

ЗАДАНИЯ С РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ С5.

Макарова Татьяна Павловна, учитель математики
ГБОУ СОШ №618 г. Москвы

Подготовка к ЕГЭ.

Задача 1. Найти все значения a , при каждом из которых уравнение $\cos \sqrt{a^2 - x^2} = 1$ имеет ровно 8 решений.

Решение.

1. Преобразуем уравнение

$$\cos \sqrt{a^2 - x^2} = 2\pi n, n \in Z \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - x^2 = (2\pi n)^2 \\ n \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \sqrt{a^2 - (2\pi n)^2} \\ n = 0, 1, 2, k \end{cases}$$

2. Если $a^2 - (2\pi n)^2 > 0$, то уравнение имеет два корня, отличающихся знаком.

Если $a^2 - (2\pi n)^2 = 0$, то имеется ровно один корень.

Если $a^2 - (2\pi n)^2 < 0$, то корней нет. Поэтому для выполнения условия задачи, необходимо и достаточно, чтобы было

положительно при $n=0, 1, 2, 3$ и отрицательно при $n=4, 5, k$

3. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} a^2 - (2\pi \cdot 3)^2 > 0, \\ a^2 - (2\pi \cdot 4)^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| > 2\pi \cdot 3 \\ |a| < 2\pi \cdot 4 \end{cases}$$

Ответ: $-8\pi < a < -6\pi, \quad 6\pi < a < 8\pi.$

Алгоритм решения задач с параметром графическим методом

1. Преобразовываем исходное условие задачи к системе неравенств, в которых неизвестное выражается через параметр, или, наоборот, параметр выражается через неизвестное.
2. Вводим систему координат $(a;x)$, если мы неизвестное выражали через параметр, или $(x;a)$, если, наоборот, параметр выражали через неизвестное.
3. Изображаем в выбранной координатной плоскости фигуру, которая задается множеством решений системы неравенств.
4. «Сканируем» эту фигуру, двигаясь вдоль оси параметра и определяем, при каких значениях параметра выполняются заданные в задаче условия.
5. Записываем ответ.

Задача 2. Найдите все значения a , при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 8x$ имеет более двух точек экстремума.

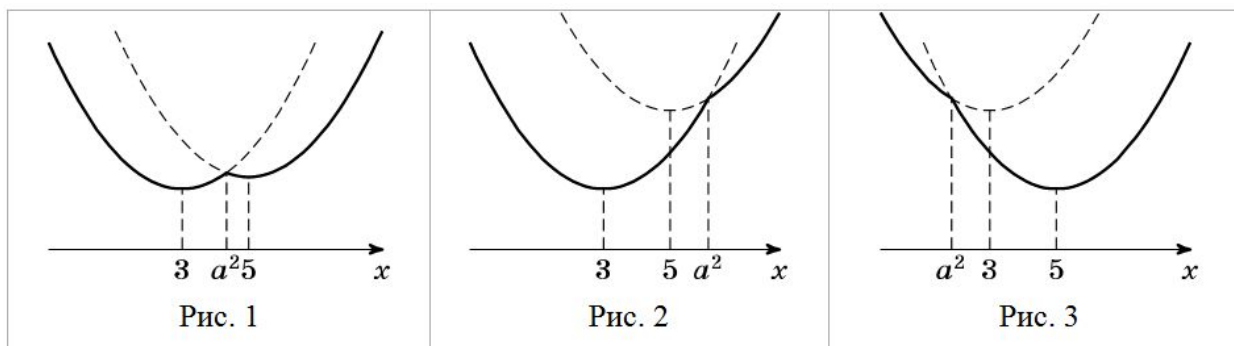
Решение.

1. Функция f имеет вид:

а) при $x \geq a^2 : f(x) = x^2 - 10x + 2a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=5$;

