещением**, так как
  - Если  $z > 0$ , то  $\lambda > \lambda_0$  – линия сдвигается в сторону больших длин волн («красная» сторона)
  - В космологии чаще всего  $z > 0$

# Красное смещение

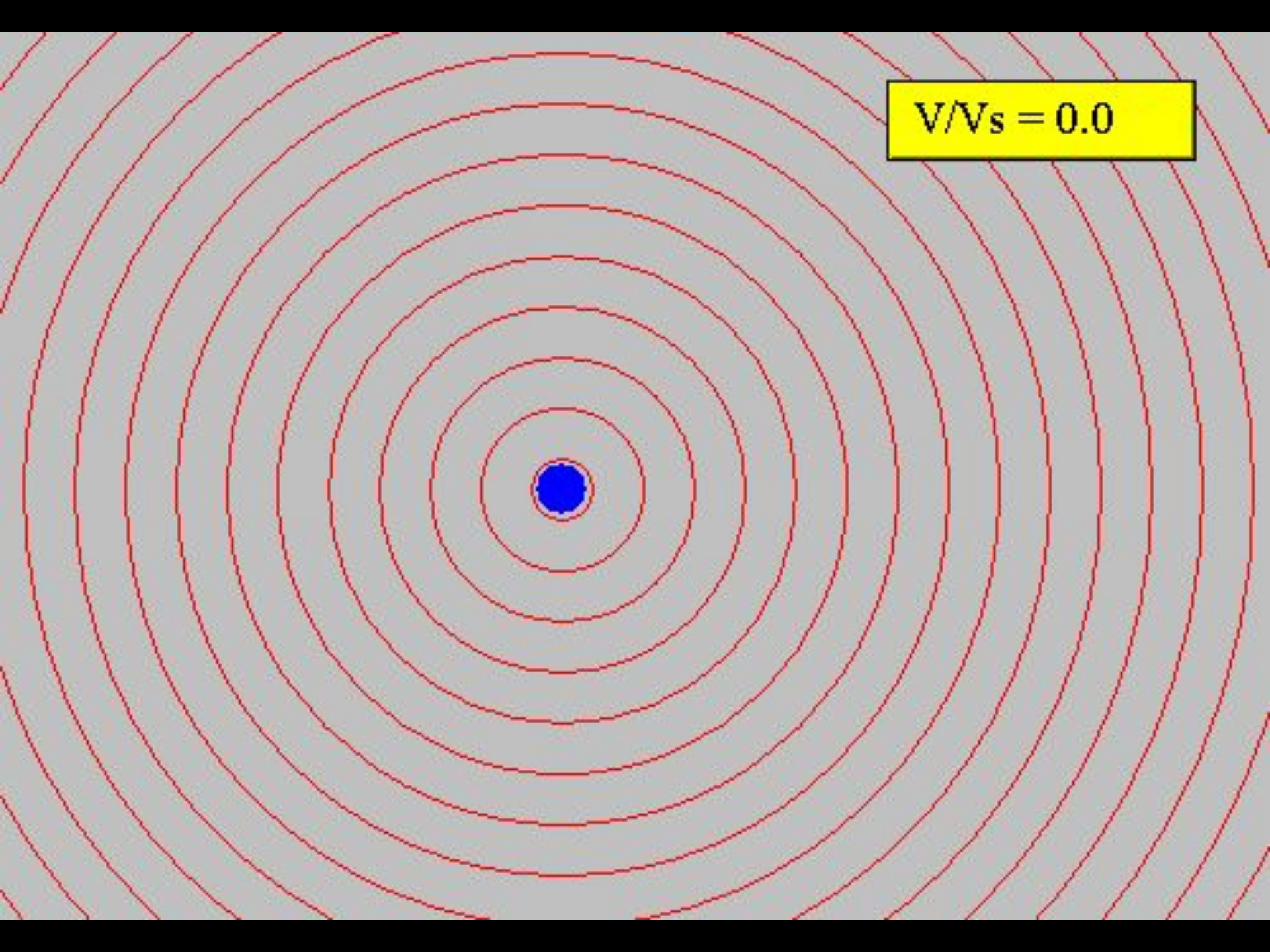
Ничтожный эффект

- Причины для изменения длины волны
  - Эффект Доплера (взаимное движение источника и наблюдателя)
  - Гравитационное смещение (различные гравитационные потенциалы источника и наблюдателя)
  - Расширение пространства (фотон «расширяется», пока движется в пространстве)
  - ~~– Старение фотонов (фотон «краснеет» из-за свойств пространства)~~

