

Презентация по теме: «Действительные числа».

Выполнила: учитель математики
ГОУ СОШ № 457 Ж.Ю. Магаз

—
Санкт-Петербург
2010



Числовые множества.

| Обозначение | Название множества |
|---------------|--------------------------------|
| \mathbb{N} | Множество натуральных чисел |
| \mathbb{Z} | Множество целых чисел |
| \mathbb{Q} | Множество рациональных чисел |
| \mathbb{Q}' | Множество иррациональных чисел |
| \mathbb{R} | Множество вещественных чисел |



Множество натуральных чисел.

- Натуральные числа - это числа счета. $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$.
- Заметим, что множество натуральных чисел замкнуто относительно сложения и умножения, т.е. сложение и умножение выполняются всегда, а вычитание и деление в общем случае не выполняются

$$\forall n, m \in N \Rightarrow \begin{cases} n + m \\ n \cdot m \end{cases} \in N$$



Множество целых чисел.

- Введем в рассмотрение новые числа:
 - число 0 (ноль),
 - число $(-n)$, противоположное натуральному n .

При этом полагаем: $n + (-n) = (-n) + n = 0$,
 $-(-n) = n$.

Тогда множество целых чисел можно записать так:
 $Z = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$.

Заметим также, что: $N \subset Z$

Это множество замкнуто относительно сложения, вычитания и умножения, т.е.

$$\begin{aligned} & n + m. \\ \forall n, m \in Z \Rightarrow \{n * m, \in Z \\ & n - m \end{aligned}$$

Из множества целых чисел выделим два подмножества:

- множество четных чисел $\{2 * k \mid k \in Z\}$
- множество нечетных чисел $\{2 * k + 1 \mid k \in Z\}$



Деление с остатком.

В общем случае действие деления в множестве целых чисел не выполняется, но известно, что деление с остатком можно выполнить всегда, кроме деления на 0.

Определение деления с остатком.

Говорят, что целое число m делится на целое число n с остатком, если найдутся два числа q и r , такие что: (*)

$$m = nq + r, \text{ где } 0 \leq r < |n|$$

(q – частное, r – остаток)

Хорошо известен алгоритм деления с остатком.

Замечание: если $r=0$, то будем говорить, что m делится нацело на n .



ПРИМЕРЫ:

- Разделить с остатком m на n .

1). $m=190, n=3$

$$\begin{array}{r} 190 \ 3 \\ 18 \ \overline{) 6} \\ \underline{ 3} \\ 10 \\ 9 \\ \underline{ 1} \\ 1 \end{array}$$

$$q=63, r=1, 1 < 3$$

Проверка:

$$190 = 3 \cdot 63 + 1$$

2). $m=13, n=5$

Подберем q и формуле (*):

$$13 = 5q + r$$

$$\Rightarrow q=2, r=3 \ (3 < 5)$$

$$13 = 5 \cdot 2 + 3$$

3). $m=-15, n=4$

По формуле (*):

$$-15 = 4q + r$$

$$\Rightarrow q=-4,$$

$$r=1$$

$$-15 = 4 \cdot (-4) + 1$$

4). $M=6, n=13$

По формуле(*):

$$6 = 13q + r$$

$$\Rightarrow q=0, r=6$$

$$6 = 13 \cdot 0 + 6$$



Множество рациональных чисел.

- Множество рациональных чисел можно представить в виде:

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in Z, n \in Z \right\}$$

В частности, $\frac{m}{1} = m \in Z$ Таким образом, $Z \subset Q$

Множество рациональных чисел замкнуто относительно сложения, вычитания, умножения и деления (кроме случая деления на 0).

$$\forall p, q \in Q \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p + q, \\ p * q, \\ p - q, \\ \frac{p}{q}, q \neq 0 \end{array} \right\} \in Q$$



- Но в множестве рациональных чисел нельзя, например, измерить гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами $a = 1, b = 1$.

По теореме Пифагора гипотенуза будет равна $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$. Но число $\sqrt{2}$ не будет рациональным, так как $\sqrt{2} \neq \frac{m}{n}$ ни для каких m и n .

- Нельзя решить уравнение $x^2 - 2 = 0$.
- Нельзя измерить длину окружности и т.д.

Заметим, что всякое рациональное число можно представить в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.

$$\frac{1}{8} = \frac{5^3}{2^3 * 5^3} = 0.125; \frac{2}{7} = 0.(285714); \frac{1}{3} = 0.(3)$$



Множество иррациональных чисел.

