



ГОУ ВПО «РОССИЙСКАЯ ТАМОЖЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

Кафедра таможенной статистики

Формула полной вероятности.

Формула Байеса.

Формула Бернулли

Выполнили: студенты гр. Т092
Акишева Ю.Ю.
Еркебаева З.С.
Нуралиева Ж.Н.

Формула полной вероятности

Пусть некоторое событие A может произойти вместе с одним из несовместных событий H_1, H_2, \dots, H_n , составляющих полную группу событий. Пусть известны вероятности этих событий $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$ и условные вероятности наступления события A при наступлении события H_i $P(A/H_1), P(A/H_2), \dots, P(A/H_n)$.

Теорема

Вероятность события A , которое может произойти вместе с одним из событий H_1, H_2, \dots, H_n , равна сумме парных произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие им условные вероятности наступления события A .

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i)$$

Δ Доказательство

Т.к. события H_1, H_2, \dots, H_n образуют полную группу событий, то событие A можно представить в виде следующей суммы:

$$A = AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n = \sum_{i=1}^n AH_i$$

Т.к. события H_1, H_2, \dots, H_n несовместны, то и события AH_i тоже несовместны. Тогда можно применить теорему о сложении вероятностей несовместных событий: $P(A) = \sum_{i=1}^n P(AH_i)$

При этом $P(AH_i) = P(H_i)P(A|H_i)$,

окончательно получаем: $P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i)$. ▲

ТЕОРЕМА ДОКАЗАНА

Формула Байеса (формула гипотез)

Пусть имеется полная группа несовместных гипотез H_1, H_2, \dots, H_n с известными вероятностями их наступления $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$. Пусть в результате опыта наступило событие A , условные вероятности которого по каждой из гипотез известны, т.е. известны вероятности .

Требуется определить какие вероятности имеют гипотезы H_1, H_2, \dots, H_n относительно события A , т.е. условные вероятности $P(H_i/A)$.

Теорема

Вероятность гипотезы после испытания равна произведению вероятности гипотезы до испытания на соответствующую ей условную вероятность события, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность этого события.

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)}$$

Эта формула называется **формулой Байеса**.

Δ Доказательство

По *теореме умножения* вероятностей получаем:

$$P(A)P(H_i | A) = P(H_i)P(A | H_i)$$

Тогда если $P(A) \neq 0$, $P(H_i | A) = \frac{P(H_i)P(A | H_i)}{P(A)}$.

Для нахождения вероятности $P(A)$ используем формулу *полной вероятности*

$$P(A) = \frac{P(H_i)P(A | H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A | H_i)}$$

Если до испытания все гипотезы равновероятны с вероятностью $\frac{1}{n}$, то *формула Байеса* принимает вид:

$$P(H_i | A) = \frac{P(A | H_i)}{\sum_{i=1}^n P(A | H_i)} \quad \blacktriangle$$

ТЕОРЕМА ДОКАЗАНА

Повторение испытаний. Формула Бернулли

Если производится некоторое количество испытаний, в результате которых может произойти или не произойти событие A , и вероятность появления этого события в каждом из испытаний не зависит от результатов остальных испытаний, то такие испытания называются независимыми относительно события A .

Допустим, что событие A наступает в каждом испытании с вероятностью $P(A)=p$. Определим вероятность $P_{m,n}$ того, что в результате n испытаний событие A наступило ровно m раз.

Эту вероятность в принципе можно посчитать, используя теоремы сложения и умножения вероятностей. Однако, при достаточно большом количестве испытаний это приводит к очень большим вычислениям. Таким образом, возникает необходимость разработать общий подход к решению поставленной задачи. Этот подход реализован в **формуле Бернулли**. (Якоб Бернулли (1654 – 1705) – швейцарский математик)

Повторение испытаний. Формула Бернулли

Пусть в результате n независимых испытаний, проведенных в одинаковых условиях, событие A наступает с вероятностью $P(A) = p$, а противоположное ему событие \bar{A} с вероятностью $P(\bar{A}) = 1 - p$.

Обозначим A_i – наступление события A в испытании с номером i . Т.к. условия проведения опытов одинаковые, то эти вероятности равны.

Если в результате n опытов событие A наступает ровно m раз, то остальные $n-m$ раз это событие не наступает. Событие A может появиться m раз в n испытаниях в различных комбинациях, число которых равно количеству сочетаний из n элементов по m . Это количество сочетаний находится по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Вероятность каждой комбинации равна произведению вероятностей:

$$p^m (1-p)^{n-m}$$

(продолжение)

Повторение испытаний. Формула Бернулли

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий, получаем **ФОРМУЛУ БЕРНУЛЛИ:**

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}$$

Пример

По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятность того, что в цель попали не менее трех раз.

РЕШЕНИЕ:

Вероятность не менее трех попаданий складывается из вероятности пяти попаданий, четырех попаданий и трех попаданий.

Т.к. выстрелы независимы, то можно применить формулу Бернулли вероятности того, что в n испытаниях событие с вероятностью p наступает ровно m раз.

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}$$

Пример

В случае пяти попаданий из пяти возможных:

$$P_{5,5} = p^5 = 0,4^5 = 0,01024$$

Четыре попадания из пяти выстрелов:

$$P_{4,5} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} p^4 (1-p) = 0,0768$$

Три попадания из пяти:

$$P_{3,5} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} p^3 (1-p)^2 = 0,2304$$

Окончательно, получаем вероятность не менее трех попаданий из пяти выстрелов:

$$P = 0,01204 + 0,0768 + 0,2304 = 0,31744$$

(продолжение)