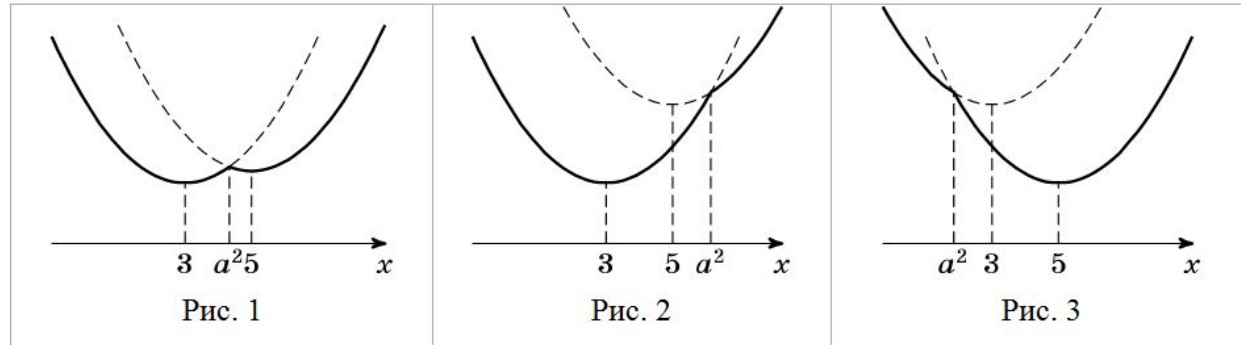
б) при $x \leq a^2 : f(x) = x^2 - 6x - 2a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=3$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:



Задача 2. Найдите все значения a , при каждом из которых функция

$f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 8x$ имеет более двух точек экстремума.



$$-\sqrt{5} <$$

2) График обеих квадратичных функций проходят через точку $(a^2; f(a^2))$.

3) Функция $y=f(x)$ имеет более двух точек экстремума, а именно – три, в единственном случае (рис. 1): $3 < a^2 < 5 \Leftrightarrow \sqrt{3} < |a| < \sqrt{5}$.

$$-\sqrt{5} < a < -\sqrt{3}; \quad \sqrt{3} < a < \sqrt{5}.$$

Ответ:

Задача 3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых

система
$$\begin{cases} y^2 + xy - 4x - 9y + 20 = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

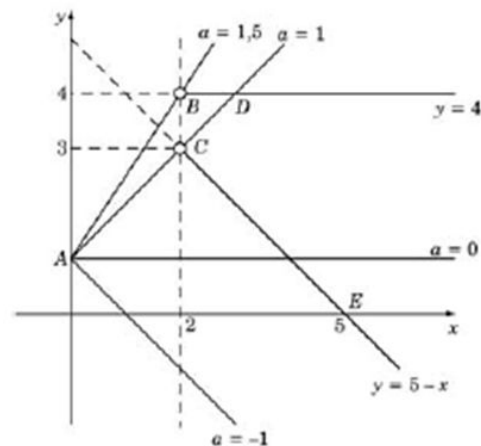
Решение. Преобразуем исходную систему

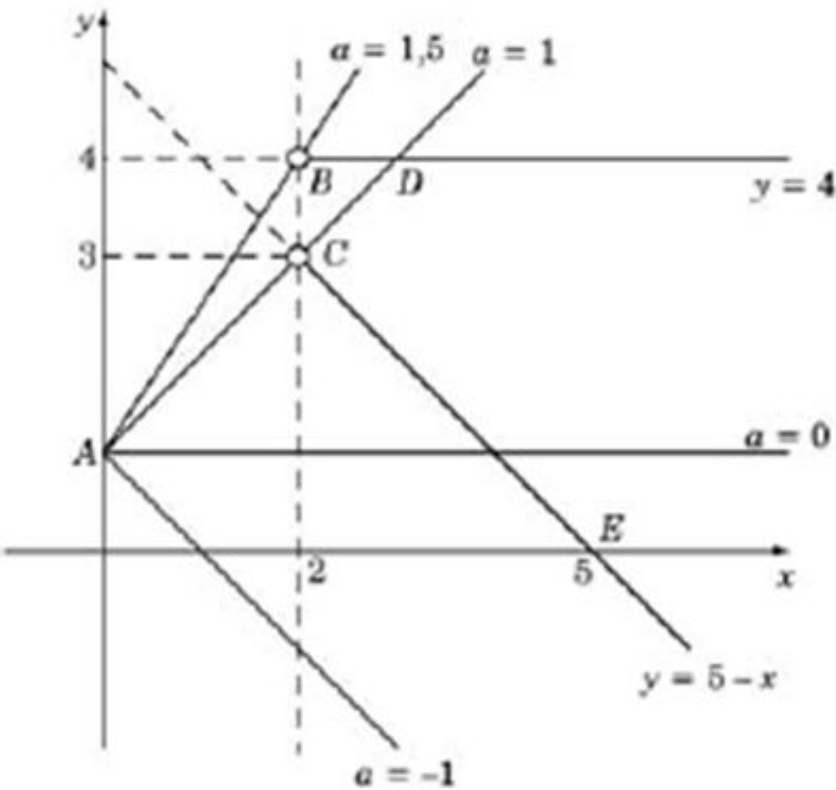
$$\begin{cases} (y - 4)x + y^2 - 9y + 20 = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y - 4)x + (y - 4)(y - 5) = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y - 4)(x + y - 5) = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases}$$

Уравнение $(y-4)(x+y-5)=0$ задает пару пересекающихся прямых $y=4$ и $y=5-x$.

