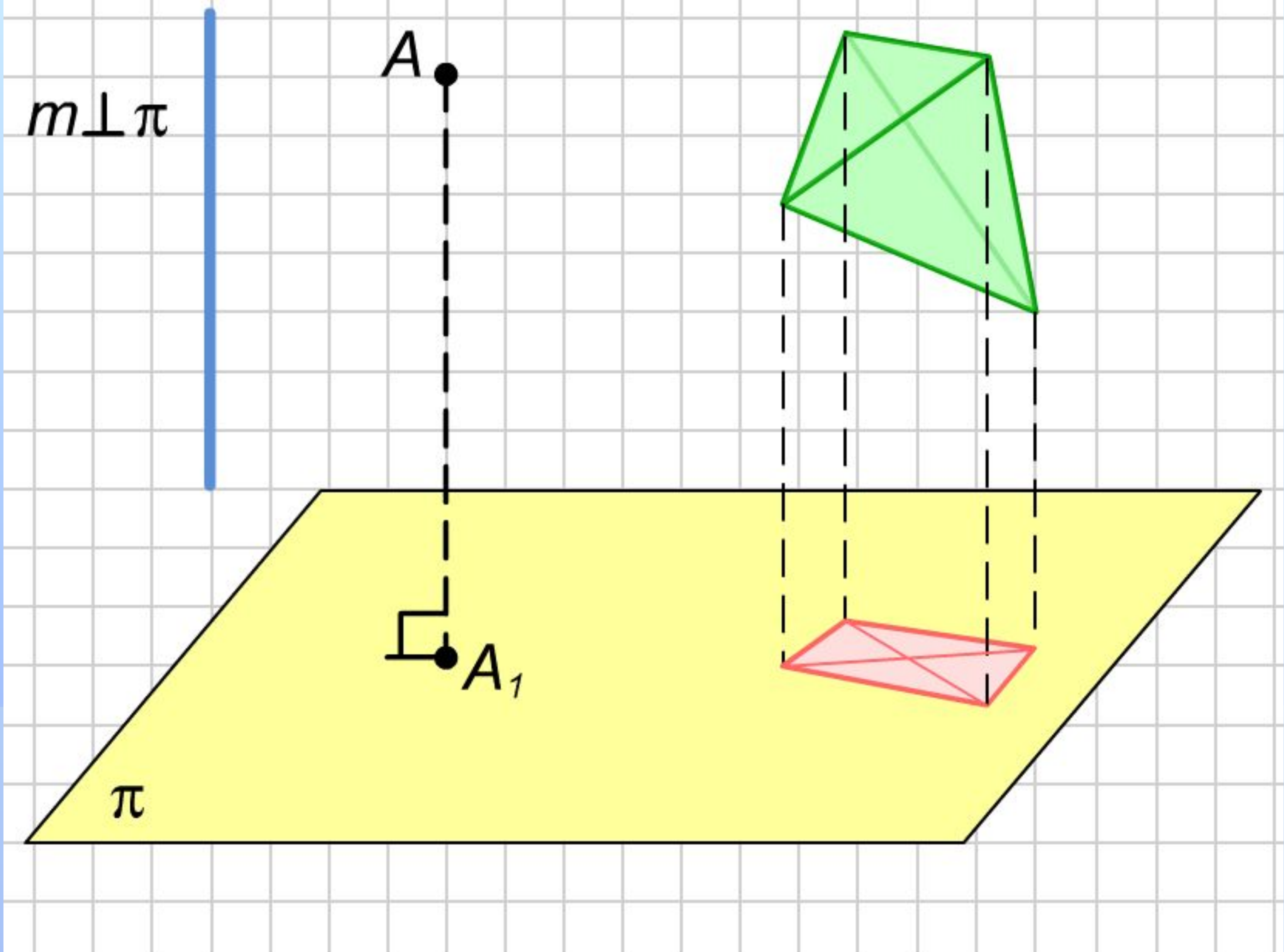
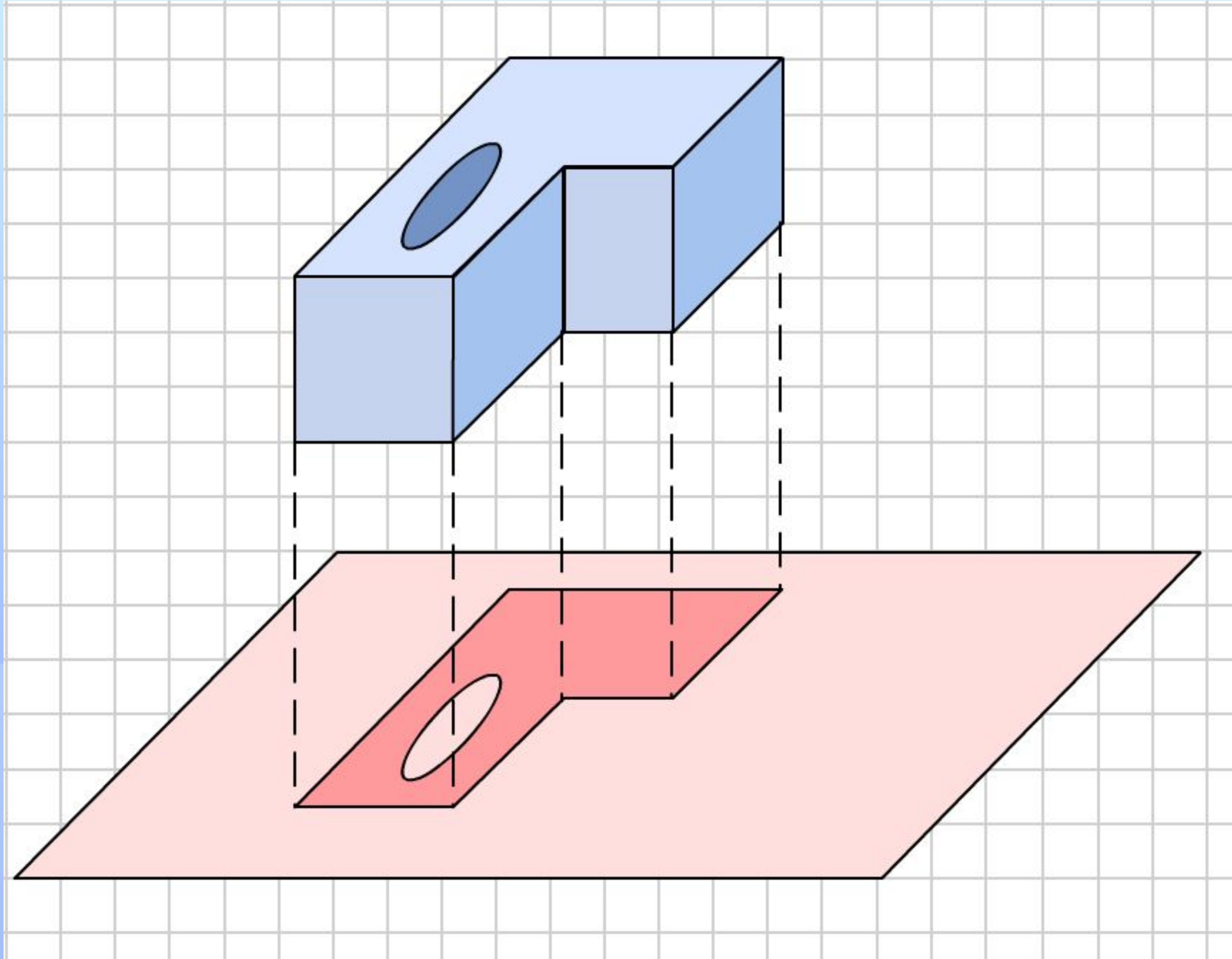
Перпендикуляр и наклонная

