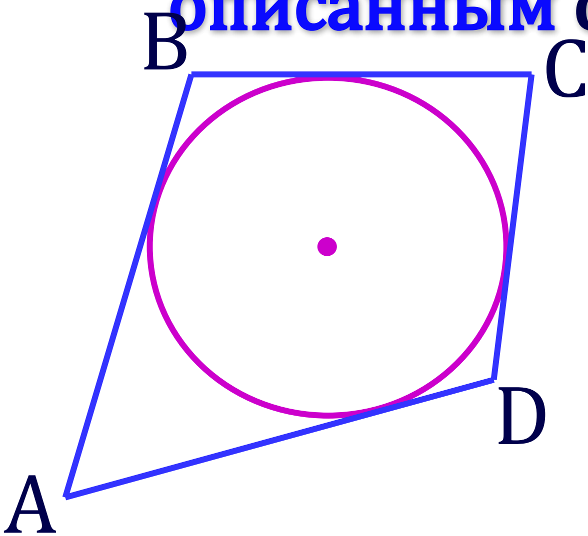
Вписанная и описанная окружности

8 класс

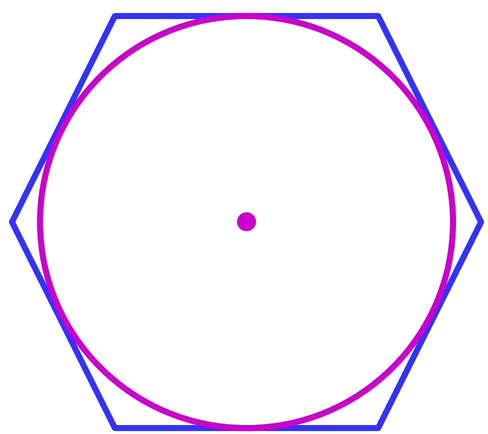
Мухина Г.Г. – учитель математики МАОУ многопрофильного лицея №20 города Ульяновска.

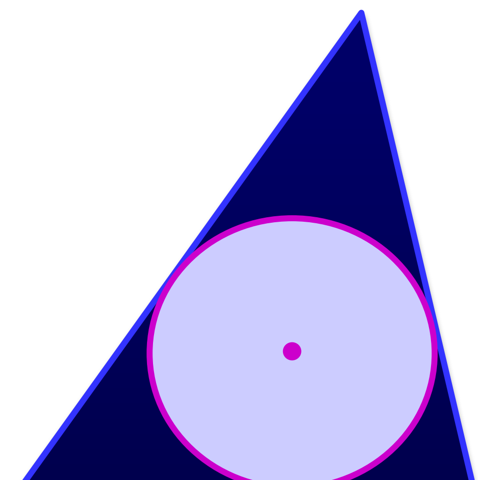
Вписанная окружность

Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется вписанной в многоугольник, а многоугольник – описанным около этой окружности.