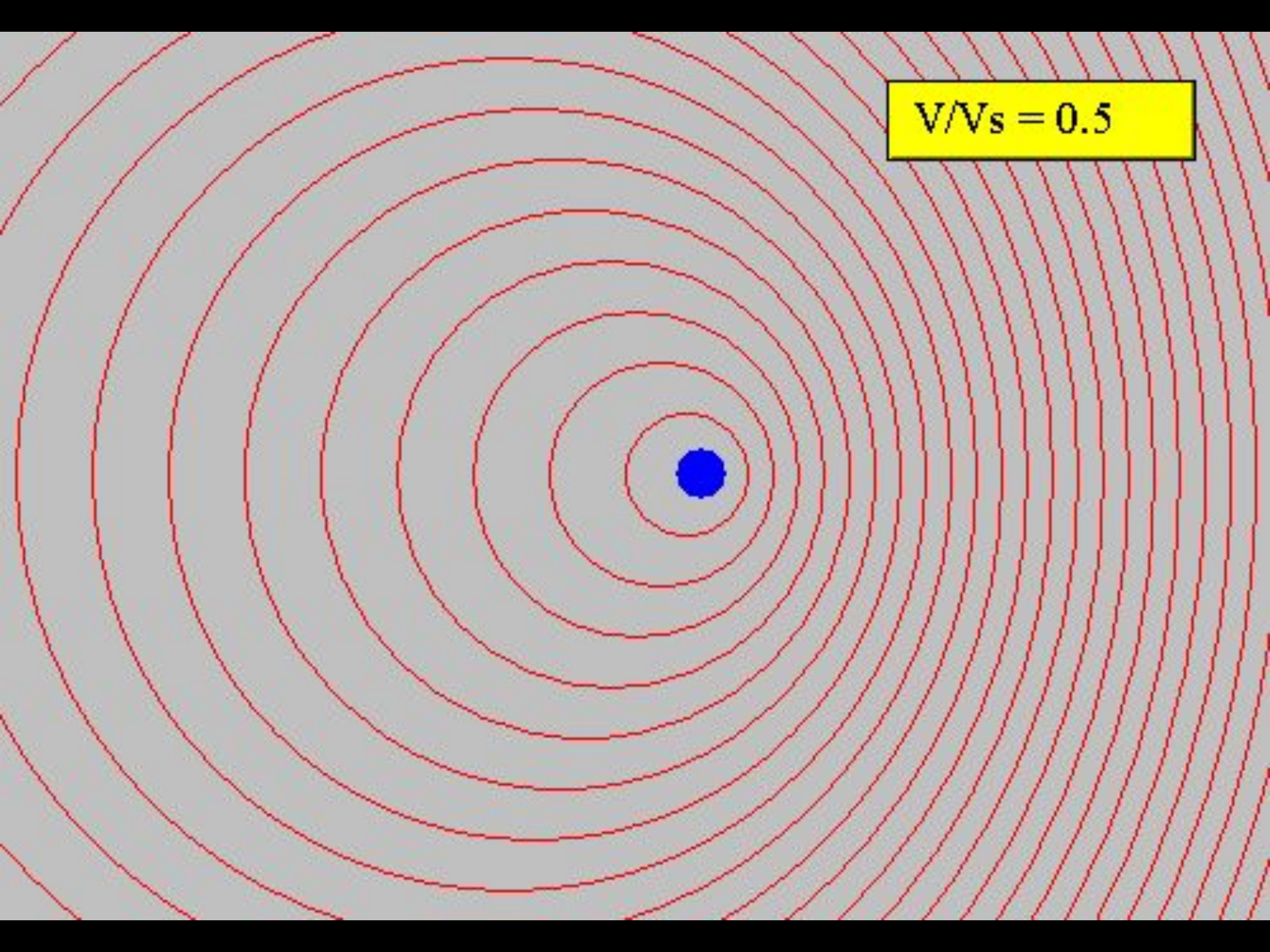
# Эффект Допплера

- Длина волны изменяется из-за того, что наблюдатель движется и изменяется промежуток времени между пучностями волны света
- Из-за изменения частоты меняется и регистрируемая длина волны
- При взаимном удалении источника и наблюдателя возникает *красное смещение*, при сближении – *фиолетовое смещение*

$$V/V_s = 0.0$$





A contour plot showing concentric red lines representing potential energy levels. The lines are centered around a blue dot, indicating a potential well. The spacing between the lines is uniform, suggesting a harmonic potential. A yellow box in the top right corner contains the text  $V/V_s = 0.5$ .

$V/V_s = 0.5$

# Эффект Допплера

- Точная формула:

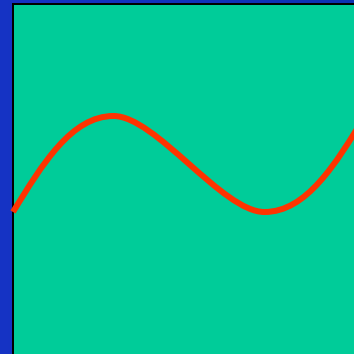
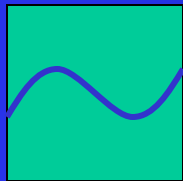
$$\lambda = \lambda_0 \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad 1 + z_{Dopl} = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- $v$  – модуль скорости относительного движения
- $\theta$  - угол между направлением движения источника и линией наблюдения
- $c$  – скорость света в вакууме

- Примерная формула при  $v \ll c$   $z_{Dopl} = \frac{v \cos \theta}{c} = \frac{v_r}{c}$

# Расширение пространства

- Длина волны изменяется, так как в течение свободного движения фотона пространство успело расшириться и «растянуть» фотон
- При расширении пространства возникает *красное смещение*, при сжатии – *фиолетовое смещение*





# Расширение пространства

- Интегральная формула:

$$1 + z_H = a_2 / a_1$$

–  $a$  – масштабный фактор (показывает, во сколько раз пространство расширилось по сравнению с определенным моментом)

–  $a_2$  соответствует времени регистрации фотона, а  $a_1$  – времени излучения

- Дифференциальная формула:

–  $\dot{a} = da/dt$

$$z_H = \int_l dz = \int_l \frac{\dot{a}}{a} dt \equiv \int_l H(t) dt$$

# Красное смещение

- Так как красное смещение галактики складывается из действия обоих эффектов, то

$$1 + z_{\text{общ}} = (1 + z_{\text{Dopl}}) \cdot (1 + z_H)$$

- Причина закона Хаббла – *расширение пространства*, а разброс вокруг прямой даёт *эффект Доплера*, который вызывают случайные движения отдельных галактик относительно центра масс скопления галактик

# Суть постоянной Хаббла

- Размерность постоянной Хаббла – км/с/Мпк или просто  $1/\text{с}$
- Она показывает, насколько в относительных единицах расширяется пространство в единицу времени
- Значит, величина, обратная постоянной Хаббла, приблизительно равна возрасту Вселенной

# Метагалактика

- Отсюда следует, что у Вселенной есть предел наблюдаемой области
- Наблюдаемую часть Вселенной называют *Метагалактикой*
- Расстояние до границы Метагалактики примерно  $R_M = c / H_0 = 1.3 \cdot 10^{26}$  м

## 2 лекция

# Космологические модели

- Закон Хаббла
  - Красное смещение
- **Ньютоновская космология**
- Релятивистская космология
  - Основы ОТО
  - Фридмановские модели
- Наша Вселенная
- Обобщение космологических моделей