Урок геометрии в 10 классе

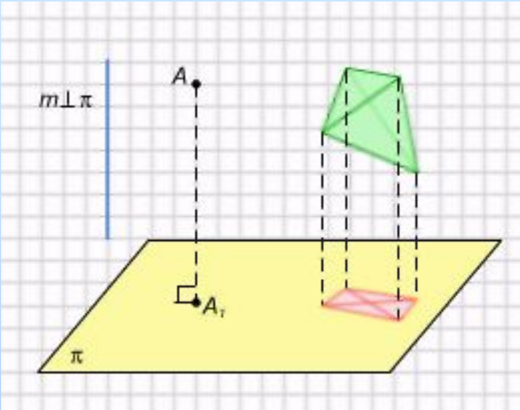
На одном из предыдущих уроков вы познакомились с понятием проекции точки на данную плоскость параллельно данной прямой.
На этом уроке вы продолжите изучение прямых и плоскостей; узнаете, как находится угол между прямой и плоскостью. Вы познакомитесь с понятием ортогональной проекции на плоскость и рассмотрите ее свойства. На уроке будут даны определения расстояния от точки до плоскости и от точки до прямой, угла между прямой и плоскостью. Будет доказана знаменитая теорема о трех перпендикулярах.



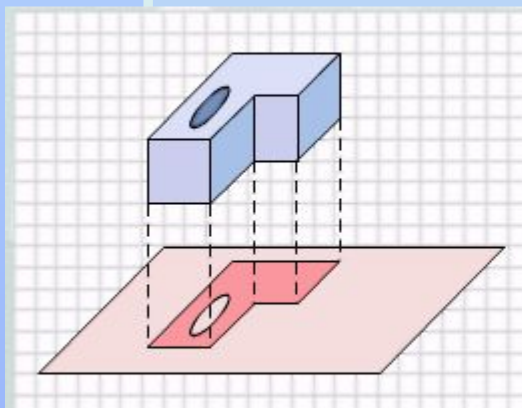
Ортогональная проекция точки и фигуры.