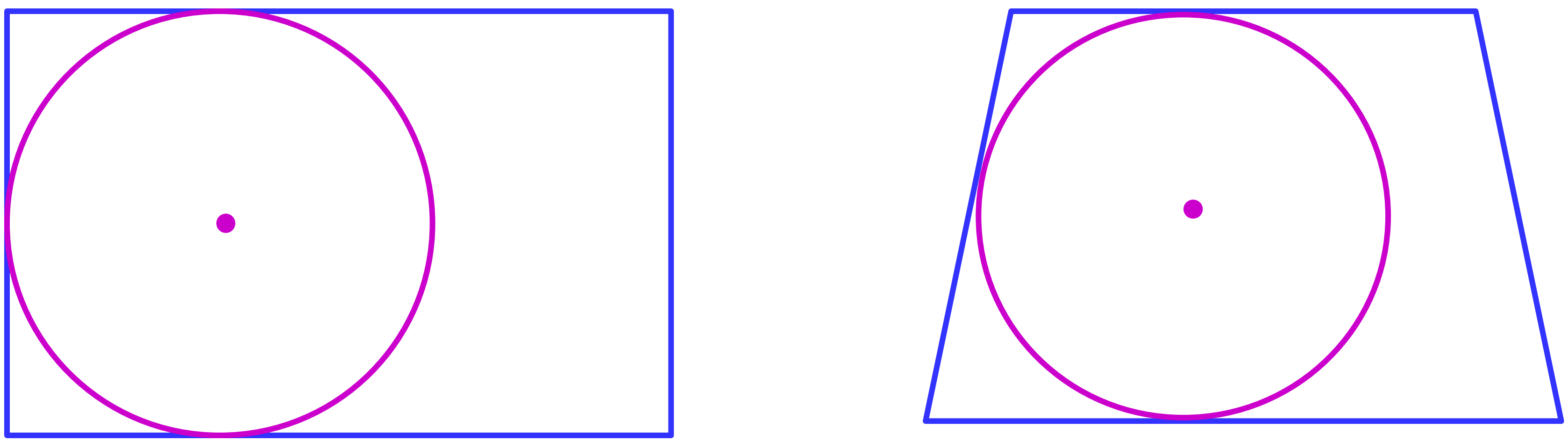


окр.(O;r) вписана в ABCD



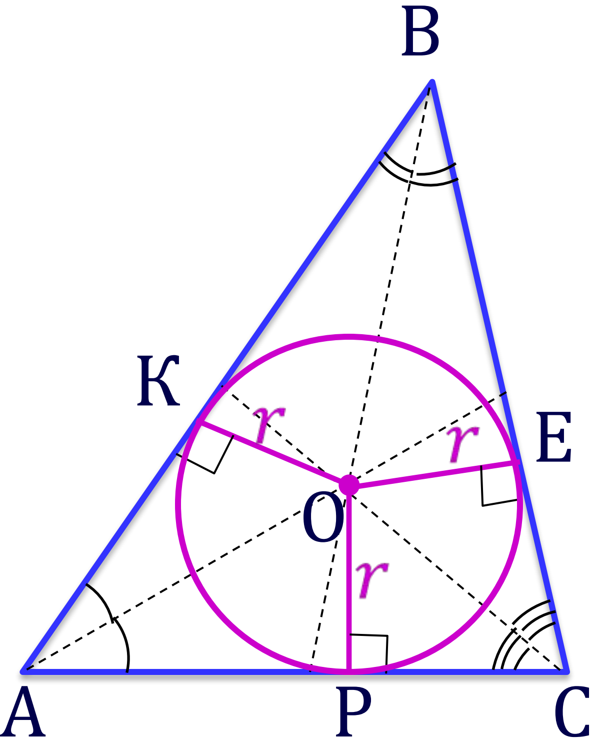


Не во всякий многоугольник можно вписать окружность.



ТЕОРЕМА

В любой треугольник можно вписать окружность и притом только одну.



Дано: $\triangle ABC$

Доказать: существует окр.(O;r), вписанная в треугольник

Доказательство:

Проведём биссектрисы, которые пересекаются в одной точке – О.

$OK = OE = OP$, где $OK \perp AB$, $OE \perp BC$, $OP \perp AC$, по свойству биссектрис.

О равноудалена от сторон $\triangle ABC$.

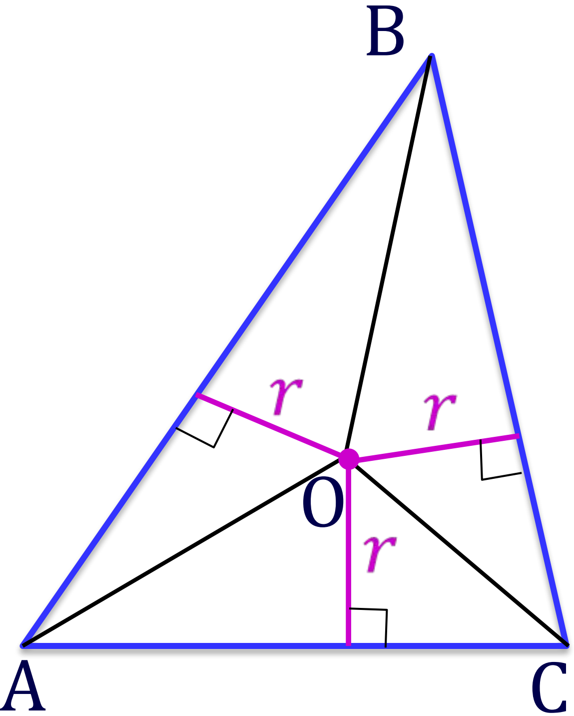
О – центр окружности, ОК, ОЕ, ОР радиусы.

