

***Подготовка к ЕГЭ.
Полезно знать.***

Задачи на смеси и сплавы

Удобно решать с использованием следующих вспомогательных средств: каждая отдельная смесь (или сплав), фигурирующая в задаче, представляется в виде таблицы, в которой записывается информация о составе данной смеси.

Например, дан раствор соли с общей массой 500 и концентрацией соли 40 %. **Представляем такой раствор в виде таблицы:**

500	соль	вода
	40 %	

Слева от таблицы записывается масса всего раствора. В левой колонке таблицы записывается информация об основном компоненте раствора (в данной задаче это соль).

В первой строке таблицы записывается **концентрация**, во второй **масса** компонента.

Найденная величина массы помещается во второй строке таблицы (200).

Если при решении задачи понадобятся данные о втором компоненте раствора, то они заносятся во вторую колонку таблицы (60 % 300)

ПРАВИЛО:

- *При смешивании нескольких растворов складываются как общие массы растворов, так и массы компонентов этих растворов.*

Задача.

Смешали 10%- ный и 25%- ный растворы соли и получили 3кг 20% -ного раствора. Какое количество каждого раствора (в кг) было использовано?

Решение

x	<table border="1"><tr><td>соль</td><td>вода</td></tr><tr><td>10%</td><td></td></tr><tr><td>0,1x</td><td></td></tr></table>	соль	вода	10%		0,1x		+	(3 - x)	<table border="1"><tr><td>соль</td><td>вода</td></tr><tr><td>25%</td><td></td></tr><tr><td>0,25(3-x)</td><td></td></tr></table>	соль	вода	25%		0,25(3-x)		=	3	<table border="1"><tr><td>соль</td><td>вода</td></tr><tr><td>20%</td><td></td></tr><tr><td>0,6</td><td></td></tr></table>	соль	вода	20%		0,6	
	соль	вода																							
	10%																								
0,1x																									
соль	вода																								
25%																									
0,25(3-x)																									
соль	вода																								
20%																									
0,6																									

Имеем: $0,1x + 0,25(3 - x) = 0,6$

$$0,1x + 0,75 - 0,25x = 0,6$$

$$-0,15x = -0,15$$

$$x = 1$$

$$3 - x = 3 - 1 = 2$$

Ответ: 1 кг; 2 кг

Задача.

Сколько кг воды нужно выпарить из 0,5 т целлюлозной массы, содержащей 85% воды, чтобы получить массу с содержанием 75% воды?

Решение

0,5	цел-за	вода
		85%
		0,425

-

x	цел-за	вода
		100%
		x

=

(0,5-x)	цел-за	вода
		75%
		0,75(0,5 - x)

Имеем: $0,425 - x = 0,75(0,5 - x)$

$0,5 \cdot 0,85 = 0,425$

$$0,425 - x = 0,375 - 0,75x$$

$$x - 0,75x = 0,425 - 0,375$$

$$0,25x = 0,05$$

$$x = 0,2$$

Ответ: 200 кг

Задача.

Смешали 2л 60%- ного раствора соли с 3л 50%- ного раствора соли и к смеси добавили 1л чистой воды. Какова концентрация соли в полученной смеси?

Решение

2	+	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>соль</td><td>вода</td></tr> <tr><td>60%</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td></tr> </table>	соль	вода	60%				+	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>соль</td><td>вода</td></tr> <tr><td>50%</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td></tr> </table>	соль	вода	50%				+	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>соль</td><td>вода</td></tr> <tr><td>0%</td><td></td></tr> <tr><td>0</td><td></td></tr> </table>	соль	вода	0%		0		=
соль	вода																								
60%																									
соль	вода																								
50%																									
соль	вода																								
0%																									
0																									

=	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>соль</td><td>вода</td></tr> <tr><td>X %</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td></tr> </table>	соль	вода	X %			
соль	вода						
X %							

1) Находим массу соли в первом растворе:

$$0,6 \cdot 2 = 1,2$$

2) Находим массу соли во втором растворе:

Имеем: $0,5 \cdot 3 = 1,5$

$$\Rightarrow x = 45\%$$

Символы «+» между таблицами показывают, что растворы смешиваются и следовательно, соответствующие массы складываются.

Для смешивания растворов, следовательно, соответствующие массы складываются.

$$\text{Масса соли: } 1,2 + 1,5 + 0 = 2,7$$

$$\text{общая раствора: } 2 + 3 + 1 =$$

Ответ: 45%

Задачи на «сухой остаток»

Задача.