# Космологические модели

- *Космологической моделью* называют математическую модель, описывающую усредненное распределение материи в пространстве и его эволюцию
- Модели делят на классы по теории, в рамках которой она построена:
  - Ньютоновская космология – *всемирный закон притяжения*
  - Релятивистская космология – *ОТО*

# Космологические модели

- Основные предположения, на которых основываются **все** космологические модели:
  - Вселенная однородна и изотропна
  - Законы физики одинаковы во всей Вселенной
- Применимость этих предположений следует из многих данных различных наблюдений

# Ньютоновская космология

- Рассмотрим «типичный» шар, равномерно заполненный материей.
- Пусть радиальные скорости частиц подчиняются закону Хаббла (что неизбежно при наших предположениях):

$$\vec{v} = H\vec{r}$$

- Пусть  $H > 0$  и не зависит от пространственных координат (только от времени)



# Ньютоновская космология

- Пусть в момент времени  $t_0$  координата частицы есть  $r_0$ . Тогда эта координата меняется по закону  $r(t) = r_0 \cdot R(t)$  ( $R(t)$  – масштабный фактор).
- Так как  $v = dr / dt = H(t)r$ , то

$$H(t) \equiv \frac{1}{r(t)} \frac{dr(t)}{dt} = \frac{1}{r_0 R(t)} \frac{d(r_0 R(t))}{dt} = \frac{1}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt}$$

# Ньютоновская космология

- Для определения зависимости  $R(t)$  и  $H(t)$  от времени, используем законы сохранения массы и полной механической энергии.

– Масса шара не меняется

$$M = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$

или, записывая по другому,

$$\rho R^3 = \text{const}$$

# Ньютоновская космология

- Закон сохранения механической энергии для элемента на краю шара:

- Кинетическая энергия  $T = \frac{1}{2} dm \cdot v^2$

- Потенциальная энергия  $U = -G \frac{dm \cdot M}{r}$

- Полная энергия постоянна:

$$\frac{1}{2} v^2 - G \frac{M}{r} = \text{const}$$

# Ньютоновская космология

- Запишем полную механическую энергию (постоянную) в виде  $-\frac{1}{2}kr_0^2c^2$ . Тогда

$$\frac{1}{2}H^2r^2 - G \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{r} = -\frac{1}{2}kr_0^2c^2$$

$$\rho - \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{3kc^2}{8\pi GR^2}$$

(\*)

# Ньютоновская космология

- Это уравнение вместе с начальными условиями полностью определяют  $R(t)$ , т. е. все динамические свойства космологической модели.
- В уравнение (\*) не входит размер шара материи, поэтому его можно применять для шара любого размера, как и для всей Вселенной, равномерно заполненной веществом.

# Ньютоновская космология

- Качественно можно оценить  $R(t)$  даже без интегрирования уравнения (\*):

$$\rho - \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{3kc^2}{8\pi GR^2}$$

# Ньютоновская космология

- Если  $k < 0$ , то полная механическая энергия положительна (кинетическая больше потенциальной) и данный элемент объёма будет вечно отдаляться от начала координат.
- Если  $k > 0$ , то полная энергия отрицательна. Через какое-то время расширение затормозится и сменится сжатием ( $H < 0$ )
- $k = 0$  – пограничный случай:  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$

# Ньютоновская космология

- Знак постоянной  $k$  и характер движения материи зависит от знака разности  $\rho - \rho_c$ , где

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

называют *критической плотностью*.

Введём также обозначение

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}$$



# Ньютоновская космология

- Если  $\rho > \rho_c$  ( $\Omega > 1$ ), то расширение шара остановится и сменится сжатием.
- Если  $\rho \leq \rho_c$  ( $\Omega \leq 1$ ), то расширение будет продолжаться вечно.
- Значение критической плотности (как и сама плотность) меняется со временем, но знак разности плотностей не меняется.

# НЬЮТОНОВСКАЯ КОСМОЛОГИЯ

- Решим уравнение эволюции (\*) в случае, когда  $k = 0$ .

$$\rho - \frac{3H^2}{8\pi G} = 0 \quad \rho(t) = \rho_0 \cdot R^{-3}$$

$$\rho_0 \cdot R^{-3} - \frac{3}{8\pi G} \left( \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right)^2 = 0$$