Ортогональная проекция



Ортогональная проекция точки и фигуры.



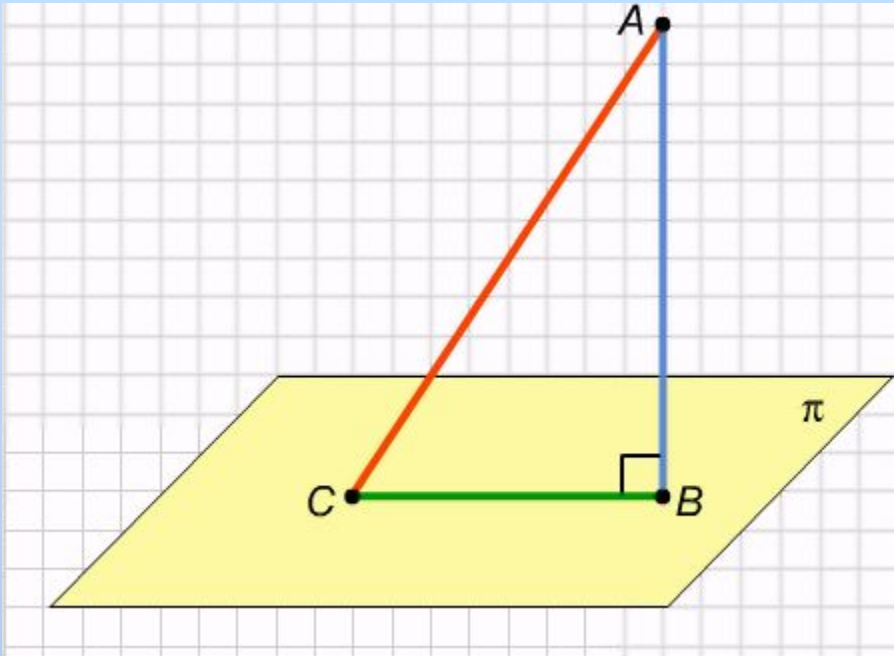
Ортогональная проекция детали.

Ортогональной проекцией точки *А* на данную плоскость называется проекция точки на эту плоскость параллельно прямой, перпендикулярной этой плоскости. *Ортогональная проекция фигуры* на данную плоскость р состоит из ортогональных проекций на плоскость р всех точек этой фигуры. Ортогональная проекция часто используется для изображения пространственных тел на плоскости, особенно в технических чертежах. Она дает более реалистическое изображение, чем произвольная параллельная проекция, особенно круглых тел.

Перпендикуляр и наклонная

Пусть через точку *A,* не принадлежащую плоскости p, проведена прямая, перпендикулярная этой плоскости и пересекающая ее в точке B. Тогда отрезок *AB* называется *перпендикуляром,* опущенным из точки *A* на эту плоскость, а сама точка B — основанием этого перпендикуляра. Любой отрезок *AC,* где C — произвольная точка плоскости p, отличная от B, называется *наклонной* к этой плоскости.

Заметим, что точка B в этом определении является ортогональной проекцией точки *A,* а отрезок *AC* — ортогональной проекцией наклонной AB. Ортогональные проекции обладают всеми свойствами обычных параллельных проекций, но имеют и ряд новых свойств.



Перпендикуляр и наклонная.

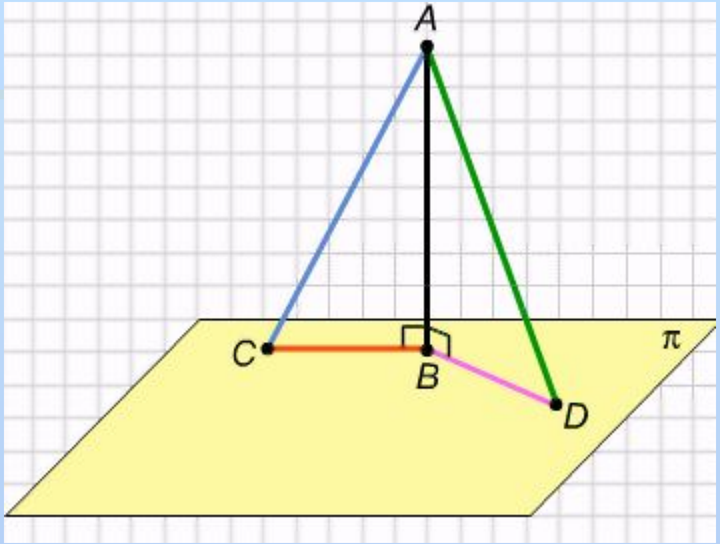
Свойства ортогональной проекции

Пусть из одной точки к плоскости проведены перпендикуляр и несколько наклонных. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Любая наклонная длиннее как перпендикуляра, так и ортогональной проекции наклонной на эту плоскость.
2. Равные наклонные имеют и равные ортогональные проекции, и наоборот, наклонные, имеющие равные проекции, также равны.
3. Одна наклонная длиннее другой тогда и только тогда, когда ортогональная проекция первой наклонной длиннее ортогональной проекции второй наклонной.