Значит, окружность вписана в $\triangle ABC$.

Центр вписанной окружности - точка пересечения биссектрис.

Площадь треугольника

Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности.



$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} =$$

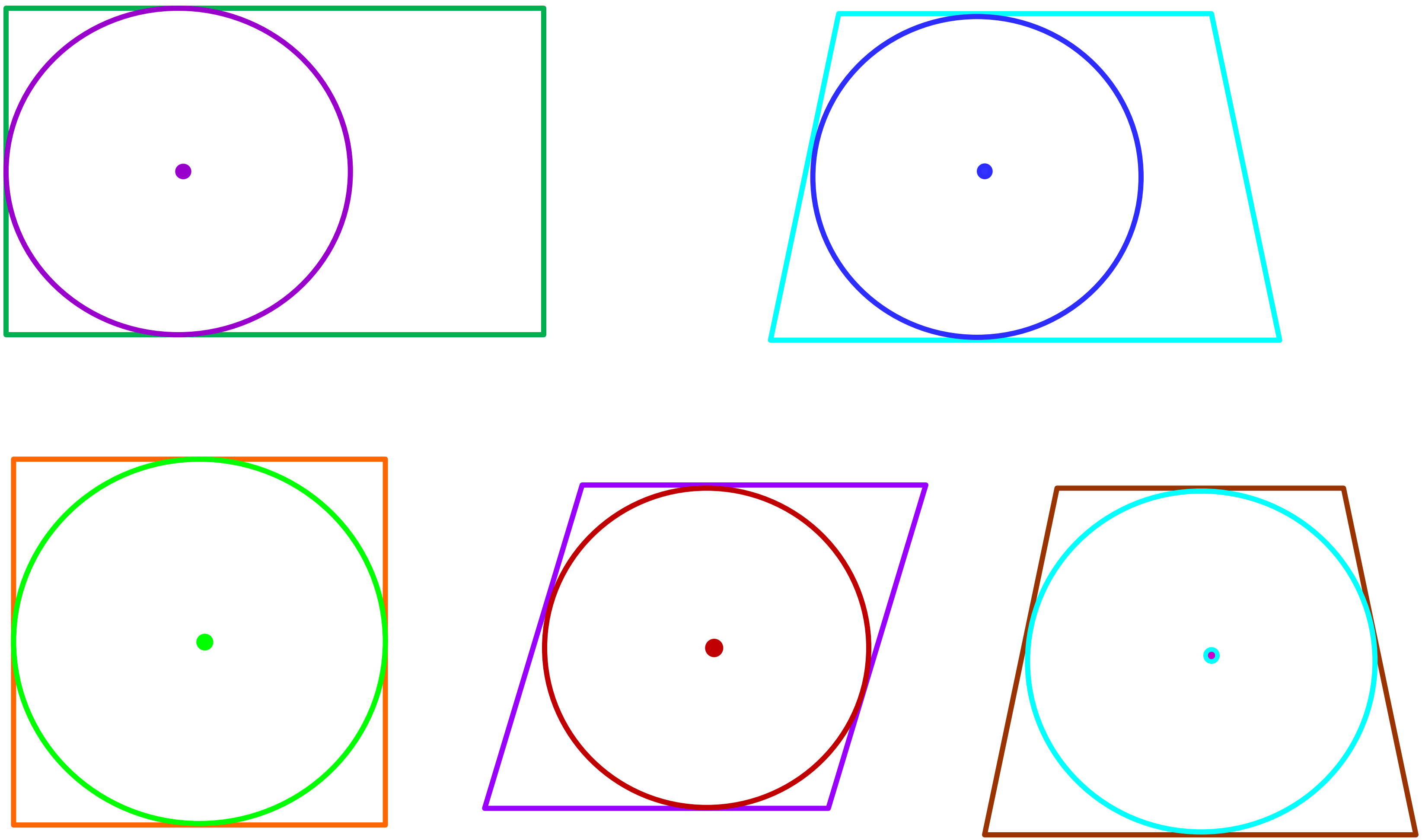
$$= \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}BC \cdot r + \frac{1}{2}AC \cdot r =$$