В магазин привезли 100 кг клюквы, состоящей на 99% из воды. После длительного хранения и усушки содержание воды в клюкве уменьшилось до 98%. Каким стал новый вес клюквы?

Решение

100кг

клюква	вода
1%	99%
1кг	

клюква	вода
2%	98%

$$1 \text{ кг} \text{ — } 2\%$$

$$X \text{ кг} \text{ — } 100\%$$

$$\Rightarrow x = \frac{100}{2} = 50 \text{ (кг)}$$

Ответ: 50 кг

Задача.

Свежие грибы содержат по массе 90% воды, а сухие содержат 12% воды. Сколько получится сухих грибов из 22 кг свежих грибов?

Решение

22кг	грибы	вода
	10%	90%
	2,2	

$22 \cdot 0,1 = 2,2(\text{кг})$ – масса свежих грибов без воды

грибы	вода
	12%

$$\begin{array}{l} 2,2 \text{ кг} \text{ — } 88\% \\ X \text{ кг} \text{ — } 100\% \end{array} \Rightarrow X = \frac{2,2 \cdot 100}{88} =$$

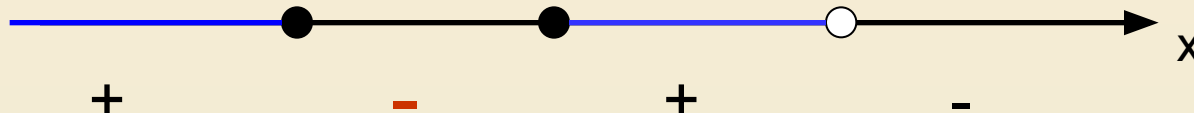
$$100\% - 12\% = 88\% \text{ сухих грибов} = \frac{22 \cdot 10}{88} = \frac{10}{4} = 2,5 \text{ (кг)}$$

Ответ: 2,5 кг

$$\text{Решить неравенство: } \frac{(x-1)(x+8)}{5-x} \geq 0$$

Решение

Нули: 1 ; -8 ; 5



Есть промежуток, которому принадлежит число 0

На этом промежутке установим знак.

$$x \in (-\infty ; -8] \cup [1 ; 5)$$

При $x = 0$ имеем:
$$\frac{(x-1)(x+8)}{5-x} \cong 0$$

Ответ: $(-\infty ; -8] \cup [1 ; 5)$

«Шутливые» законы

Тригонометрические выражения во многих случаях подчиняются трём «законам»:

I: Увидел сумму – делай произведение

II: Увидел произведение – делай сумму

III: Увидел квадрат – понижай степень



Совет: Если не знаешь, с чего начать преобразование тригонометрических выражений (за что «зацепиться»), начни с этих законов.

Решить уравнение: $\sin 2x \cdot \sin 6x = \cos x \cdot \cos 3x$

Решение

увидел произведение – делай сумму :

$$\frac{1}{2} (\cos(2x+6x) + \cos(2x-6x)) = \frac{1}{2} (\cos(x+3x) + \cos(x-3x))$$

$$\cos 2x + \cos 8x = 0$$

увидел сумму – делай произведение :

$$2 \cos \frac{2x+8x}{2} \cdot \cos \frac{2x-8x}{2} = 0 = 0$$

$$\cos 5x = 0 \text{ или } \cos 3x = 0$$

$$5x = \frac{\pi}{2} + \pi k \text{ или } 3x = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$
$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5} \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Решить уравнение: $\cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$

Решение

увидел квадрат – понижай степень :

$$\frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 6x}{2} = 1$$

увидел сумму – делай произведение :

$$2 \cos \frac{4x + 6x}{2} \cdot \cos \frac{4x - 6x}{2} = 0$$

$$\cos 5x = 0 \quad \text{или} \quad \cos(-x) = 0$$

$$5x = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \text{или} \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5} \quad \text{Ответ:} \quad \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}; \quad \frac{\pi}{2} + \pi k$$

Фронтальная работа (взаимная проверка)

Предложите способ решения данного тригонометрического уравнения

Вариант I

- 1) Приведение к квадратному;
- 2) приведение к однородному;
- 3) разложение на множители;
- 4) понижение степени;
- 5) преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

Уравнение	Способы решения				
	1	2	3	4	5
$3\sin^2x + \cos^2x = 1 - \sin x \cos x$					
$4\cos^2x - \cos x - 1 = 0$					
$4\sin^2x + \cos 2x = 1$					
$\cos x + \cos 3x = 0$					
$2\sin x \cos 5x - \cos 5x = 0$					