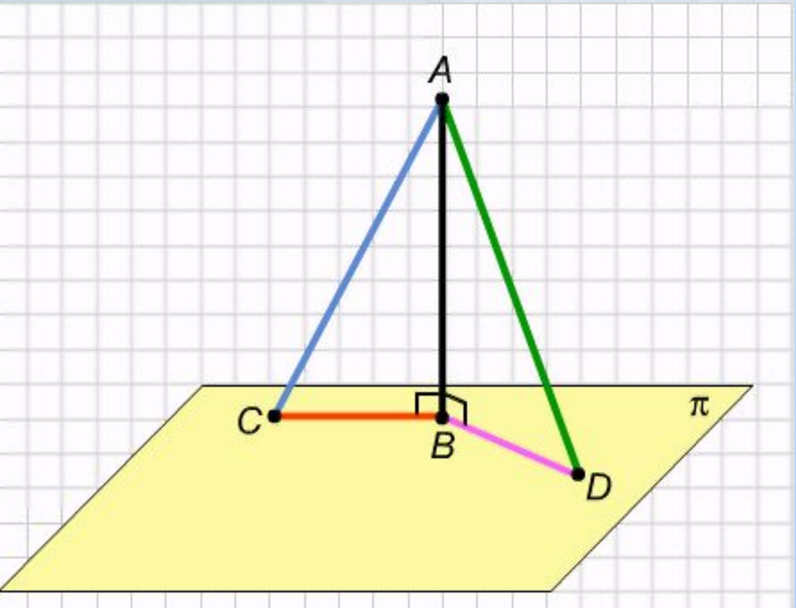
Свойства ортогональной проекции

Доказательство.
Пусть из точки *A* к плоскости p проведены перпендикуляр *AB* и две наклонные *AC* и AD; тогда отрезки ВС и *BD* — ортогональные проекции этих отрезков на плоскость p*.*
Докажем первое утверждение: любая наклонная длиннее как перпендикуляра, так и ортогональной проекции наклонной на эту плоскость. Рассмотрим, например, наклонную АС и треугольник *ABC,* образованный перпендикуляром АВ, этой наклонной АС, и ее ортогональной проекцией ВС. Этот треугольник прямоугольный с прямым углом в вершине В и гипотенузой АС, которая, как мы знаем из планиметрии, длиннее каждого из катетов, т.е. и перпендикуляра АВ, и проекции ВС.



Из точки А к плоскости pi проведены перпендикуляр АВ и две наклонные АС и AD.