# Ньютоновская космология

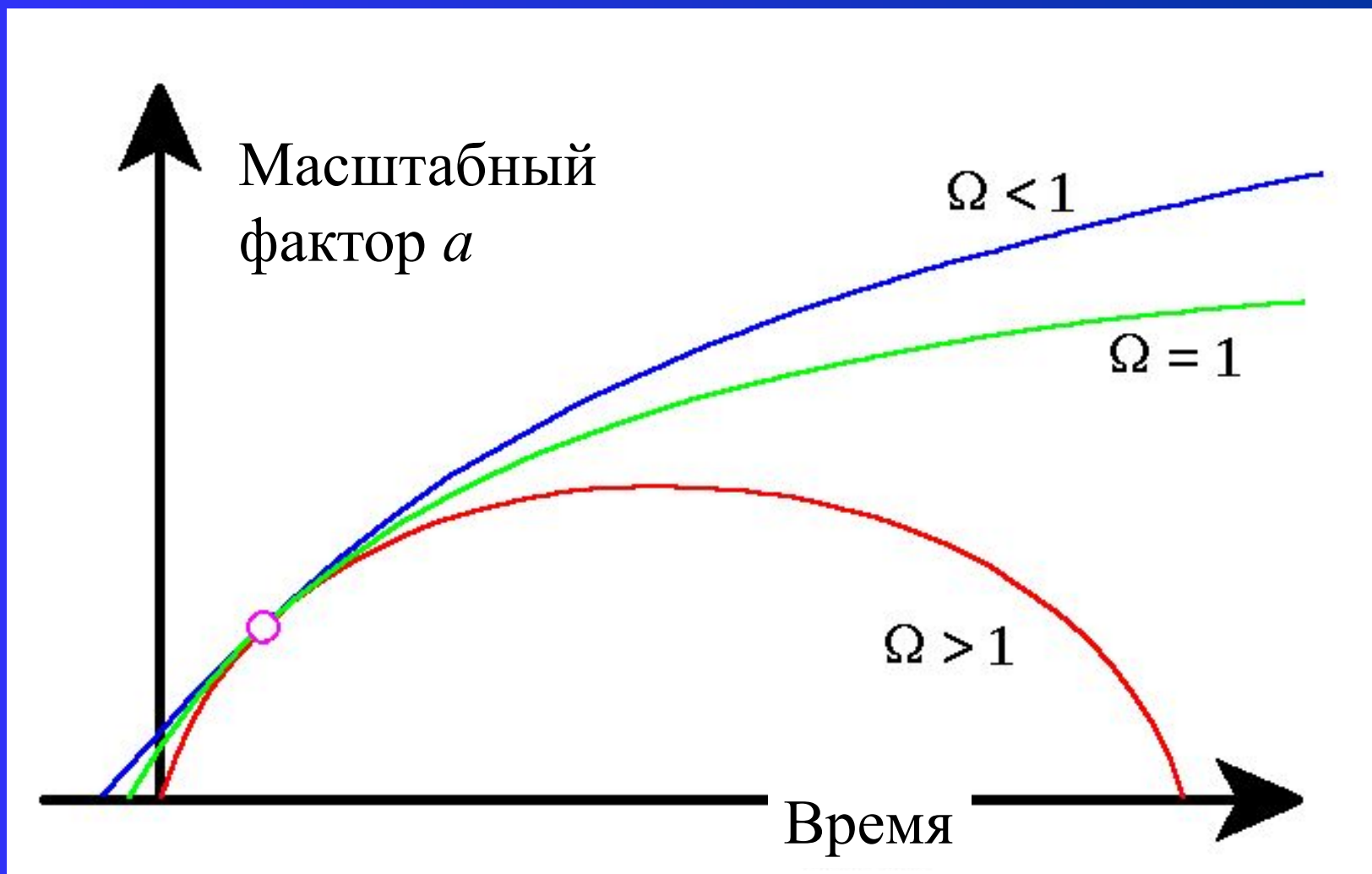
$$\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{\rho_0}{R} \frac{8\pi G}{3}}$$

$$\frac{2}{3} R^{3/2}(t) = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} \rho_0 \cdot t$$

$$R(t) = \sqrt[3]{6\pi G \rho_0} \cdot t^{2/3}$$

$$H(t) = \frac{2}{3t}$$

# Ньютоновская космология



# Ньютоновская космология

- Классическая космология Ньютона применима лишь малым интервалам пространства и времени (локально)
- Качественно верно описывает эволюцию вселенной и ее зависимость от средней плотности
- неприменима для описания всей вселенной, так как скорость взаимодействия считается бесконечной

## 2 лекция

# Космологические модели

- Закон Хаббла
  - Красное смещение
- Ньютоновская космология
- **Релятивистская космология**
  - Основы ОТО
  - Фридмановские модели
- Наша Вселенная
- Обобщение космологических моделей

# Релятивистская космология

- Согласно экспериментальным данным, скорость света постоянна во всех системах отсчета.
- Это противоречит теории Ньютона, но верно в специальной теории относительности (СТО)
- Но в СТО не включено гравитационное взаимодействие. Теория, описывающая и его, учитывая конечность скорости взаимодействия, есть ОТО.

# История

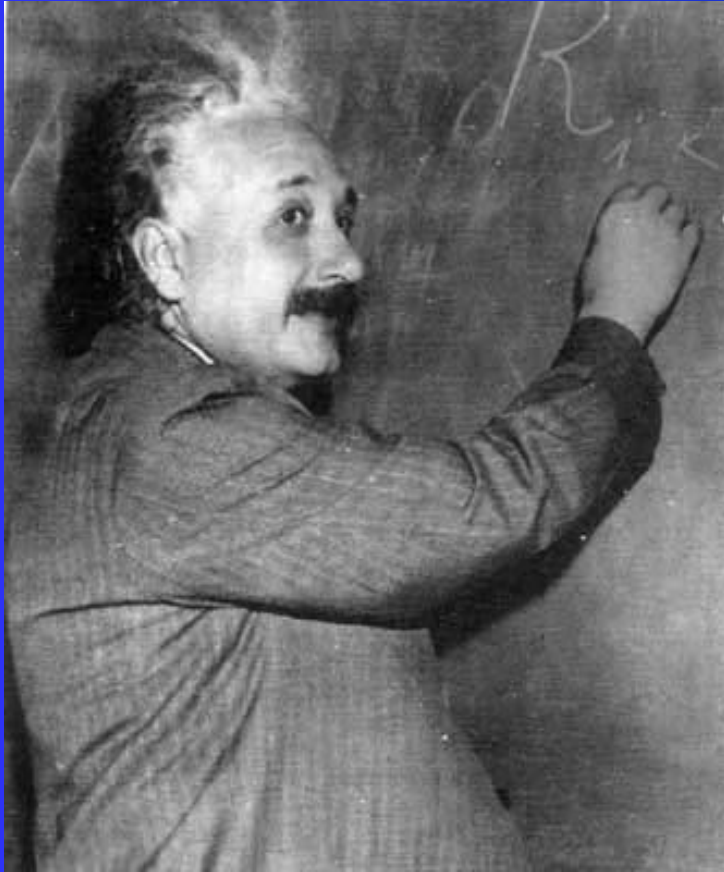
- В 1916 году *А. Эйнштейн* создает *общую теорию относительности (ОТО)*
- Она рассматривает объекты, которые движутся с большими скоростями в сильных гравитационных полях
- Он (и другие) ищут решения ОТО для описания эволюции Вселенной
- Вселенную представляют однородной и изотропной (космологический принцип)



