

Теория вероятностей

Акишева Ю.Ю.

Еркебаева З.С.

Нуралиева Ж.Н.

Группа Т092

- **Теория вероятностей** — раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений: случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними.



ИСТОРИЯ

□ Возникновение теории вероятностей как науки относят к средним векам и первым попыткам математического анализа азартных игр (орлянка, кости, рулетка). Первоначально её основные понятия не имели строго математического вида, к ним можно было относиться как к некоторым эмпирическим фактам, как к свойствам реальных событий, и они формулировались в наглядных представлениях. Самые ранние работы учёных в области теории вероятностей относятся к XVII веку. Исследуя прогнозирование выигрыша в азартных играх, Блез Паскаль и Пьер Ферма открыли первые вероятностные закономерности, возникающие при бросании костей. Под влиянием поднятых и рассматриваемых ими вопросов решением тех же задач занимался и Христиан Гюйгенс. При этом с перепиской Паскаля и Ферма он знаком не был, поэтому методику решения изобрёл самостоятельно. Его работа, в которой вводятся основные понятия теории вероятностей (понятие вероятности как величины шанса; математическое ожидание для дискретных случаев, в виде цены шанса), а также используются теоремы сложения и умножения вероятностей (не сформулированные явно), вышла в печатном виде на двадцать лет раньше (1657 год) издания писем Паскаля и Ферма (1679 год).

□ .



- Важный вклад в теорию вероятностей внёс Якоб Бернулли: он дал доказательство закона больших чисел в простейшем случае независимых испытаний. В первой половине XIX века теория вероятностей начинает применяться к анализу ошибок наблюдений; Лаплас и Пуассон доказали первые предельные теоремы. Во второй половине XIX века основной вклад внесли русские учёные П. Л. Чебышев, А. А. Марков и А. М. Ляпунов. В это время были доказаны закон больших чисел, центральная предельная теорема, а также разработана теория цепей Маркова. Современный вид теория вероятностей получила благодаря аксиоматизации, предложенной Андреем Николаевичем Колмогоровым. В результате теория вероятностей приобрела строгий математический вид и окончательно стала восприниматься как один из разделов математики



ВЕРОЯТНОСТЬ

- Вероятность (вероятностная мера) — численная мера степени объективной возможности наступления случайного события. Оценкой вероятности события может служить частота его наступления в длительной серии независимых повторений случайного эксперимента. Согласно определению П. Лапласа мерой вероятности называется дробь, числитель которой есть число всех благоприятных случаев, а знаменатель — число всех равновозможных случаев.

ОБЛАДАЕТ СВОЙСТВОМ СИГМА-АДДИТИВНОСТИ (СЧЕТНОЙ АДДИТИВНОСТИ)

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$$\mathbb{P}(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{X}$$



СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

- Случайная величина — это величина, которая принимает в результате опыта одно из множества значений, причем появление того или иного значения этой величины до её измерения нельзя точно предсказать.
- Формальное математическое определение следующее: пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ вероятностное пространство, тогда случайной величиной называется функция $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ измеримая относительно \mathcal{F} и борелевской σ -алгебры на \mathbb{R} . Вероятностное поведение случайной величины полностью описывается её распределением.



ПРОСТРАНСТВО ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СОБЫТИЙ

□ Если бросается игральная кость, то в результате верхней гранью может оказаться одна из шести граней с количеством точек от одной до шести. Выпадение какой-то одной грани в данном случае в теории вероятностей называется элементарным событием ω_k , то есть:

□ ω_1 - грань с одной точкой;

□ ω_2 - грань с двумя точками;

□ ω_6 - грань с шестью точками.

ω_6



- Множество всех граней $\omega_1 \dots \omega_6$ образует пространство элементарных событий Ω подмножества которого называются случайными событиями A_n .



