Функции распределения случайной величины плотность распределения.

Акишева Ю.Ю.
Еркебаева З.С.
Нуралиева Ж.Н.

Функция распределения случайной величины

Функция распределения вероятностей случайной величины X называется числовая функция F(x), определяющая вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньше x:

$$\mathbf{F(x)=P(X<x)}$$

где любое x- любое действительное число.

Иногда функцию распределения F(x) называют интегральной функцией распределения.

Свойства функции распределения

Значения функции распределения **F(x)** принадлежат отрезку [0;1]:
$0 \le \mathbf{F(x)} \le 1$

Функции распределения F(x) есть неубывающая функция, т.е.
$F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 > x_1$

Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (a,b), равна приращению интегральной функции на этом интервале: $P(a<X<b)=F(b)-F(a)$

Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу (a,b), то $F(x)=0$ при $x \le a$; $F(x)=1$ при $x \ge b$

Для функции распределения справедливы следующие предельные соотношения:

$\lim_{x \to \infty} F(x)=0$ $\qquad$ $\lim_{x \to \infty} F(x)=0$

Функция распределения существует как для непрерывных, так и для дискретных случайных величин. Она полностью характеризует случайную величину и является одной из форм закона распределения.

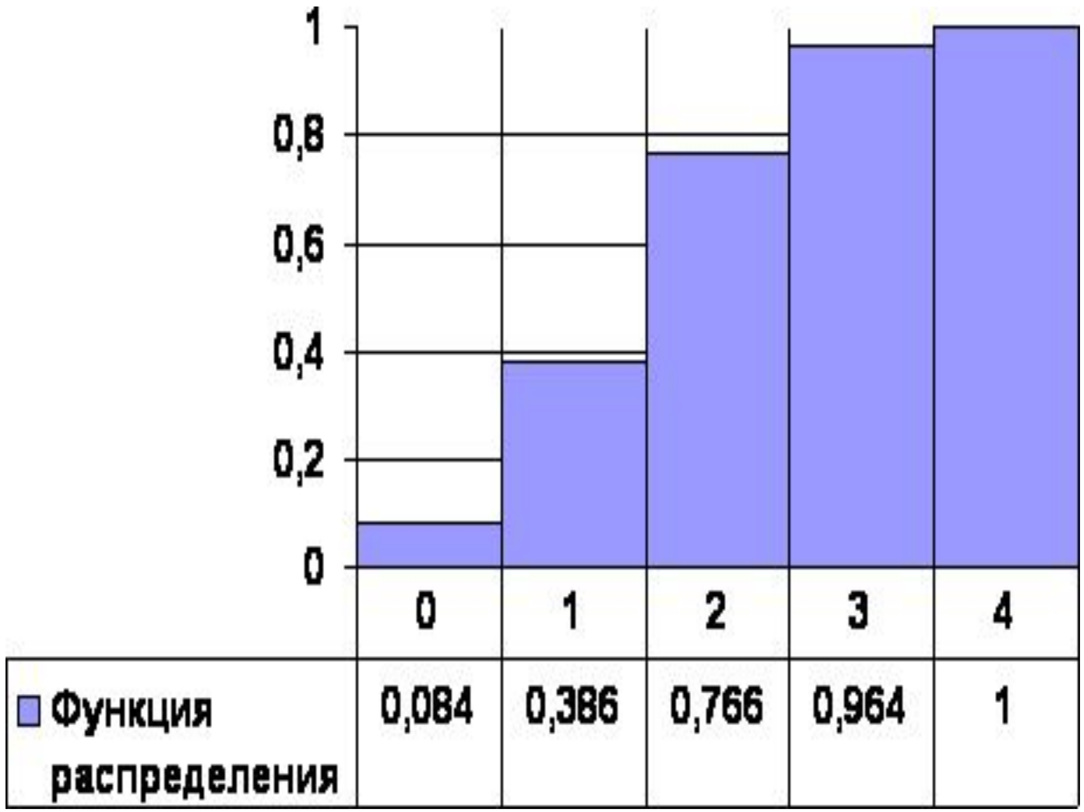
Для дискретной случайной величины функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$

Знак неравенства под знаком суммы показывает, что суммирование распространяется на те возможные значения случайной величины, которые меньше аргумента x.

Функция распределения дискретной случайной величины X разрывна и возрастает скачками при переходе через каждое значение x_i

Пример:


1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
1
2
3
4
Функция распределения
0,084
0,386
0,766
0,964
1

Плотность распределения:

Функция распределения полностью характеризует случайную величину, однако, имеет один недостаток. По функции распределения трудно судить о характере распределения случайной величины в небольшой окрестности той или иной точки числовой оси

Определение. ***Плотностью распределения*** *вероятностей непрерывной случайной величины X называется функция f(x) – первая производная от функции распределения F(x).*

$$f(x) = F'(x).$$

Плотность распределения также называют дифференциальной функцией. Для описания дискретной случайной величины плотность распределения неприемлема.

Смысл плотности распределения состоит в том, что она показывает как часто появляется случайная величина X в некоторой окрестности точки x при повторении опытов.

После введения функций распределения и плотности распределения можно дать следующее определение непрерывной случайной величины.

<u>Определение.</u> ***Случайная величина X*** *называется непрерывной, если ее функция распределения F(x) непрерывна на всей оси OX, а плотность распределения f(x) существует везде, за исключением(может быть, конечного числа точек.*

Зная плотность распределения, можно вычислить вероятность того, что некоторая случайная величина X примет значение, принадлежащее заданному интервалу.

<u>Теорема</u>. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Геометрически это означа... ь того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью OX, кривой распределения f(x) и прямыми x=a и x=b.

Функция распределения может быть легко найдена, если известна плотность распределения, по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Свойства плотности распределения:

Плотность распределения – неотрицательная функция.

$$f(x) \geq 0$$

Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от - ¥ до ¥ равен единице

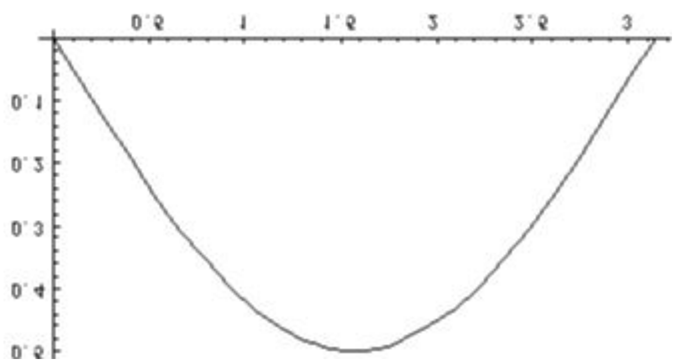
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Пример. Случайная величина подчинена закону распределения с плотностью:

$$f(x)=\begin{cases} a\sin x, & \text{при} \quad 0\le x\le \pi \\ 0, & \text{при} \quad x<0 \quad \text{или} \quad x>\pi \end{cases}$$

Требуется найти коэффициент а, построить график функции плотности распределения, определить вероятность того, что случайная величина попадет в интервал от 0 до $\frac{\pi}{4}$

Построим график плотности распределения:



Для нахождения коэффициента а воспользуемся свойством $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} a\sin xdx + \int_{\pi}^{\infty} 0dx = a\int_{0}^{\pi} \sin xdx = -a\cos x\Big|_{0}^{\pi} = 2a = 1;$$

$$a = \frac{1}{2}.$$