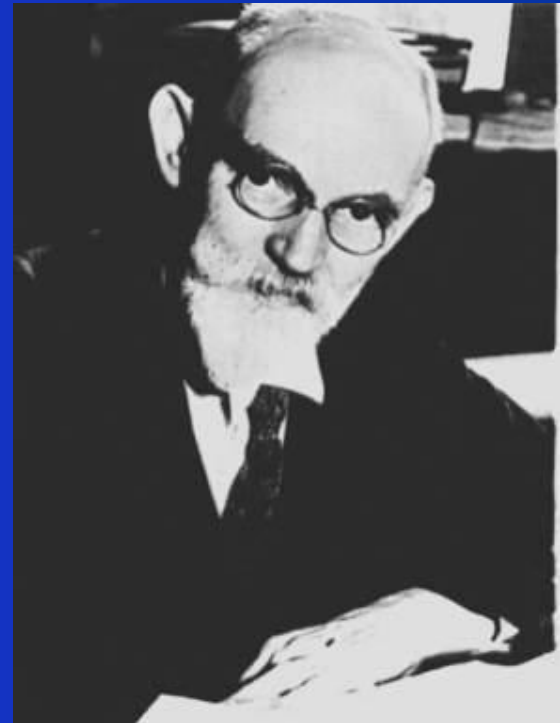
# История

- В 1917 году *А. Эйнштейн* создает модель стационарной вселенной, дополняя уравнения гравитационного поля « $\Lambda$ -членом»
- В 1917 году *В. де Ситтер* находит решение для динамической пустой вселенной
- Закон Хаббла (1929 г.) соответствует ожиданиям ОТО и соответствует случаю расширения Вселенной

# История



Albert Einstein (1879 – 1955)



W. de Sitter  
(1872 – 1934)

# История

- В 1922 году *А.А. Фридман* и, независимо от него, в 1927 году *Г.Е. Леметр* развили далее модель нестационарной вселенной, учитывая массу, гравитацию и кривизну пространства
- Согласно этой теории вселенная расширяется из начальной пространственно-временной сингулярности до современного состояния и дальше

# История



Александр Фридман  
(1888 – 1925)



Abbe Lemaitre

## 2 лекция

# Космологические модели

- Закон Хаббла
  - Красное смещение
- Ньютоновская космология
- Релятивистская космология
  - **Основы ОТО**
  - Фридмановские модели
- Наша Вселенная
- Обобщение космологических моделей

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- Основные понятия ньютоновской теории гравитации
  - Однородное и изотропное пространство, в котором происходит движение
  - Однородное время как параметр движения
  - Движущаяся масса
  - Гравитационное взаимодействие, моментально действующее по закону

$$F = G \frac{M_1 M_2}{r^2}$$

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- Основные понятия СТО
  - Пространство-время Минковского
  - Инерциальная система отсчета (ИСО)
  - Скорость света  $c$ , с которой распространяются взаимодействия
- Что отсутствует в этой теории
  - Гравитационное поле

# Основные понятия ОТО

- *Локально-инерциальная система отсчета (ЛИСО)*, которая вводится из-за невозможности построения единой глобальной ИСО в пространстве с гравитационным полем.
- В СТО ускорение тела может быть скомпенсировано ускорением система отсчета. В ОТО это невозможно.

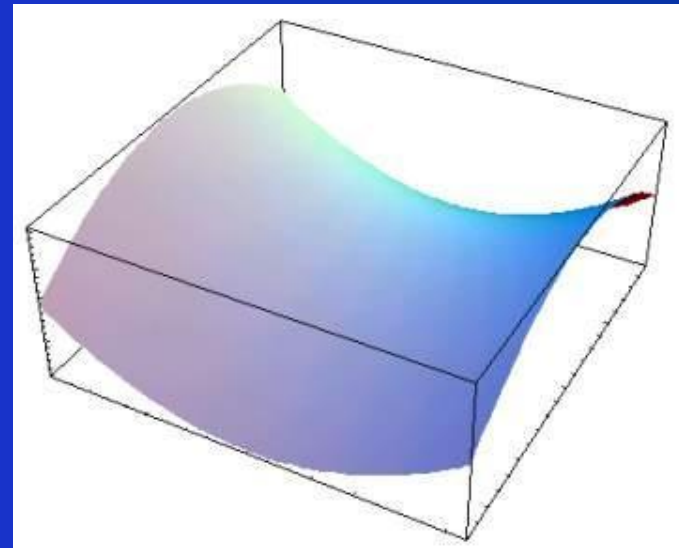
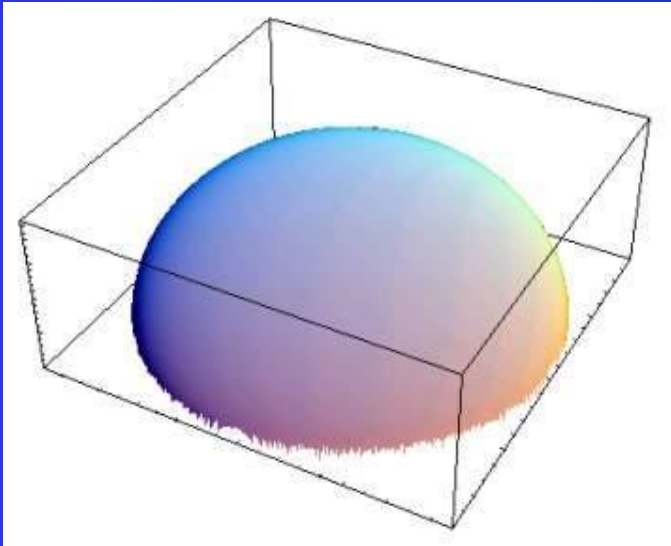