Свойства ортогональной проекции

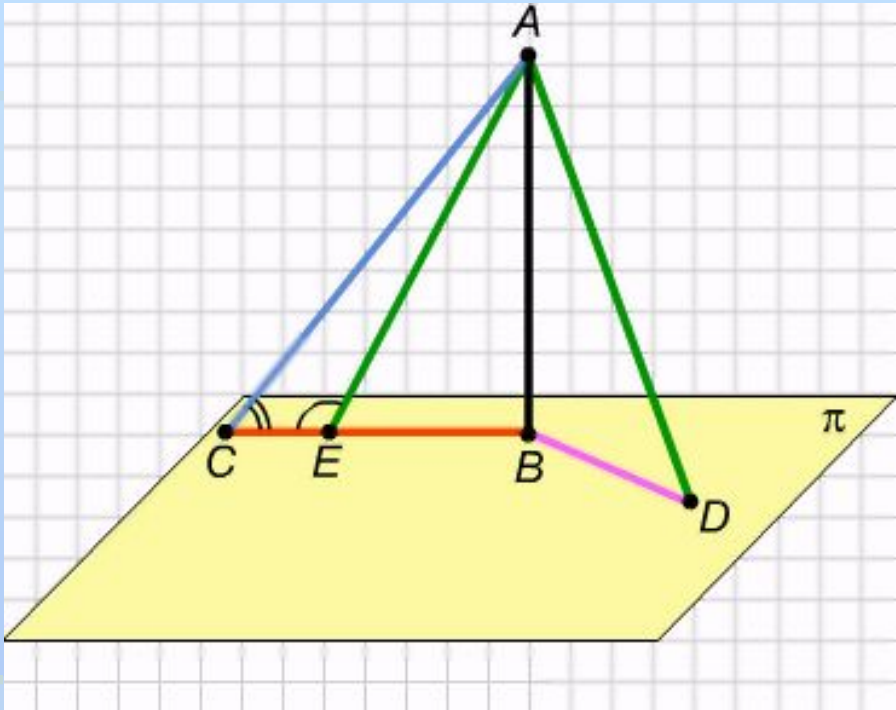


Теперь докажем второе утверждение, а именно: равные наклонные имеют и равные ортогональные проекции, и наоборот, наклонные, имеющие равные проекции, также равны. Рассмотрим прямоугольные треугольники ABC и *ABD.* Они имеют общий катет AB. Если наклонные AC и *AD* равны, то прямоугольные треугольники ABC и ABD равны по катету и гипотенузе, и тогда BC=BD. Обратно, если равны проекции BC и BD, то эти же треугольники равны по двум катетам, и тогда у них равны и гипотенузы AC и *AD.*

Треугольники *ABC* и *ABD* равны по катету и гипотенузе.

Свойства ортогональной проекции

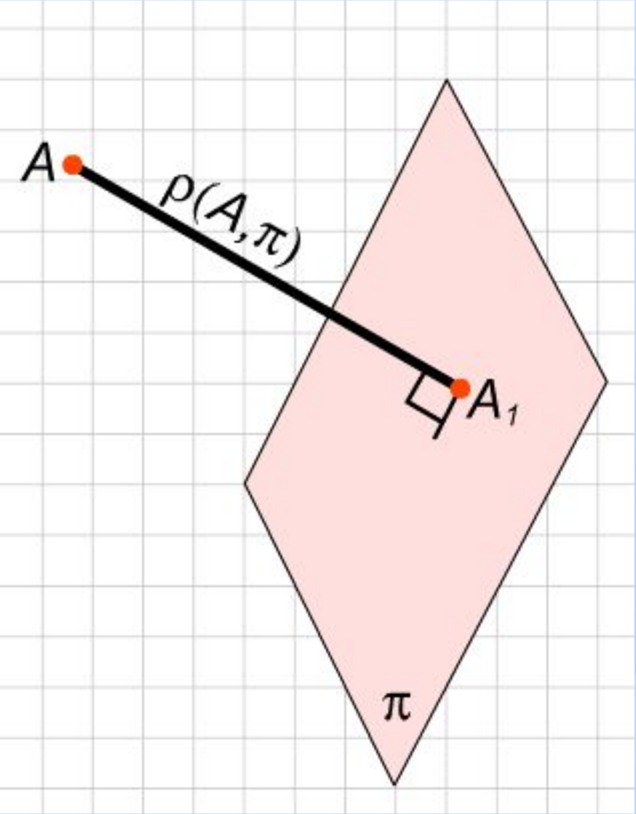
Докажем третье утверждение: одна наклонная длиннее другой тогда и только тогда, когда ортогональная проекция первой наклонной длиннее ортогональной проекции второй наклонной. Пусть, например, *BC > BD.* Отложим на отрезке *BC* точку E такую, что *BD=BE.* Тогда и *AD=AE.* В треугольнике *ACE угол A*EC тупой и поэтому больше угла ACE, следовательно, сторона *AC* больше стороны *AE,* равной *AD.*
Обратно, пусть *AC > AD.* Возможны три случая: а) *BC=BD;* б) *BC < BD;* с) *BC > BD.* Если *BC=BD,* то по доказанному выше в пункте 2, *AC=AD,* что противоречит условию. Если *BC < BD,* как мы только что доказали, *AC < AD,* что опять противоречит условию. Остается третья возможность: *BC > BD.* Теорема доказана.



Если BC больше BD, то *AC* больше стороны *AE,* равной *AD.*

Расстояние от точки до плоскости

Расстоянием от точки до плоскости (не проходящей через эту точку) называется длина перпендикуляра, опущенного из точки на эту плоскость. Из теоремы о свойствах ортогональной проекции следует, что расстояние от точки *A* до плоскости pi равно наименьшему расстоянию от точки *A* до точек этой плоскости.



