Муниципальное общеобразовательное бюджетное учреждение
«Красномайская средняя общеобразовательная школа».

Решение заданий ЕГЭ.

С – 5.

Учитель первой квалификационной категории
Лысак Ольга Викторовна

№1. *Найдите все значения **а**, при каждом из которых система*

$$\begin{cases} \dfrac{x - ax - a}{x - 2 + 2a} \ge 0 \\ x - 8 > ax \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение: Рассмотрим второе неравенство системы

$x - 8 > ax$

$x - ax > 8$

$(1 - a) \cdot x > 8$

Произведение должно быть положительным.

1. Если ***а*** = 1, то неравенство, а значит и система не имеет решений. (0 > 8)
2. Если ***а*** < 1, то решение неравенства – луч $x > \dfrac{8}{1-a}$
3. Если ***а*** > 1, то решение неравенства – луч $x < \dfrac{8}{1-a}$

При a ≠ 1 первое неравенство системы

$$\frac{x - ax - a}{x - 2 + 2a} \geq 0$$

принимает вид:

$$\frac{x(1 - a) - a}{x - 2(1 - a)} \geq 0$$

$$\frac{(1 - a)(x - \frac{a}{1 - a})}{x - 2(1 - a)} \geq 0$$

Или при условии $x \neq 2(1 - a)$

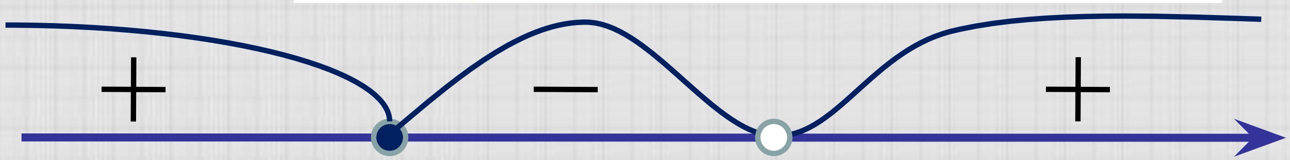
$$(1 - a)\left(x - \frac{a}{1 - a}\right)(x - 2(1 - a)) \geq 0$$

Рассмотрим решение системы в которую преобразовалось 1 неравенство.

$$\begin{cases} (1-a)\left(x-\dfrac{a}{1-a}\right)\left(x-2(1-a)\right) \geq 0 \\ x \neq 2(1-a) \end{cases}$$

Если ***a*** < 1, то получаем: 1− ***a*** > 0. тогда знак неравенства зависит от знаков 2 и 3 множителей. Из которых получаем:

$$x_1 = \frac{a}{1-a} \qquad x_2 = 2(1-a)$$



$\dfrac{a}{1-a}$ $2(1-a)$

Решением систем том слу аем:

$$x \leq \frac{a}{1-a} \quad \text{и} \quad x > 2(1-a)$$

Если ***а*** > 1, то получаем: $1 - \boldsymbol{a} < 0$, значит произведение 2 и 3 множителей должно быть отрицательным.

$$(1-a)\left(x-\frac{a}{1-a}\right)(x-2(1-a)) \geq 0$$

$$\left(x-\frac{a}{1-a}\right)(x-2(1-a)) \leq 0$$

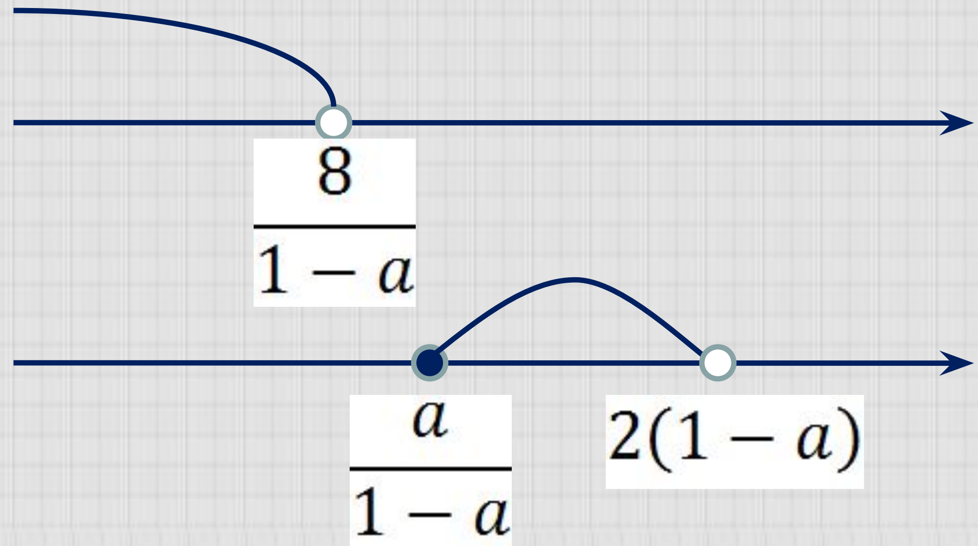
Решение в этом случае – полуинтервал :

$$\left[\frac{a}{1-a}\,;\ 2(1-a)\ \right)$$

Отметим, что $x \neq 2(1-a)$.