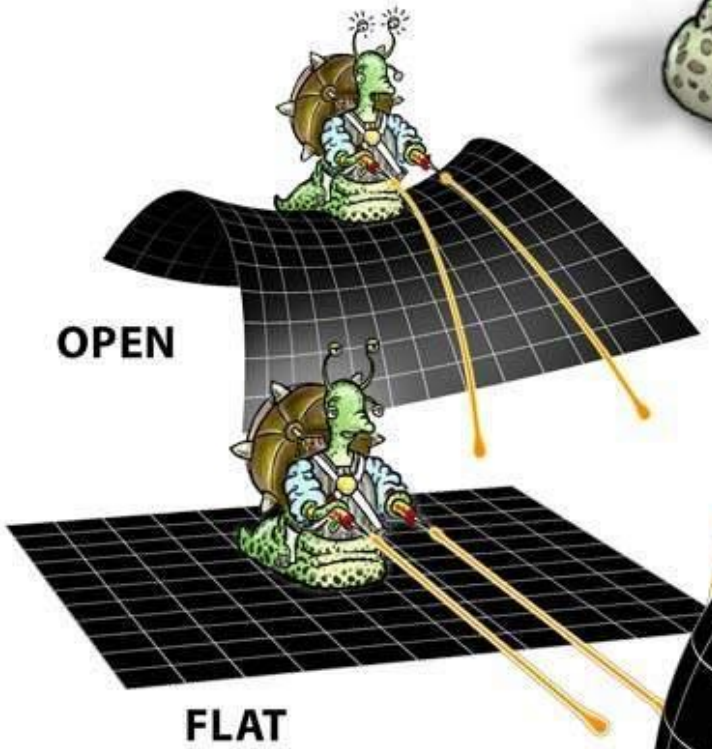
# Основные понятия ОТО

- *Пространство-время Римана* – кривое 4-х мерное пространство (т.е. элемент интервала  $ds$  нельзя глобально преобразовать в форму Минковского)
- Геометрические свойства (кривизну) определяет движение и распределение массы. Но и само движение определяется кривизной пространства.

# Основные понятия ОТО

- Кривые 4-х мерные пространства
  - У сферы положительная кривизна
  - У «седла» отрицательная кривизна





# Основные понятия ОТО

- Согласно ОТО, гравитационное поле проявляется в кривизне пространства. Чем больше отличие от плоского пространства, тем сильнее поле.
- Уравнения гравитационного поля ОТО – система десяти нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка

# Уравнения Эйнштейна

- Кривизну с распределением массы связывают уравнения Эйнштейна

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -\kappa T_{ik}$$

- $R_{ik}$  и  $R = g^{ik} R_{ik}$  характеризуют кривизну
- $g_{ik}$  – метрический тензор  $g_{ik} = e_i \cdot e_k$
- $T_{ik}$  характеризует распределение и движение материи
- $\kappa$  – постоянная Эйнштейна  $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$

# Тензор энергии-импульса

- Рассмотрим вид тензора энергии-импульса  $T_{ik}$  в наиболее частых случаях
- Компонента  $T_{00}$  равна плотности энергии вещества  $\varepsilon = \rho c^2$
- Компоненты  $T_{ii}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) равны давлению вещества  $p$
- Недиагональные члены в ЛИСО – нули

# Тензор энергии-импульса

- Тензор энергии-импульса для *пыли*:
  - Пыль определена как среда с низкой температурой (т.е. тепловые скорости движения много меньше скорости света  $c$ )
  - Отсюда давление пыли равно нулю и единственная ненулевая компонента тензора  $T_{ik}$  есть

$$T_{00} = \rho c^2$$

# Тензор энергии-импульса

- Тензор энергии-импульса для *ультрарелятивистских* частиц:

– Их 4-импульс равен  $p = E / c$

– Тогда  $T_{00} = \sum E = \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  - плотность энергии

– И

$$T_{ii} = \sum \frac{c^2}{E} \frac{1}{3} |p|^2 = \sum \frac{c^2}{3E} \frac{E^2}{c^2} = \sum \frac{E}{3} = \frac{1}{3} \varepsilon$$



# Тензор энергии-импульса

- Открытый вид тензора энергии-импульса для ультра-релятивистского вещества (в его системе отсчета):

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\varepsilon \end{pmatrix}$$

- Для излучения (фотонов)  $T_{ik}$  такой же!

# Уравнение состояния

- Давление с плотностью вещества связано *уравнением вещества*, общий вид которого  $p = \alpha \rho c^2$
- Из вида тензора  $T_{ik}$  следует, что для пыли  $\alpha = 0$ , а для ультра-релятивистского вещества и излучения  $\alpha = 1/3$

## 2 лекция

# Космологические модели

- Закон Хаббла
  - Красное смещение
- Ньютоновская космология
- Релятивистская космология
  - Основы ОТО
  - **Фридмановские модели**
- Наша Вселенная
- Обобщение космологических моделей

# Фридмановские модели

- Основные приближения
  - Пространство однородно и изотропно
  - Описание системы происходит в ЛИСО
- Тогда уравнения Эйнштейна сводятся к

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{c^2} T_1^1 = \frac{8\pi G}{c^2} T_2^2 = \frac{8\pi G}{c^2} T_3^3$$

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} T_0^0$$

# Фридмановские модели

- Основные приближения
  - Пространство однородно и изотропно
  - Материя есть «пыль»
- Тогда уравнения Эйнштейна сводятся к

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = 0$$

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} T_0^0$$

# Фридмановские модели

- Эти уравнения не независимы, и второе из них эквивалентно уравнению (\*), если на место  $T_0^0$  подставить его значение  $\rho c^2$

$$H^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho c^2$$

$$\rho = \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{3kc^2}{8\pi G a^2}$$

# Фридмановские модели

- Хотя уравнения математически идентичны, они описывают разную «физику»

Ньютоновская космология	Фридмановские модели
$k$ – непрерывная величина, характеризующая энергию системы	$k$ принимает значения 0, 1 или $-1$ и характеризует кривизну пространства
$H$ описывает взаимное движение частиц	$H$ описывает расширение пространства