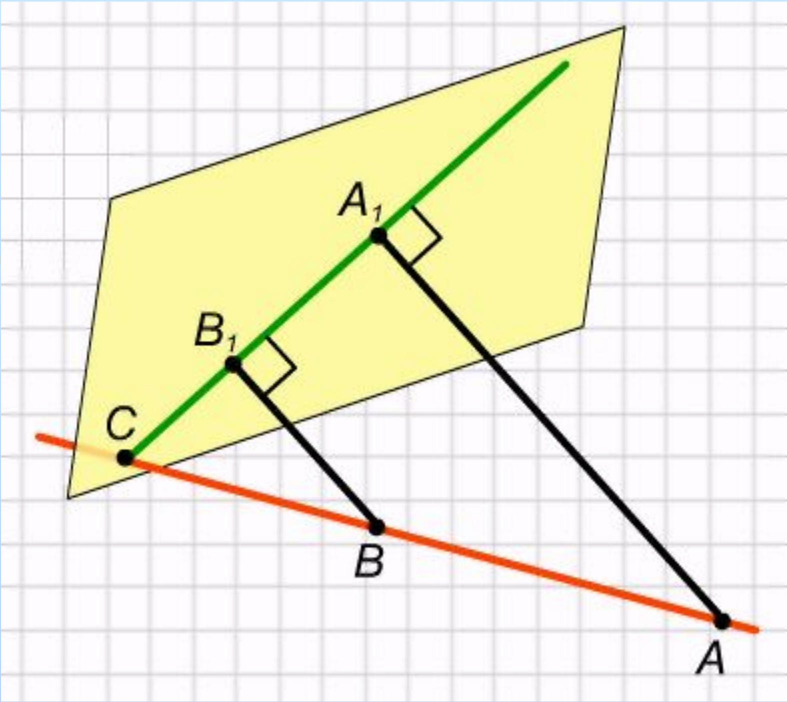
Свойство расстояний
от разных точек до плоскости

Замечание 1 (свойство расстоянии от разных точек до плоскости). Пусть две точки A и B не принадлежат плоскости pi, а прямая AB пересекает плоскость pi в точке C. Тогда расстояния от точек A и B до плоскости pi относятся как отрезки AC и BC:

$$\frac{\rho(A,\pi)}{\rho(B,\pi)}=\frac{AC}{BC}.$$

Доказательство:
Рассмотрим два случая. В случае 1 точки *A* и B находятся по одну сторону от плоскости pi*.* Рассмотрим ортогональные проекции точек A и B на плоскость — точки A_1 и B_1 соответственно. Тогда прямая A_1B_1 является ортогональной проекцией прямой AB и проходит через точку C. В плоскости , проходящей через прямые AB и A_1B_1, прямоугольные треугольники AA_1C и BB_1C подобны, и поэтому их катеты пропорциональны гипотенузам:

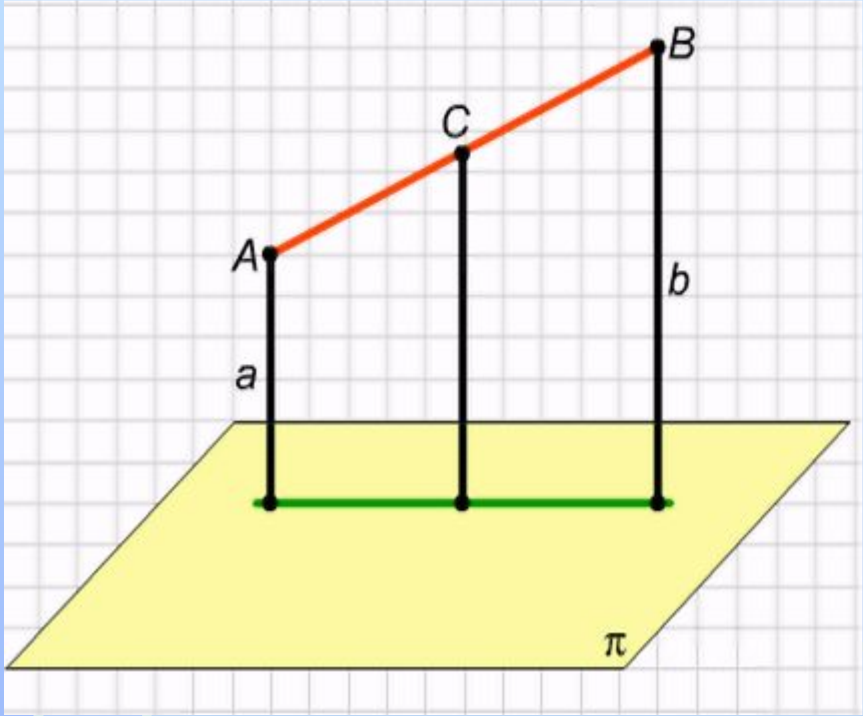
$$\frac{\rho(A,\pi)}{\rho(B,\pi)} = \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AC}{BC}.$$



Прямоугольные треугольники AA_1C и BB_1C подобны.

Случай 2, когда точки A и B расположены по разную сторону от плоскости, разберите самостоятельно. Замечание 1 доказано.