$$= \frac{AB + BC + AC}{2} \cdot r = p \cdot r$$

$$S_{ABC} = p \cdot r$$

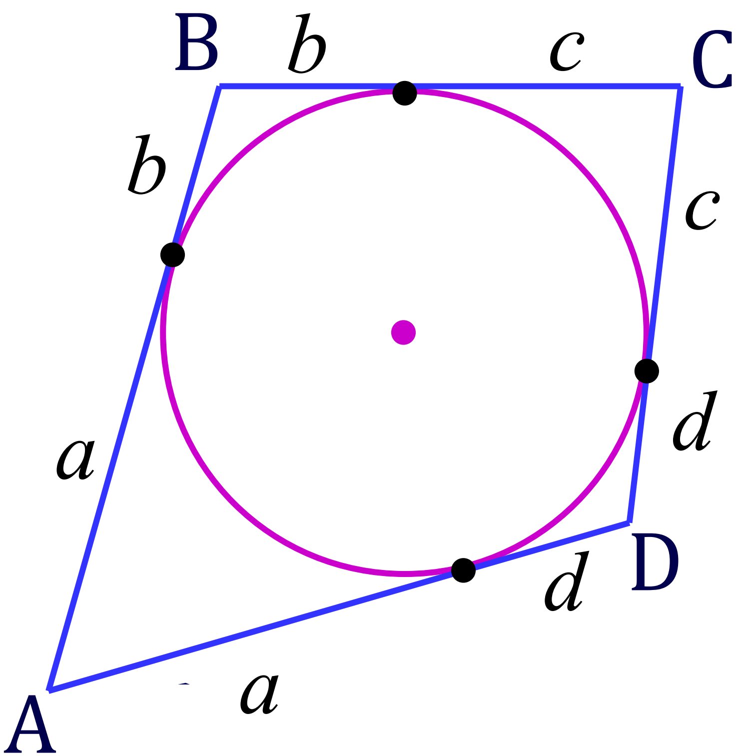
$$r = \frac{S}{p}$$

Не во всякий четырёхугольник можно вписать окружность.



ТЕОРЕМА

В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон равны.



Дано: окр.(O;r) вписана в ABCD

Доказать: AB + CD = BC + AD

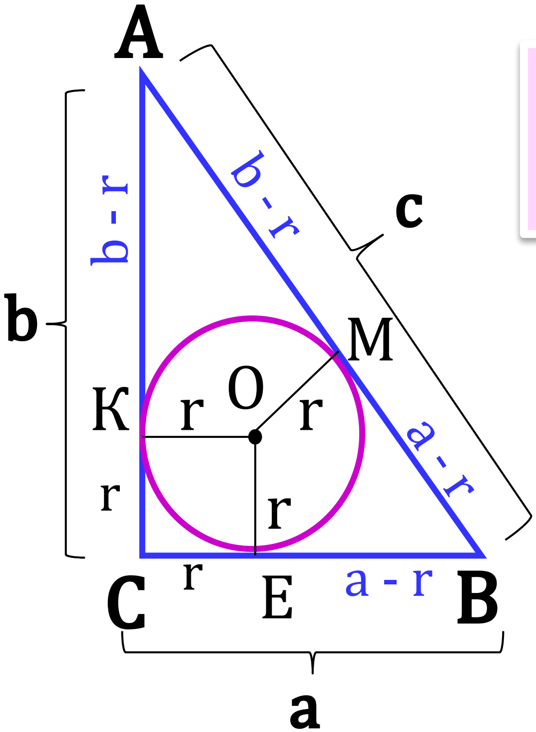
Доказательство: обозначим равные отрезки касательных буквами: *a, b, c, d*

$$\left.\begin{aligned} AB + CD &= a + b + c + d \\ BC + AD &= a + b + c + d \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

AB + CD = BC + AD

Доказательство обратной теоремы см. № 724 в учебнике.