ИГРОВОЙ КОСТИ ПРИМЕРАМИ СОБЫТИЙ ЯВЛЯЮТСЯ

- выпадение грани с нечётным количеством точек, то есть событие A - это выпадение грани с одной точкой или грани с тремя точками, или грани с пятью точками). Математически событие записывается как множество, содержащее элементарные события: $\omega_1, \omega_3, \omega_5$

Таким образом,

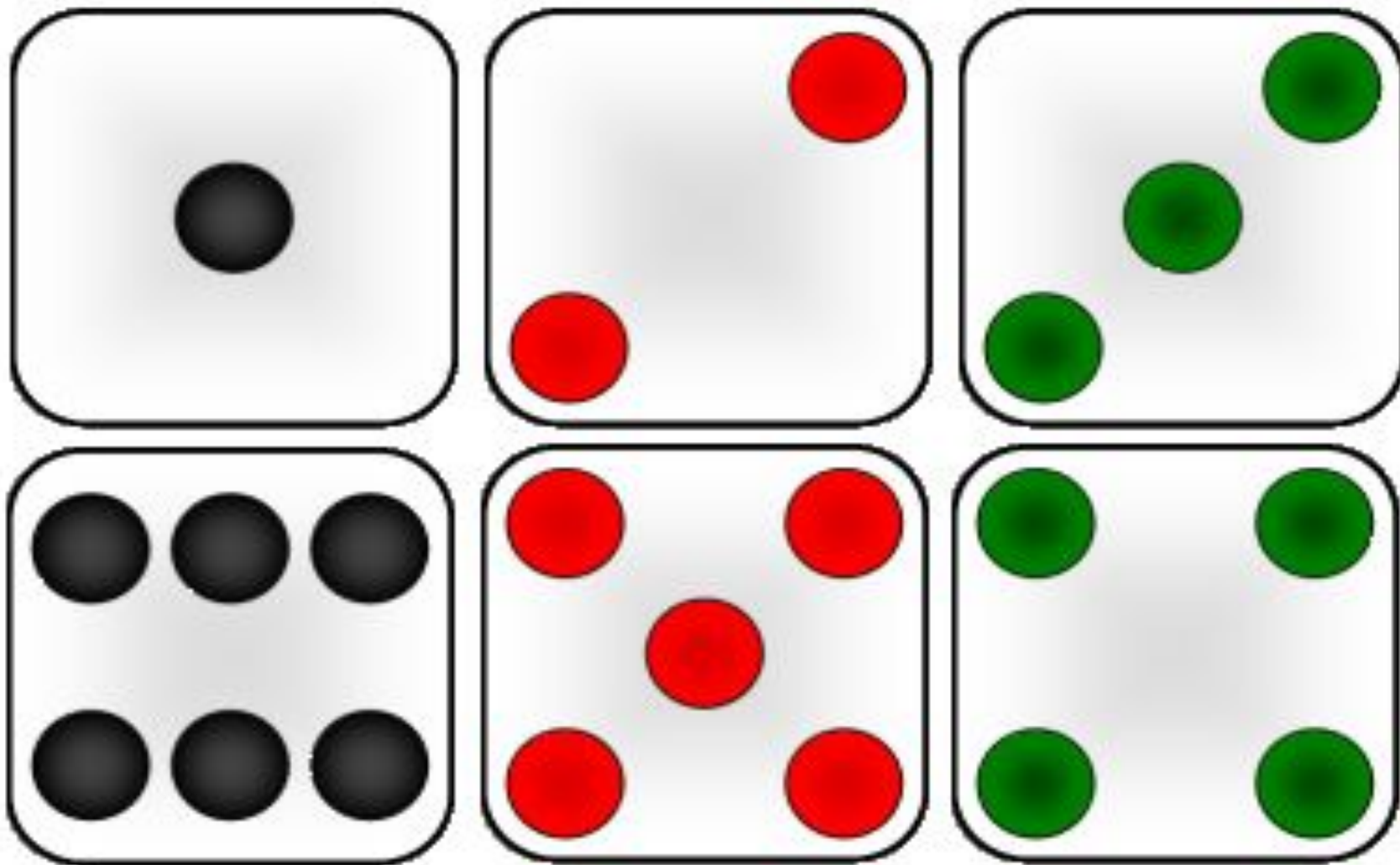
$$A = \{ \omega_1, \omega_3, \omega_5 \}$$