Свойство расстояния от середины отрезка до плоскости



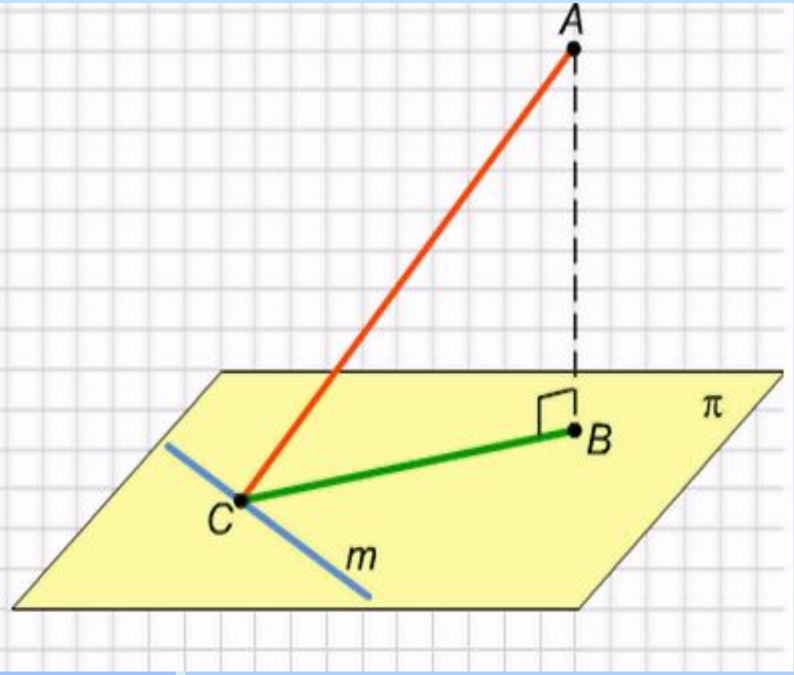
Замечание 2 (свойство расстояния от середины отрезка до плоскости). Пусть расстояния от точек A и B до плоскости pi равны a и b соответственно. Тогда расстояние от середины C отрезка AB до этой плоскости равно:

$\frac{a+b}{2}$, **если точки A и B расположены по одну сторону от плоскости pi;**

$\frac{|a-b|}{2}$, **если точки A и B расположены по одну сторону от   если точки A и B расположены по разные стороны от плоскости pi**

Точки A и B расположены по одну сторону от   если точки A и B расположены по одну сторону от плоскости pi

Теорема о трех перпендикулярах



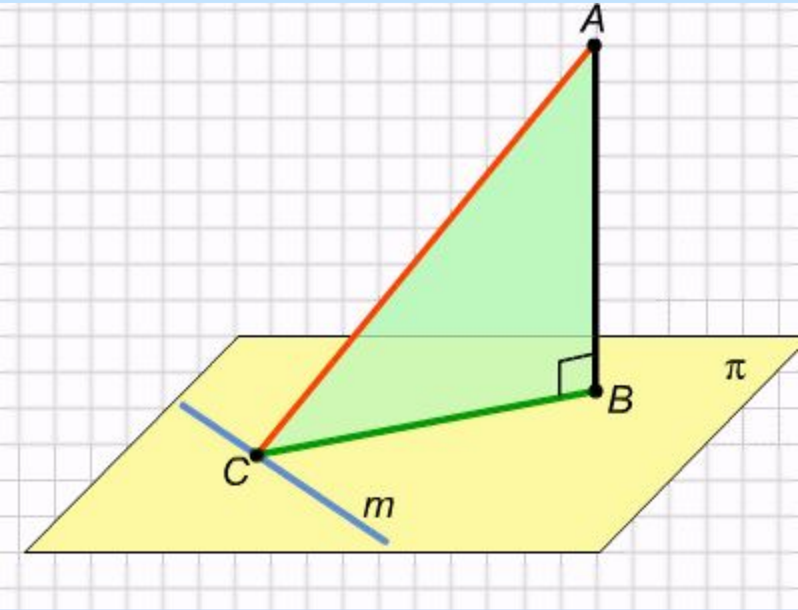
Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна ее ортогональной проекции.

Доказательство.

Пусть даны плоскость pi, перпендикуляр AB на эту плоскость, наклонная AC, и прямая m в плоскости pi. Нам надо доказать два взаимно обратных утверждения. Первое утверждение: если прямая m перпендикулярна наклонной AC, то она перпендикулярна и ее ортогональной проекции BC. И обратно: если прямая m перпендикулярна ортогональной проекции BC, то она перпендикулярна и наклонной AC.

Перпендикуляр *AB к* плоскость pi, наклонная *AC и* прямая *m* в плоскости pi.