# Фридмановские модели

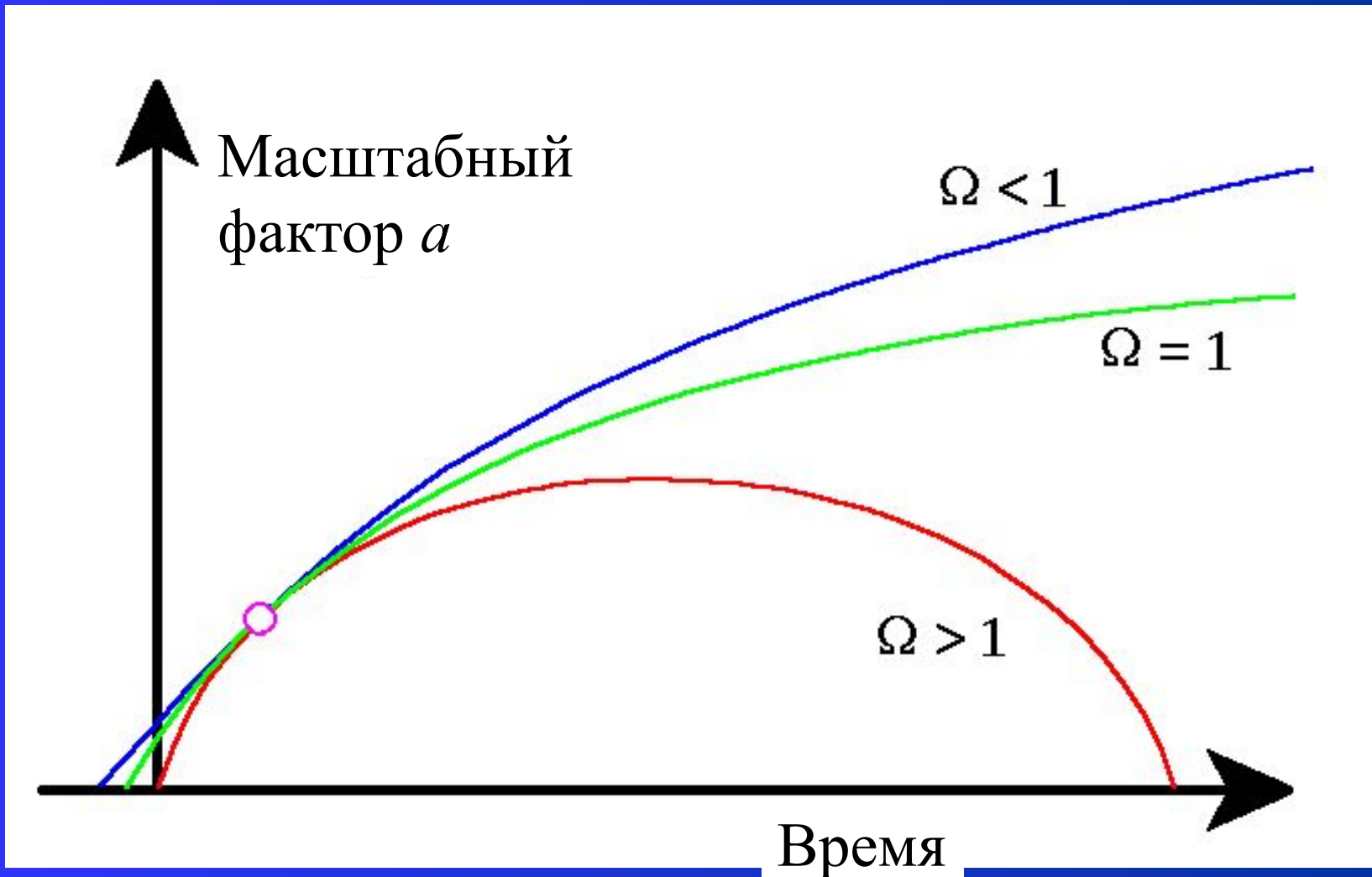
- Но так как уравнения идентичны, то и решения тоже одинаковы!



# Эволюция Вселенной

- Эволюция зависит от одного параметра – *параметра плотности  $\Omega$* .
- Если  $\Omega < 1$ , то вселенная вечно расширяется. *Пространство открыто*.
- Если  $\Omega > 1$ , то вселенная после стадии расширения начинает сжиматься обратно. *Пространство замкнуто*.
- Если  $\Omega = 1$ , то пограничный случай – *пространство плоское*

# Эволюция Вселенной



# Эволюция Вселенной

- Постоянная Хаббла – мера скорости изменения масштаба Вселенной  $a$ :

$$H = \dot{a}/a$$

- Со временем она меняется!
- При наблюдении объекта рассчитанная постоянная Хаббла зависит от эволюции вселенной во все моменты между излучением и регистрацией фотона

## 2 лекция

# Космологические модели

- Закон Хаббла
  - Красное смещение
- Ньютоновская космология
- Релятивистская космология
  - Основы ОТО
  - Фридмановские модели
- **Наша Вселенная**
- Обобщение космологических моделей

# Наша Вселенная

- Мы рассмотрели общую схему эволюции вселенной, заполненной пылевидной материей
- Возникает закономерный интерес – годится ли разработанная теория для описания нашей Вселенной
- И если годится, то каковы реальные значения параметров модели?

# Наша Вселенная

- Преобразуем уравнение Фридмана (УФ), учитывая форму  $T_{ik}$  ( $\underline{T}_{ik}$ ). Итак,

$$2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho c^2 = \frac{8\pi G}{c^2} \alpha \rho c^2$$

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3} \rho a (1 + 3\alpha)$$

- Оно показывает, что эволюция зависит от уравнения состояния  $p = \alpha \rho c^2$

# Наша Вселенная

- Во Вселенной одновременно есть типы материи с разными значениями  $\alpha$
- Последние данные (*WMAP, февраль 2003 года*) убедительно показывают, что около 2/3 от общей энергии занимает т.н. *тёмная энергия*
- Попробуем понять, что же это такое!