Для того , чтобы система не имела решений, при $a \neq 1$, необходимо и достаточно найти решение системы неравенств.

$$\begin{cases} a \geq 1 \\ \dfrac{8}{1-a} \leq \dfrac{a}{1-a} \\ \dfrac{8}{1-a} \leq 2(1-a) \end{cases}$$



$$\begin{cases} a \geq 1 \\ 8 - 8a \leq a - a^2 \\ 8 \geq 2(1-a)^2 \end{cases} \begin{cases} a \geq 1 \\ a^2 - 9a + 8 \leq 0 \\ a^2 - 2a - 3 \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 \leq a \leq 8 \\ (1-a)^2 \leq 4 \end{cases}$$

Ответ: $1 \leq a \leq 3$

№ 2. *Найти все значения a, при каждом из которых график функции* $f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$ *пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.*

Решение.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3|$$

График функции *f(x)* пересекает ось абсцисс в трёх или более точках, если уравнение *g(x) = a* имеет более двух различных корней.

Построим график функции *g(x)* .

$$|x^2 + 2x - 3| = \left[\begin{array}{ll} x^2 + 2x - 3, \text{если} & x \le -3 \;\; x \ge 1 \\ -(x^2 + 2x - 3), \text{если} & -3 < x < 1 \end{array}\right.$$

Если $x \leq -3$ или $x \geq 1$, то $g(x) = -2x + 3$

Если $-3 < x < 1$, то $g(x) = 2x^2 + 2x - 3$

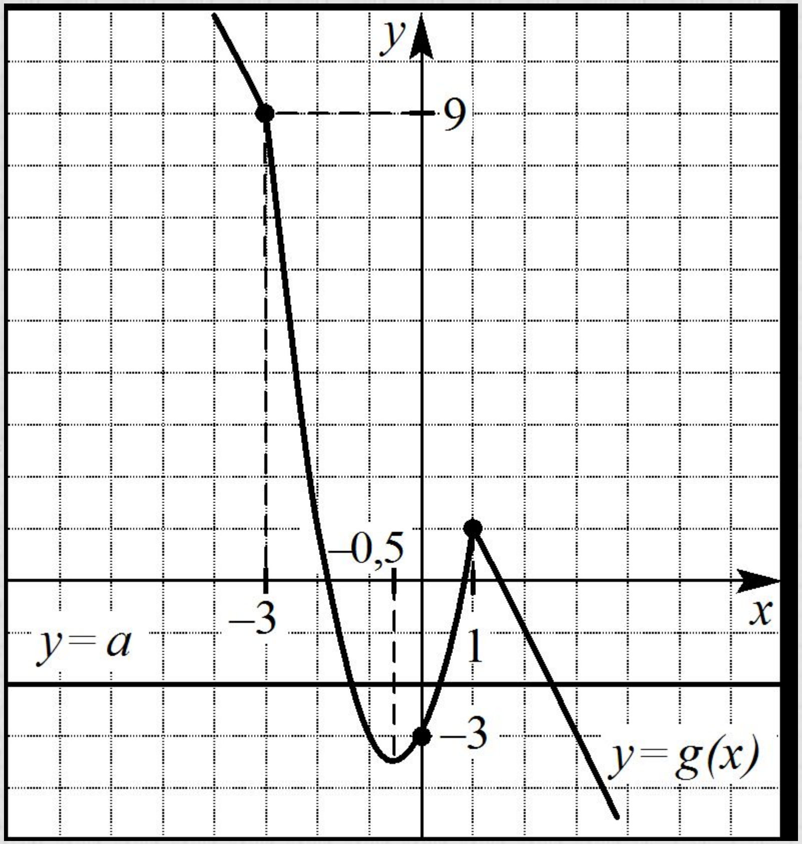


График функции g(x) состоит из двух лучей и дуги параболы.

