Дискретные случайные величины

Акишева Ю.Ю
Еркебаева З.С.
Нуралиева Ж.Н.
Группа Т092

Дискретные случайные величины

- Рассмотрим случайную величину * , возможные значения которой образуют конечную или бесконечную последовательность чисел x1, x2, ..., xn, ... Пусть задана функция p(x), значение которой в каждой точке x=xi (i=1,2, ...) равно вероятности того, что величина примет значение xi

$$p(x_i) = P(\xi = x_i)$$

- Такая случайная величина называется дискретной (прерывной). Функция p(x) называется законом распределения вероятностей случайной величины, или кратко, законом распределения. Эта функция определена в точках последовательности x1, x2, ..., xn, ... Так как в каждом из испытаний случайная величина принимает всегда какое-либо значение из области ее изменения, то

$$p(x_1)+p(x_2)+\ldots+p(x_n)+\ldots=1$$

- **Пример 1.** Случайная величина — число очков, выпадающих при однократном бросании игральной кости. Возможные значения — числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6. При этом вероятность того, что примет любое из этих значений, одна и та же и равна 1/6. Какой будет закон распределения ? (Решение)

- **Пример 2**. Пусть случайная величина - число наступления события А при одном испытании, причем Р(А)=р. Множество возможных значений состоит из 2-х чисел 0 и 1: =0, если событие А не произошло, и =1, если событие А произошло. Таким образом,

$$p(0) = P(\eta = 0) = P(\overline{A}) = 1 - p = q$$

$$p(1) = P(\eta = 1) = P(A) = p$$

- Предположим, что производится n независимых испытаний, в результате каждого из которых может наступить или не наступить событие A. Пусть вероятность наступления события A при каждом испытании равна p. Рассмотрим случайную величину — число наступлений события A при n независимых испытаниях. Область изменения состоит из всех целых чисел от 0 до n включительно. Закон распределения вероятностей p(m) определяется формулой Бернулли (13'):

$$p(m) = P(\xi = m) = P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$$

- Закон распределения вероятностей по формуле Бернулли часто называют биномиальным, так как Pn(m) представляет собой m-й член разложения бинома .
- Пусть случайная величина может принимать любое целое неотрицательное значение, причем

$$p(k)=P(\xi=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots)$$

где - λ некоторая положительная постоянная. В этом случае говорят, что случайная величина распределена по закону Пуассона, Заметим, что при k=0 следует положить 0!=1.

- Пример 3. На завод прибыла партия деталей в количестве 1000 шт. Вероятность того, что деталь окажется бракованной, равна 0,001. Какова вероятность того, что среди прибывших деталей будет 5 бракованных? (Решение)

- Распределение Пуассона часто встречается и в других задачах. Так, например, если телефонистка в среднем за один час получает N вызовов, то, как можно показать, вероятность P(k) того, что в течение одной минуты она получит k вызовов, выражается формулой Пуассона, если положить $\lambda = N/60$

$$P(k) = \frac{1}{k!}\left(\frac{N}{60}\right)^k e^{\left(-\frac{N}{60}\right)}$$

- Если возможные значения случайной величины ξ образуют конечную последовательность x1, x2, ..., xn, то закон распределения вероятностей случайной величины задают в виде следующей таблицы, в которой

$$p_i = P(\xi = x_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

- По горизонтальной оси будем откладывать возможные значения случайной величины ξ, а по вертикальной оси - значения функции $p(x_i) = P(\xi = x_i)$ График функции p(x) изображен на рис. 2. Если соединить точки этого графика прямолинейными отрезками, то получится фигура, которая называется многоугольником распределения.