Формула для радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник



$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

a, b- **катеты, с - гипотенуза**

Доказательство:

АС, ВС, АВ – касательные и

СКОЕ – квадрат, значит, СК = СЕ = r

По свойству касательных:

ВЕ = ВМ = a - r

АК = АМ = b - r

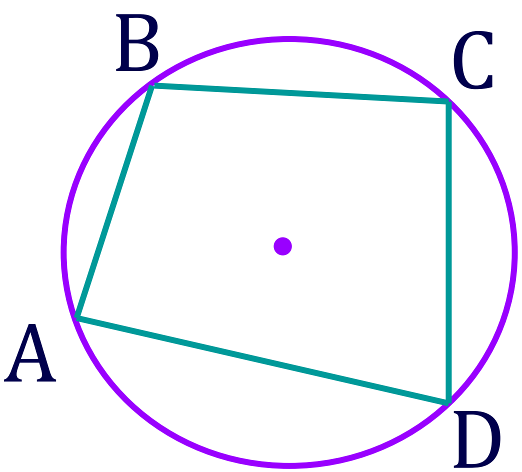
АВ = АМ + ВМ

c = b – r + a - r

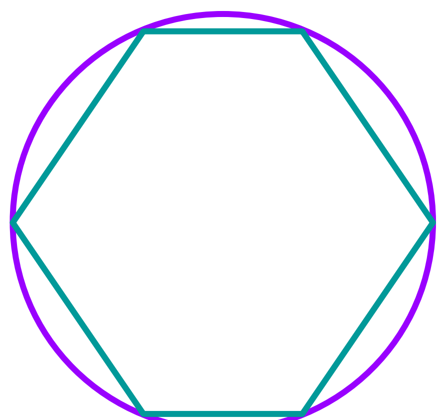
2r = a + b - c $\Rightarrow r = \dfrac{a+b-c}{2}$

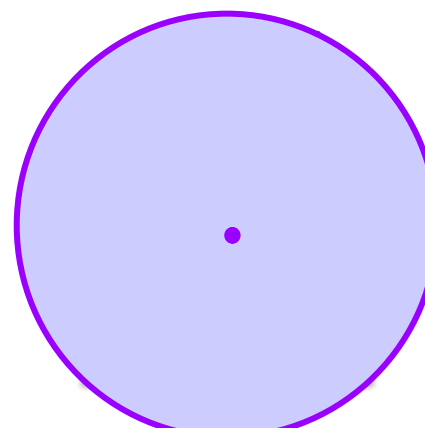
Описанная окружность

Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется описанной около многоугольника, а многоугольник – вписанным в эту окружность.