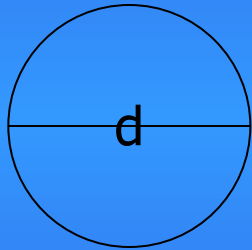
Числа, которые представляются бесконечной непериодической дробью, будем называть иррациональными. Множество иррациональных чисел обозначим \bar{Q}

Для иррациональных чисел нет единой формы обозначения. Отметим два иррациональных числа, которые обозначаются буквами – это числа π и e .



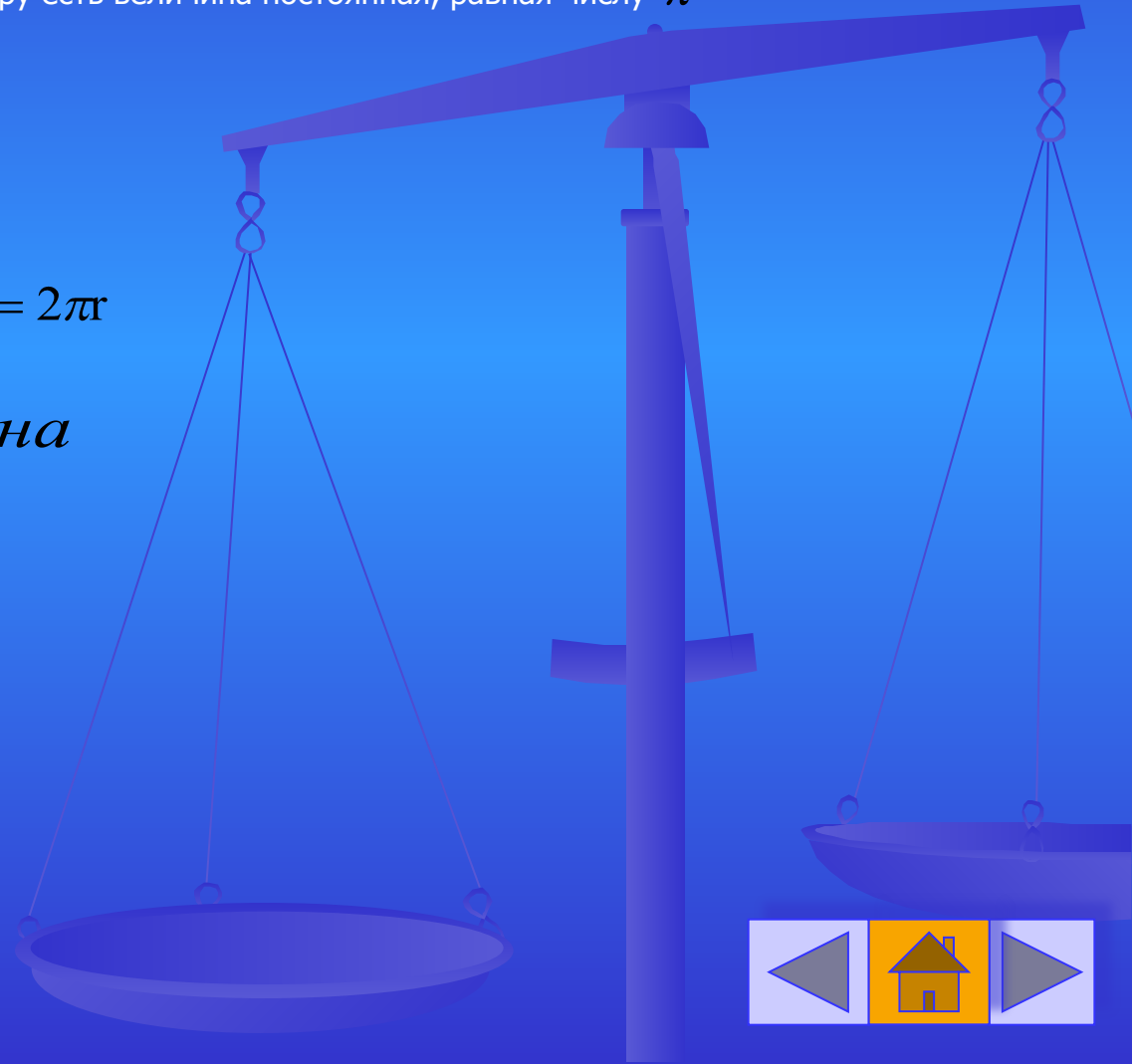
Число «пи» π

- Отношение длины окружности к диаметру есть величина постоянная, равная числу π



$$\pi = \frac{l}{d} \Rightarrow l = 2\pi r$$

l — длина



Число e .