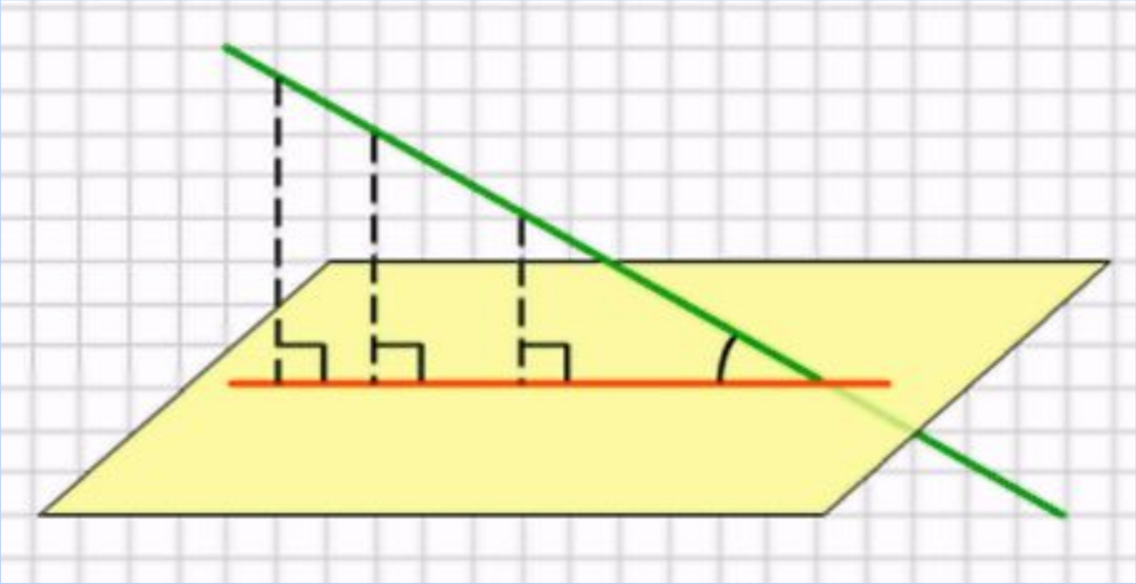
Докажем, что если прямая m перпендикулярна наклонной AC, то она перпендикулярна и ее ортогональной проекции BC. Пусть $m \perp AC$. Прямая AB перпендикулярна плоскости, значит, она перпендикулярна любой прямой в этой плоскости, в частности, прямой m. Следовательно, прямая m перпендикулярна плоскости ABC, так как она перпендикулярна двум пересекающимся прямым в этой плоскости: AC и BC. Поэтому прямая m перпендикулярна любой прямой плоскости ABC, в частности, проекции BC.
Доказательство обратного утверждения полностью аналогично: если $m \perp BC$, то прямая m перпендикулярна плоскости ABC, так как она перпендикулярна двум пересекающимся прямым в этой плоскости: AB и BC. Поэтому прямая m перпендикулярна любой прямой плоскости ABC, в частности, наклонной AC. Теорема доказана.



Прямая m перпендикулярна плоскости ABC.

Угол между наклонной и плоскостью

Пусть даны плоскость и наклонная прямая. *Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость.* Если прямая параллельна плоскости, то угол между ней и плоскостью считается равным нулю. Если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между ней и плоскостью прямой, т. е. равен 90°.



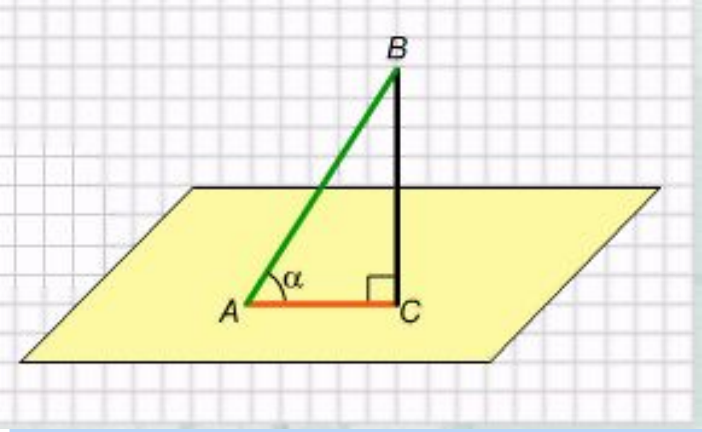
Угол между наклонной и ее ортогональной проекцией на плоскость.

Пусть точка A принадлежит плоскости, а наклонная AB образует с этой плоскостью угол α тогда ортогональная проекция AC и перпендикуляр BC на эту плоскость связаны соотношениями:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2,$$

$$BC = AB \cdot \sin\alpha, \; AC = AB \cdot \cos\alpha.$$

Это следует из того, что ABC — прямоугольный треугольник и $\angle BAC = \alpha$. Последняя формула верна и для произвольного отрезка прямой, пересекающей плоскость.



Перпендикуляр, наклонная и ее ортогональная проекци образуют прямоугольный треугольник.

Автор: Аверкина Т.П., учитель МОУ «Тархановская СОШ» Ичалковского района РМ