Вариант II					
Уравнение	Способы решения				
	1	2	3	4	5
$2\sin x \cos x - \sin x = 0$					
$3\cos^2x - \cos 2x = 1$					
$6\sin^2x + 4\sin x \cos x = 1$					
$4\sin^2x + 11\sin x = 3$					
$\sin 3x = \sin 17x$					

Проверяем



Вариант I

Вариант II

	1	2	3	4	5
1		+			
2	+				
3				+	
4					+
5			+		

	1	2	3	4	5
1			+		
2				+	
3		+			
4	+				
5					+

Экспертная работа





Задание 1 для эксперта.

Оцените самостоятельно решение задачи C1.1.

$$\sin \frac{x}{3} = (\sqrt{25-x^2})^2 + x^2 - 25$$

0, 2, 3.

$$\sin \frac{x}{3} = 25 - x^2 + x^2 - 25$$

$$\sqrt{25-x^2} \neq 0$$

$$\sin \frac{x}{3} = 0$$

$$25 - x^2 \geq 0$$

$$\sin x = 3 \cdot 0$$

$$x^2 \geq 25$$

$$\sin x \geq 0 \quad x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$-5 \leq x \leq 5$$



Задание 2 для эксперта.

Оцените самостоятельно решение задачи C1.1.

$$\sin \frac{x}{3} = (\sqrt{25-x^2})^2 + x^2 - 25$$

$$\sin \frac{x}{3} = ((25-x^2)^{\frac{1}{2}})^2 + x^2 - 25$$

$$\sin \frac{x}{3} = 25 - x^2 + x^2 - 25$$

$$\sin \frac{x}{3} = 0$$

$$\frac{x}{3} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 3\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = 3\pi k, k \in \mathbb{Z}$.



Задача С1.1.

Решите уравнение $\sin \frac{x}{3} = (\sqrt{25-x^2})^2 + x^2 - 25$.

Решение.

1) Упростим правую часть уравнения:

$$\sin \frac{x}{3} = (\sqrt{25-x^2})^2 + x^2 - 25 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{x}{3} = 25 - x^2 + x^2 - 25 \\ 25 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{x}{3} = 0 \\ -5 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

2) Решим полученную систему:

$$\begin{cases} \sin \frac{x}{3} = 0 \\ -5 \leq x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ -5 \leq x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\pi n \\ -5 \leq x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: 0.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С1.1
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) преобразование уравнения в систему, равносильную данному уравнению; 2) решение системы. Все тождественные преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
1	Приведена верная последовательность всех шагов решения. В шаге 2) решения допущены вычислительная ошибка или вычислительная ошибка и описка, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате этого может быть получен неверный ответ.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1 и 2 балла.



Метод декомпозиции

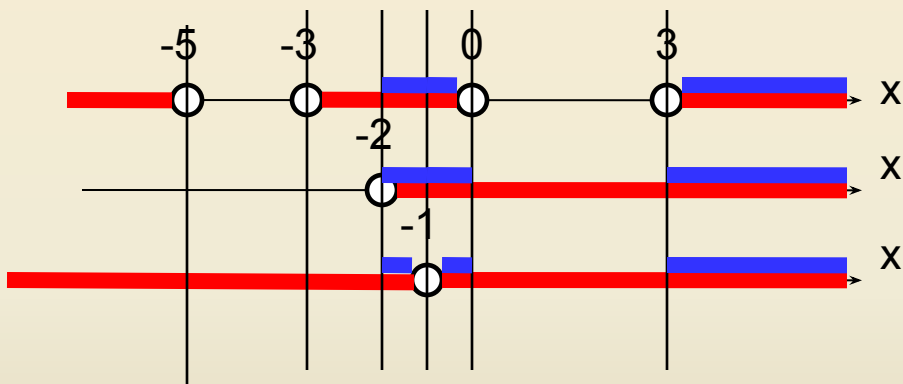
Исходное неравенство	О.Д.З.	Декомпозиция неравенства (равносильное исходному на О.Д.З.)
$a^{f(x)} - a^{g(x)} \vee 0$	$\left\{ \begin{array}{l} a > 0, a \neq 1 \\ D(f) \\ D(g) \end{array} \right.$	$(a - 1)(f(x) - g(x)) \vee 0$
$\log_a f(x) - \log_a g(x) \vee 0$	$\left\{ \begin{array}{l} a > 0, a \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{array} \right.$	$(a - 1)(f(x) - g(x)) \vee 0$

Решить неравенство

$$\log_{x+2} \frac{x^2-9}{x^2+5x} \leq \log_{x+2} 1$$

Решение.