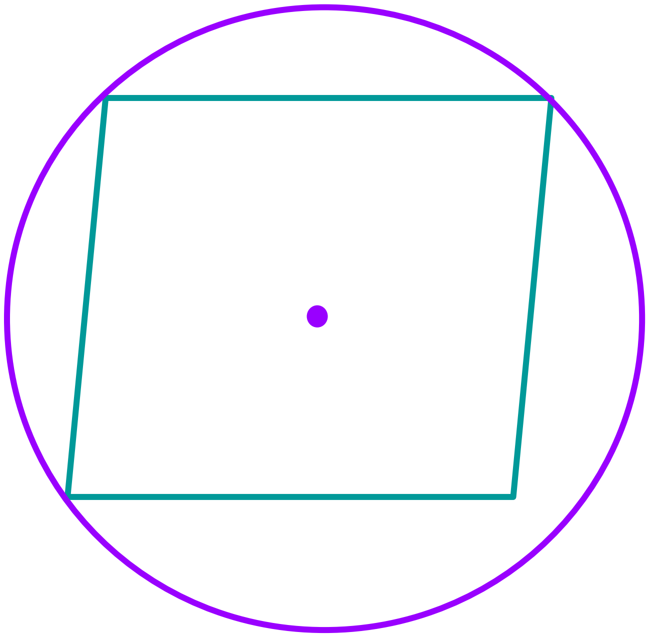


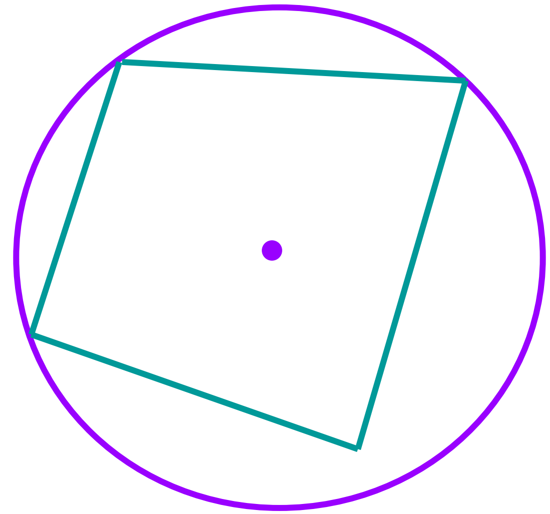
окр.(O;R) описана около ABCD





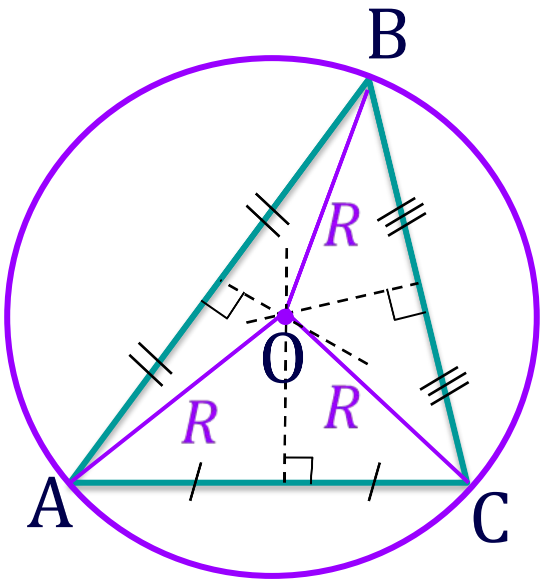
Не около всякого многоугольника можно описать окружность.





ТЕОРЕМА

Около любого треугольника можно описать окружность и притом только одну.



Дано: △ ABC

Доказать: существует окр.(O;R), описанная около треугольника

Доказательство:

Проведём серединные перпендикуляры

OA = OB = OC, по свойству серединных перпендикуляров.

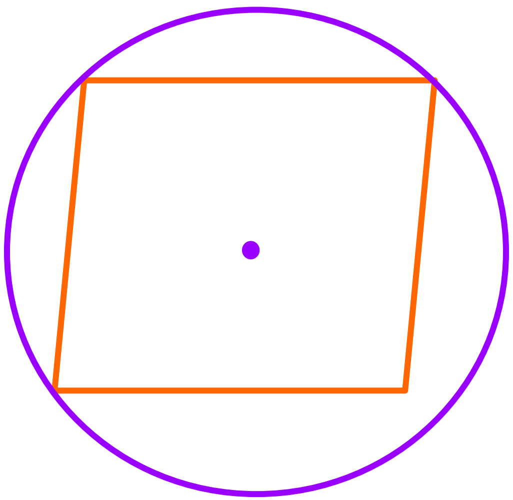
O равноудалена от вершин △ ABC.

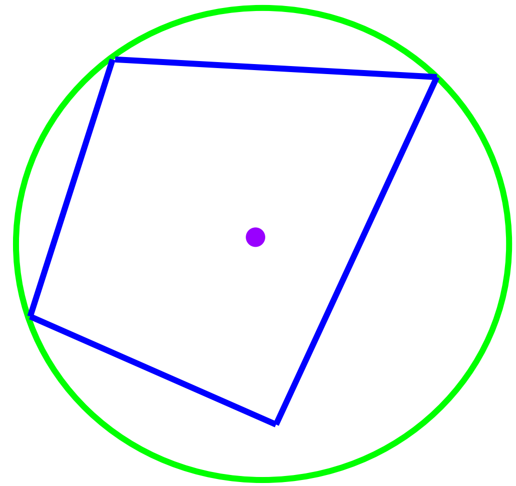
O – центр окружности, OA, OB, OC – радиусы.