- Если рассмотреть числовую последовательность:

$2, (\frac{2}{3})^2, (\frac{4}{3})^3, (\frac{5}{4})^4, \dots, (1 + \frac{1}{n})^n, \dots$ с общим членом последовательности $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, то с

ростом n значения x_n будут возрастать, но никогда не будет больше 3. Это означает, что последовательность ограничена. Такая последовательность имеет предел, который равен числу e .

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 2,71828182845904523536028747135266249775724709639$$



Известно, что мощность иррациональных чисел больше мощности рациональных, т.е. Иррациональных чисел «больше», чем рациональных. Кроме того, как бы ни были близки два рациональных числа, между ними всегда есть иррациональное, т.е.

$$\forall p, q \in \mathbb{Q}, \exists r \in \mathbb{Q} : p < r < q$$

Примеры иррациональных чисел:

$$\sqrt{2} \quad \sqrt[3]{7} \quad \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

(золотое сечение) и т.д.

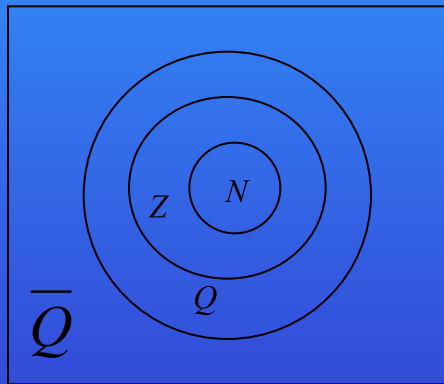


Множество вещественных (действительных) чисел.

- Множество вещественных чисел – это объединение множества рациональных чисел.

$$R = Q \cup \overline{Q}$$

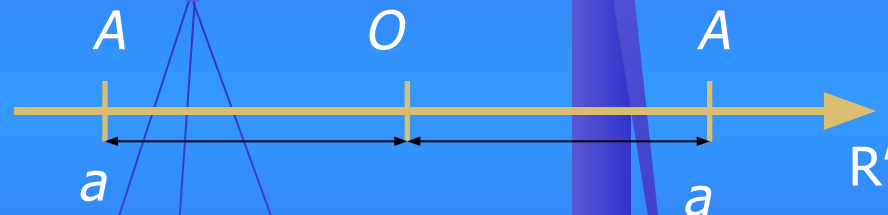
- Вывод: $N \subset Z \subset Q \subset R$ (см. рис. 1)



Определение модуля вещественного числа

- 1) Пусть на числовой оси точка A имеет координату a . Расстояние от точки начала отсчета O до точки A называется модулем вещественного числа a и обозначается $|a|$.

$$|a| = |OA|$$



- 2) Раскрытие модуля происходит по правилу:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$



- Например:

$$|2,5| = 2,5 \qquad \left| -3\frac{1}{3} \right| = -\left(-3\frac{1}{3}\right) = 3\frac{1}{3}$$

- **Замечание.**

Определение модуля можно расширить:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{где } f(x) \text{ — функция аргумента } x$$

- Пример. Раскрыть знак модуля.

$$|3x - 1| = \begin{cases} 3x - 1, & 3x - 1 \geq 0 \\ -(3x - 1), & 3x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow |3x - 1| = \begin{cases} 3x - 1, & x \geq \frac{1}{3} \\ -(3x - 1), & x < \frac{1}{3} \end{cases}$$



Основные свойства модуля

- 1) $|a| \geq 0$, при этом $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$,
- 2) $|a| = |-a|$
- 3) $|a + b| \leq |a| + |b|$
- 4) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- 5) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$
- 6) $|a^n| = |a|^n$



Решение примеров с использованием СВОЙСТВ МОДУЛЯ

- Пример 1.
Вычислить $|2x - 3|$, если $x = 1$; $x = 5$; $x = 1,5$
- Пример 2. Раскрыть знак модуля $|4 - 7x|$, если $x \geq \frac{4}{7}$
- Пример 3.
Вычислить 1) $|2x + 1| - |3 - 2x|$, если $x \in (1\frac{1}{2}, +\infty)$
- 2) $\sqrt{(5 - 3x)^2} - \sqrt{(x + 5)^2}$, если $x \in [0, 1]$
- 3) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{4x^2 + 12x + 9}$, если $x \in [-\pi, -2]$