Если не хотят понять

# $\Lambda$ - член

- Исторически первая модель вселенной Эйнштейна (1917 г.) была по построению статичной. Однако, как мы видели, уравнения Эйнштейна не допускают такое решение
- Чтобы решить это противоречие, Эйнштейн добавил в уравнения дополнительный скалярный член (т.н.  $\Lambda$ -член)



# $\Lambda$ - член

- Уравнения Эйнштейна:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -\kappa T_{ik}$$

- Уравнения, дополненные  $\Lambda$ -членом

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \Lambda g_{ik} = -\kappa T_{ik}$$

# $\Lambda$ - член

- Найдём эффективное уравнение состояния  $\Lambda$ -члена. Для этого представим себе, что материи вообще нет. Тогда

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \Lambda g_{ik}$$

- Эффективный тензор энергии-импульса в ЛИСО есть

$$T_{ik}^{vac} = \frac{1}{\kappa} \Lambda g_{ik} = \frac{1}{\kappa} \text{diag}(\Lambda, -\Lambda, -\Lambda, -\Lambda)$$

# $\Lambda$ - член

- Сравнивая с общим видом тензора энергии импульса в ЛИСО, т.е.

$$T_{ik} = \text{diag}(\rho c^2, \alpha \rho c^2, \alpha \rho c^2, \alpha \rho c^2)$$

видим, что для  $\Lambda$ -члена  $\alpha = -1$ .

- Значит, если плотность энергии  $\Lambda$ -члена доминирует, то Вселенная расширяется ускоренно!

# $\Lambda$ - член

- Действительно, из уравнения Фридмана:

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3} \rho a (1 + 3\alpha)$$

- Если  $\alpha = -1$  (т.е. всю плотность энергии составляет  $\Lambda$ -член), то  $d^2 a/dt^2$  положителен и расширение происходит ускоренно.
- Причина – сильное отрицательное «давление»

# Наша Вселенная

Но об этом в следующий раз!

## 2 лекция

# Космологические модели

- Закон Хаббла
  - Красное смещение
- Ньютоновская космология
- Релятивистская космология
  - Основы ОТО
  - Фридмановские модели
- Наша Вселенная
- **Обобщение космологических моделей**

# Модель эволюции Вселенной

- Обобщим закономерности, выведенные на этой лекции
- Выведем зависимости характеристик вещества от времени для
  - Пыли
  - Ультра-релятивистского вещества и излучения
  - Космологической постоянной

*Фотоны - всегда  
ультра-релятивистские частицы*

# Состояния вещества

- Пыль:
  - Плотность энергии  $\varepsilon$
  - Давление  $p = 0$ ,  $\alpha = 0$
- Ультра-релятивистское вещество и излучение:
  - Плотность энергии  $\varepsilon = \rho c^2$
  - Давление  $p = 1/3 \varepsilon$ ,  $\alpha = 1/3$
- Космологическая постоянная  $\Lambda$ :
  - Плотность энергии  $\varepsilon = \kappa \Lambda$
  - Давление  $p = -\varepsilon$ ,  $\alpha = -1$



# Плотность энергии

- Уравнение, описывающее зависимость плотности энергии  $\varepsilon$  от масштабного фактора  $a$ :

$$\frac{d}{da}(\varepsilon a^3) + 3pa^2 = 0$$

$$a^3 \frac{d\varepsilon}{da} + \varepsilon \cdot 3a^2 + 3\alpha \varepsilon a^2 = 0$$

$$\frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon = -3(1 + \alpha) \cdot \frac{1}{a} da$$

# Плотность энергии

$$\varepsilon \propto a^{-3(1+\alpha)}$$

Пыль	УР вещество, излучение	$\Lambda$ -член
$\varepsilon \propto a^{-3}$	$\varepsilon \propto a^{-4}$	$\varepsilon = const$

Видно, что положительное давление ускоряет уменьшение энергии, а отрицательное — замедляет его

# Масштабный фактор

- Уравнение Фридмана описывает зависимость масштабного фактора от времени:

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} T_0^0$$

$$\frac{da}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3c^2}} a^{-3/2(1+\alpha)} dt$$

$$a^{-3/2(1+\alpha)-1} da = \sqrt{\frac{8\pi G}{3c^2}} dt$$

# Масштабный фактор

- Если  $\alpha \neq -1$ , то  $a \propto t^{\frac{2}{3(1+\alpha)}}$
- Если  $\alpha = -1$ , то  $a \propto e^t$

Пыль	УР вещество, излучение	$\Lambda$ -член
$a \propto t^{2/3}$	$a \propto \sqrt{t}$	$a \propto e^t$

Зависимость истинна, если данный тип вещества доминирует во Вселенной

# Постоянная Хаббла

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

- Если  $a(t)$  – степенная функция, то постоянная Хаббла обратно пропорциональна времени

$$H = \frac{\frac{2}{3}t^{-1/3}}{t^{2/3}} = \frac{2}{3t} \qquad H = \frac{\frac{1}{2}t^{-1/2}}{t^{1/2}} = \frac{1}{2t}$$

- Если  $a(t)$  – экспонента, то постоянная Хаббла не зависит от времени

# Температура

- Зависимость температуры излучения от  $a$  есть  $T \propto \varepsilon^{1/4} \propto (a^{-4})^{1/4} \propto a^{-1}$ , так как плотность энергии излучения есть  $\varepsilon \propto T^4$
- Зависимость температуры пыли от времени не так проста, так как на нее влияют эффекты выделения внутренней энергии (притяжение, ядерные и химические реакции и др.)

# Параметры вещества

Пыль ( $\alpha = 0$ )	УР, излучение ( $\alpha = 1/3$ )	$\Lambda$ -член ( $\alpha = -1$ )
$\varepsilon \propto a^{-3}$	$\varepsilon \propto a^{-4}$	$\varepsilon = const$
$a \propto t^{2/3}$	$a \propto \sqrt{t}$	$a \propto e^t$
$H = \frac{2}{3}t^{-1}$	$H = \frac{1}{2}t^{-1}$	$H = const$
	$T \propto a^{-1}$	

# Выводы

- Узнали главные экспериментальные факты внегалактической астрономии
- Ознакомились с некоторыми моделями эволюции Вселенной на основе теории Ньютона и ОТО
- На следующей лекции проследим эволюцию Вселенной с точки зрения теории Большого Взрыва



