ГОУ ВПО «РОССИЙСКАЯ ТАМОЖЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

Кафедра таможенной статистики

Формула полной вероятности. Формула Байеса. Формула Бернулли

Выполнили: студенты гр. Т092
Акишева Ю.Ю.
Еркебаева З.С.
Нуралиева Ж.Н.

2010г.

Формула полной вероятности

Пусть некоторое событие A может произойти вместе с одним из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots H_n$, составляющих полную группу событий. Пусть известны вероятности этих событий P(H_1), P(H_2), … P(H_n) и условные вероятности наступления события A при наступлении события H_i P(A/H_1),P(A/H_2),…P(A/H_n).

Теорема

Вероятность события A, которое может произойти вместе с одним из событий $H_1, H_2, \ldots H_n$, равна сумме парных произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие им условные вероятности наступления события A.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A / H_i)$$

∆Доказательство

Т.к. события $H_1, H_2, \ldots H_n$ образуют полную группу событий, то событие А можно представить в виде следующей суммы:

$$A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n = \sum_{i=1}^{n} AH_i$$

Т.к. события $H_1, H_2, \ldots H_n$ несовместны, то и события AH_i тоже несовместны. Тогда можно применить теорему о сложении вероятностей несовместных событий: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i)$

При этом $P(AH_i) = P(H_i)P(A/H_i)$,

окончательно получаем: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$. ▲

ТЕОРЕМА ДОКАЗАНА

Формула Байеса (формула гипотез)

Пусть имеется полная группа несовместных гипотез $H_{1,}$ $H_{2,}$ … H_n с известными вероятностями их наступления P(H_1), P(H_2), … P(H_n) . Пусть в результате опыта наступило событие А, условные вероятности которого по каждой из гипотез известны, т.е. известны вероятности .

Требуется определить какие вероятности имеют гипотезы $H_{1,}$ $H_{2,}$ … H_n относительно события А, т.е. условные вероятности P(H_i /*A*) .

Теорема

Вероятность гипотезы после испытания равна произведению вероятности гипотезы до испытания на соответствующую ей условную вероятность события, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность этого события.

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A / H_i)}$$

Эта формула называется **формулой Байеса**.

∆Доказательство

По ***теореме умножения*** вероятностей получаем:

$$P(A)P(H_i / A) = P(H_i)P(A / H_i)$$

Тогда если $P(A) \neq 0,$ $\qquad P(H_i / A) = \dfrac{P(H_i)P(A / H_i)}{P(A)}.$

Для нахождения вероятности Р(А) используем формулу ***полной вероятности***

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A / H_i)}$$

Если до испытания все гипотезы равновероятны с вероятностью , то ***формула Байеса*** принимает вид:

$$P(H_i / A) = \frac{P(A / H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A / H_i)} \; . \; \blacktriangle$$

ТЕОРЕМА ДОКАЗАНА

Повторение испытаний. Формула Бернулли

Если производится некоторое количество испытаний, в результате которых может произойти или не произойти событие А, и вероятность появления этого события в каждом из испытаний не зависит от результатов остальных испытаний, то такие испытания называются независимыми относительно события А.

Допустим, что событие А наступает в каждом испытании с вероятностью Р(А)=р. Определим вероятность $P_{m,n}$ того, что в результате n испытаний событие А наступило ровно m раз.

Эту вероятность в принципе можно посчитать, используя теоремы сложения и умножения вероятностей. Однако, при достаточно большом количестве испытаний это приводит к очень большим вычислениям. *Таким образом, возникает необходимость разработать общий подход к решению поставленной задачи*. Этот подход реализован в **формуле Бернулли**. (Якоб Бернулли (1654 – 1705) – швейцарский математик)

Повторение испытаний. Формула Бернулли

Пусть в результате **n** независимых испытаний, проведенных в одинаковых условиях, событие А наступает с вероятностью Р(А) = р, а противоположное ему событие $\overline{A}$ с вероятностью $P(\overline{A}) = 1 - p$.

Обозначим Ai – наступление события А в испытании с номером i. Т.к. условия проведения опытов одинаковые, то эти вероятности равны.

Если в результате **n** опытов событие А наступает ровно **m** раз, то остальные **n-m** раз это событие не наступает. Событие А может появиться **m** раз в **n** испытаниях в различных комбинациях, число которых равно количеству сочетаний из **n** элементов по **m**. Это количество сочетаний находится по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Вероятность каждой комбинации равна произведению вероятностей:

$$p^m (1-p)^{n-m}$$

(продолжение)

Повторение испытаний. Формула Бернулли

Применяя *теорему сложения вероятностей несовместных событий*, получаем **ФОРМУЛУ БЕРНУЛЛИ:**

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}$$

(продолжение)

Пример

*По цели производится **5** выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна **0,4**. Найти вероятность того, что в цель попали не менее трех раз.*

РЕШЕНИЕ:

Вероятность не менее трех попаданий складывается из вероятности пяти попаданий, четырех попаданий и трех попаданий.

Т.к. выстрелы независимы, то можно применить формулу Бернулли вероятности того, что в n испытаниях событие в вероятностью p наступает ровно m раз.

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}$$

Пример

В случае пяти попаданий из пяти возможных:

$$P_{5,5} = p^5 = 0{,}4^5 = 0{,}01024$$

Четыре попадания из пяти выстрелов:

$$P_{4,5} = \frac{5!}{4!\cdot 1!} p^4 (1-p) = 0{,}0768$$

Три попадания из пяти:

$$P_{3,5} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} p^3 (1-p)^2 = 0{,}2304$$

Окончательно, получаем вероятность не менее трех попаданий из пяти выстрелов:

$$P = 0{,}01204 + 0{,}0768 + 0{,}2304 = 0{,}31744$$

(продолжение)