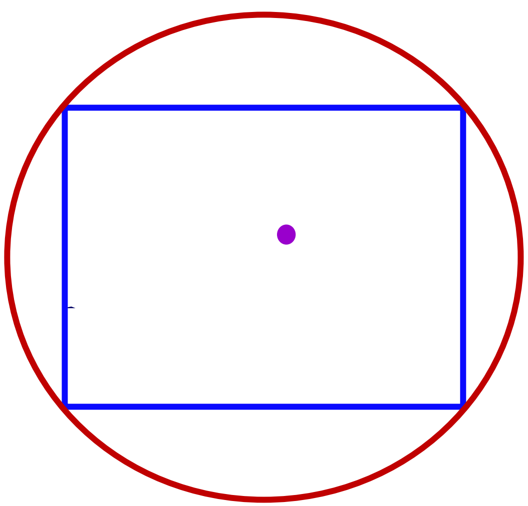
Значит, окружность описана около △ ABC.

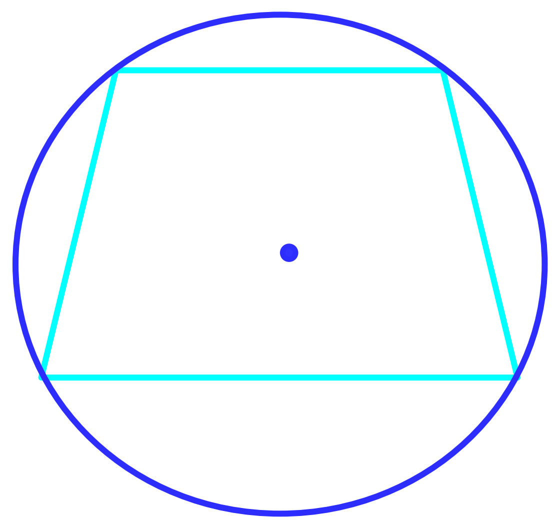
Центр описанной окружности - точка пересечения серединных перпендикуляров.

Не около всякого четырёхугольника можно описать окружность.



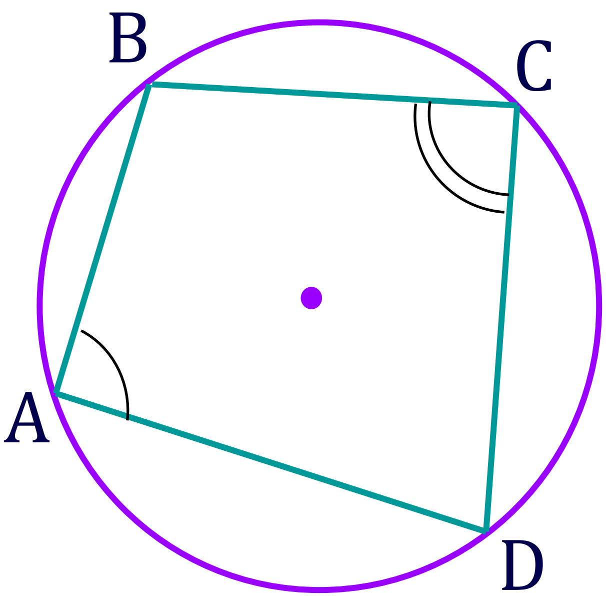






ТЕОРЕМА

Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных углов равны 180^0.



Дано: окр.(O;R) описанна около четырехугольник ABCD

Доказать: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^0$

Доказательство:

$\angle A$ и $\angle C$ вписанные $\Rightarrow$

$$\angle A = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DCB}, \angle C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BAD} \Rightarrow$$

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BCD} + \overset{\frown}{BAD}\right) = \frac{1}{2} \cdot 360^0 = 180^0$$

Доказательство обратной теоремы см. № 729 в учебнике.