- выпадение грани с чётным количеством точек, то есть событие A - выпадение грани с двумя точками или грани с четырьмя точками, или грани с шестью точками. Математически событие записывается как множество, содержащее элементарные события: $\omega_2, \omega_4, \omega_6$

;

$$A = \{ \omega_2, \omega_4, \omega_6 \}$$





Пространство элементарных событий Ω
в случае бросания игральной кости



КЛАССИФИКАЦИЯ

- Случайные величины могут принимать **дискретные, непрерывные и дискретно-непрерывные значения.**
- Соответственно случайные величины классифицируют на **дискретные, непрерывные и дискретно-непрерывные (смешанные).**
- На схеме испытаний может быть определена как отдельная случайная величина (одномерная/скалярная), так и целая система одномерных взаимосвязанных случайных величин (многомерная/векторная).



- Пример смешанной случайной величины - время ожидания при переходе через автомобильную дорогу в городе на нерегулируемом перекрёстке.
- В бесконечных схемах (дискретных или непрерывных) уже изначально элементарные исходы удобно описывать количественно. Например, номера градаций типов несчастных случаев при анализе ДТП; время безотказной работы прибора при контроле качества и т. п.
- Числовые значения, описывающие результаты опытов, могут характеризовать не обязательно отдельные элементарные исходы в схеме испытаний, но и соответствовать каким-то более сложным событиям.



МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ

- Для того, чтобы задать случайную величину необходимо с помощью функции распределения, плотности вероятности и характеристической функции определить вероятности возможных её значений. Функция распределения $F(x)$ является вероятностью того, что значения случайной величины меньше вещественного числа x . Из этого определения следует, что вероятность попадания значения случайной величины в интервал $[a, b)$ равна $F(b) - F(a)$. Преимущество использования функции распределения заключается в том, что с её помощью удаётся достичь единообразного математического описания дискретных, непрерывных и дискретно-непрерывных случайных величин. Тем не менее, существуют разные случайные величины, имеющие одинаковые функции распределения.



- Если случайная величина дискретная, то для полного и однозначного математического описания необходимо задать закон распределения вероятностей, то есть указать вероятности $p_k = P(\xi = x_k)$ всех возможных значений случайной величины. В качестве примера рассмотрим биномиальный и пуассоновский законы распределения



- Биноминальный закон распределения описывает случайные величины, значения которых определяют количество «успехов» и «неудач» при повторении опыта N раз. В каждом опыте «успех» может наступить с вероятностью p , «неудача» – с вероятностью $q=1-p$.
- Закон распределения в этом случае определяется формулой Бернулли:

$$P_{k,n} = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$



- При стремлении n к бесконечности произведение np остаётся равной константе λ , а закон распределения сходится к закону Пуассона, который описывается следующей формулой:

$$p(k) \equiv \mathbb{P}(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$



- Математическое ожидание — мера среднего значения случайной величины в теории вероятностей. В зарубежной литературе обозначается через (например, от англ. Expected value или нем. Erwartungswert), в русской $M[X]$ (возможно, от англ. Mean value, а возможно от русск. Математическое ожидание). В статистике часто используют обозначение μ



ОПРЕДЕЛЕНИЕ

- Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и определённая на нём случайная величина X . То есть, по определению, $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — реальная функция. Тогда, если существует интеграл Лебега от X по пространству Ω , то он называется математическим ожиданием, или средним (ожидаемым) значением и обозначается $M[X]$ или $\mathbb{E}[X]$ или ...



ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ

- Если $F_X(x)$ — функция распределения случайной величины, то её математическое ожидание задаётся интегралом Лебега — Стильеса:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x); x \in \mathbb{R}$$



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ДИСКРЕТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

- Если X — дискретная случайная величина, имеющая распределение

$$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ВЕЛИЧИНЫ

- Если X — положительная целочисленная случайная величина (частный случай дискретной), имеющая распределение вероятностей

$$\mathbb{P}(X = j) = p_j, \quad j = 0, 1, \dots; \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$$



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

$$M[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) p_i$$

$$M[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