На рисунке видно, что уравнение *g(x) = a* имеет более двух корней, только если

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) < a < g(1).$$

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = -3.5\,; \quad g(1) = 1$$

Ответ: $-3{,}5 < a < 1.$

№ 3. *Найдите все значения а, при каждом из которых решения неравенства* $|2x - a| + 1 \le |x + 3|$ *образуют отрезок длины 1.*

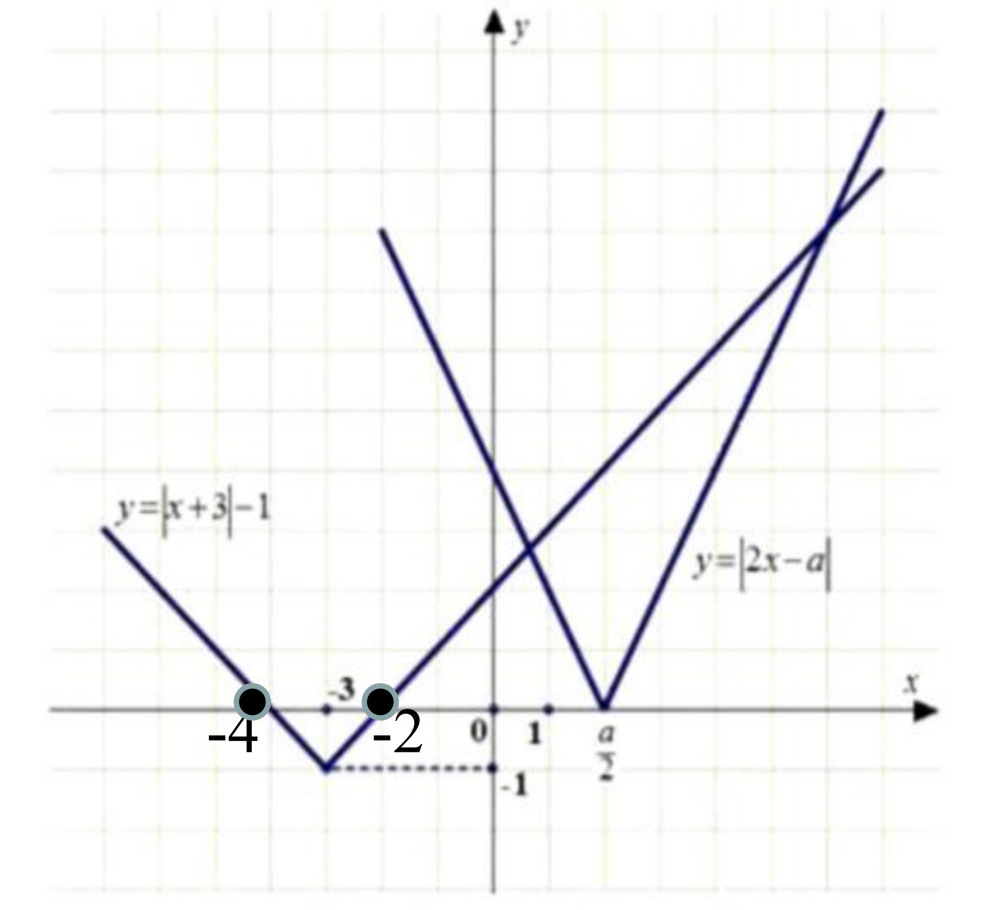
Решение.

Перенесём 1: $|2x - a| \le |x + 3| - 1$

Построим схематично графики функций

$y = |2x - a|$ и

$y = |x + 3| - 1$



На рисунке видно, что неравенство $|2x - a| + 1 \le |x + 3|$ имеет решения только при $\frac{a}{2} \le -4$ или $\frac{a}{2} \ge -2$.

1 случай

$$|x + 3| = \begin{cases} x + 3, \text{если } x \ge -3 \\ -x - 3, \text{если } x < -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \le -8 \\ |2x - a| \le -x - 3 - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a \le -8 \\ 2x - a \le -x - 4 \\ 2x - a \ge x + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} a \le -8 \\ x \le \frac{a - 4}{3} \\ x \ge a + 4 \end{cases}$$

Решения образуют отрезок длины 1, если

$$\frac{a - 4}{3} - (a + 4) = 1 \qquad a = -\frac{19}{2} = -9.5$$

2 случай $|2x-a|+1 \le |x+3|$

$$\begin{cases} a \ge -4 \\ |2x-a| \le x+2 \end{cases} \quad \begin{cases} a \ge -4 \\ 2x-a \le x+2 \\ 2x-a \ge -x-2 \end{cases} \quad \begin{cases} a \ge -4 \\ x \le a+2 \\ x \ge \dfrac{a-2}{3} \end{cases}$$

$$\frac{a-2}{3} \le x \le a+2$$

Решения образуют отрезок длины 1, если

$$a+2-\frac{a-2}{3}=1$$

$$3a+6-a+2=3$$

$$2a=-5$$

$$a=-2.5$$

Ответ: $a = -9{,}5; \quad a = -2{,}5$