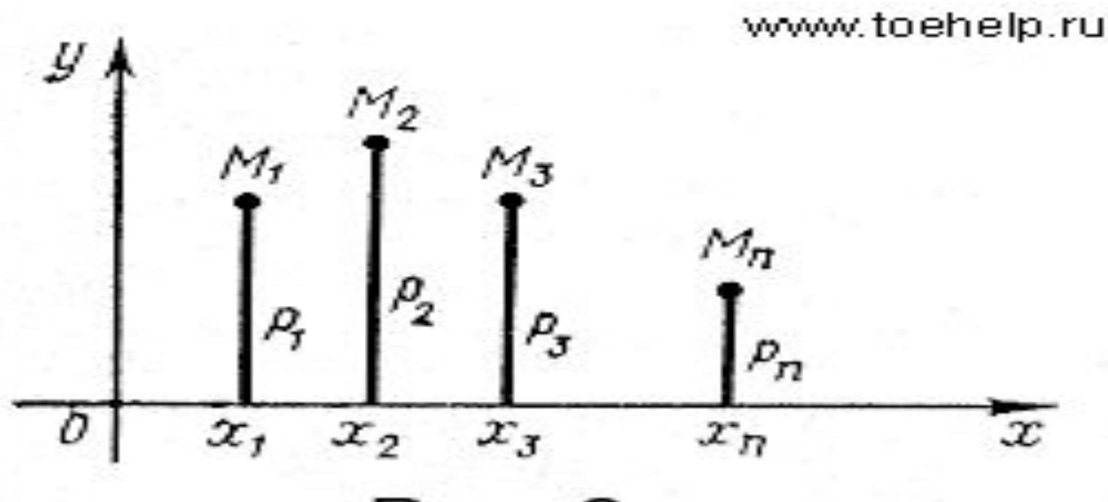

Рис. 2.

- Вероятности p(xi) вычислены по формуле Бернулли при n=10. Для x>6 они практически равны нулю. График функции p(x) изображен на рис. 3.

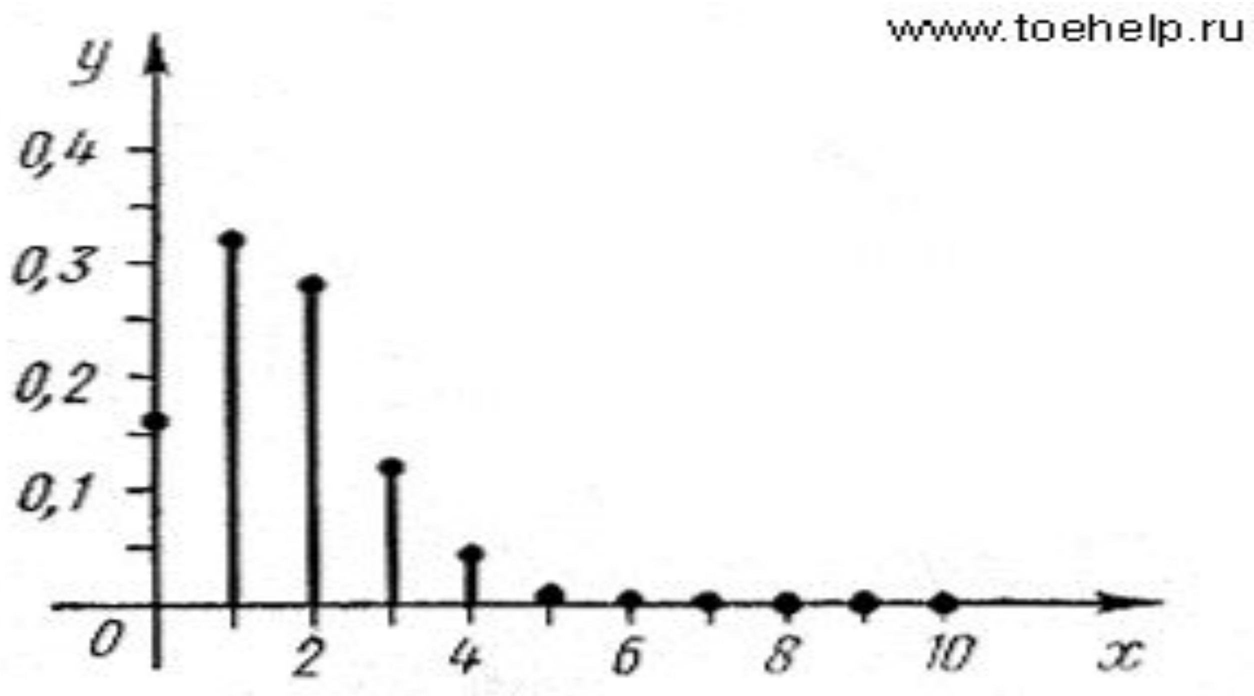

Рис. 3.