1) О.Д.З. $\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2-9}{x^2+5x} > 0 \\ x+2 > 0 \\ x+2 \neq 1 \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{(x-3)(x+3)}{x(x+5)} > 0 \\ x > -2 \\ x \neq -1 \end{array} \right.$

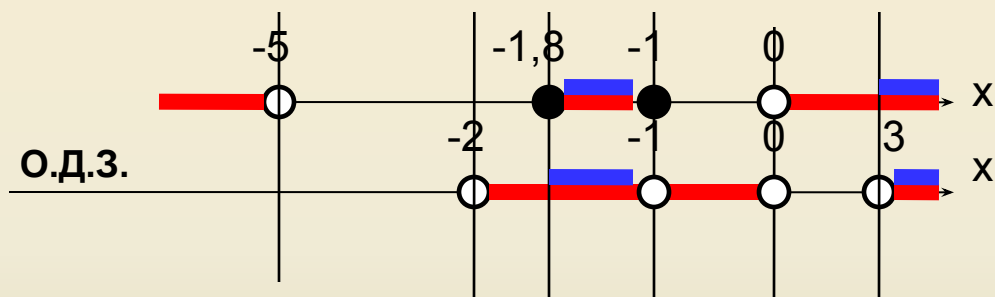


$$x \in (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (3; \infty)$$

$$2) \log_{x+2} \frac{x^2-9}{x^2+5x} \leq \log_{x+2} 1 \quad \text{О.Д.3} \iff \log_{x+2} \frac{x^2-9}{x^2+5x} - \log_{x+2} 1 \leq 0 \quad \text{О.Д.3}$$

$$\text{О.Д.3} \iff (x+2-1) \left(\frac{x^2-9}{x^2+5x} - 1 \right) \leq 0 \quad \text{О.Д.3} \iff \frac{(x+1)(x^2-9-x^2-5x)}{x(x+5)} \leq 0 \quad \text{О.Д.3}$$

$$\text{О.Д.3} \iff \frac{(x+1)(-5x-9)}{x(x+5)} \leq 0 \quad \text{О.Д.3} \iff \frac{(x+1)(5x+9)}{x(x+5)} \geq 0$$



$$x \in [-1,8 ; -1) \cup (3 ; \infty)$$

$$\text{Ответ: } [-1,8 ; -1) \cup (3 ; \infty)$$

Решить неравенство

$$\frac{x^2+3x-2}{4} - (0,5) \frac{2x^2+2x-1}{5^x-1} \leq 0$$

Решение.

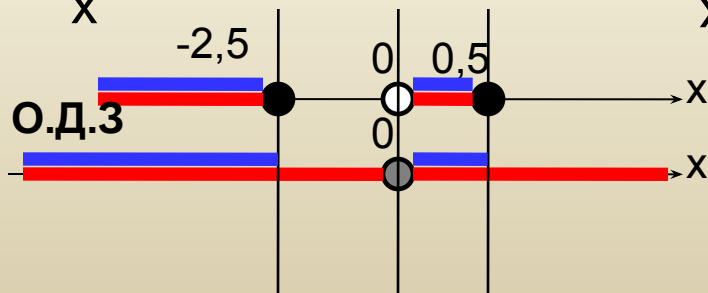
1) О.Д.З. $5^x - 1 \neq 0, x \neq 0$

2) На О.Д.З. имеем: $\frac{2x^2+6x-4}{5^x-5^0} - \frac{1-2x-2x^2}{2} \leq 0$

$$\frac{(2-1)(2x^2+6x-4-(1-2x-2x^2))}{(5-1)(x-0)} \leq 0$$

$$\frac{2x^2+6x-4-1+2x+2x^2}{x} \leq 0 \quad \frac{4x^2+8x-5}{x} \leq 0$$

$$\frac{4(x-0,5)(x+2,5)}{x} \leq 0$$



$$x \in (-\infty; -2,5] \cup (0; 0,5]$$

К ЭКЗАМЕНУ СЛЕДУЕТ
ГОТОВИТЬСЯ **ОЧЕНЬ**
СЕРЬЕЗНО !!!