Система
$$\begin{cases} x > 2, \\ (y - 4)(x + y - 5) = 0 \end{cases}$$

задает части этих прямых, расположенные правее прямой $x=2$, т.е. лучи BD и CE (без точек B и C), см. рис.





Уравнение $y=ax+1$ задает прямую t с угловым коэффициентом a , проходящую через точку $A(0;1)$. Следует найти все значения a , при каждом из которых прямая t имеет единственную общую точку с объединением лучей BD и CE .

а) Прямая AB задается уравнением $y=1,5x+1$. Поэтому при $a \geq 1,5$ прямая t не пересечет ни луч BD , ни луч CE .

б) Прямая AC задается уравнением $y=x+1$. Поэтому при $1 < a < 1,5$ прямая t пересечет луч BD , но не пересечет луч CE .

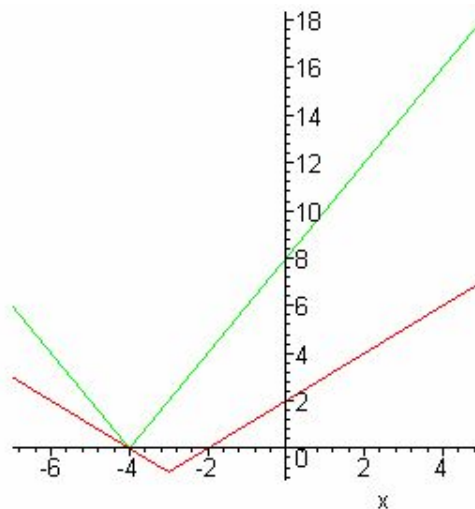
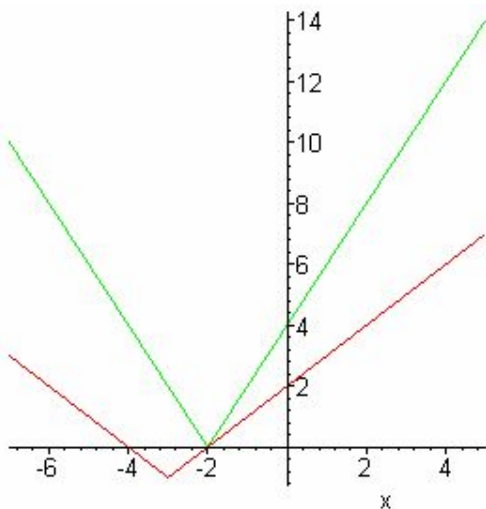
в) При $0 < a < 1$ прямая t пересечет и луч BD , и луч CE .

г) При $-1 < a \leq 0$ прямая t пересечет только луч CE , а при $a \leq -1$ она не пересечет ни луч BD , и ни луч CE .

Ответ. $-1 < a \leq 0, \quad 1 \leq a < 1,5.$

Задача 4. Найдите все значения a , такие, что уравнение $|x+3| - 1 = |2x - a|$ имеет единственное решение.

Решение. Решим с помощью графиков.



Для выполнения условия задачи вершина графика правой части уравнения должна находиться в точке $x = -2$ или $x = -4$.

$$\text{Т.е. } \begin{cases} -4 - a = 0, \\ -8 - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -8, \\ a = -4. \end{cases}$$

Ответ: - 8 и - 4.

Задача 5. Найдите все значения a , при каждом из которых функция $f(x) = x^2 + 4x + |x^2 - 1,5x - 1|$ принимает только неотрицательные значения.

Решение. $x^2 - 1,5x - 1 = 0$, $x = 2$; $-0,5$.

$$1) x \in (-\infty; -0,5) \cup (2; \infty) \quad f(x) = 2x^2 + 2,5x - 1 - a$$

Т.к. ветви параболы $f(x)$ направлены вверх, вершина $y = -5/8$ для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы

$$f\left(-\frac{5}{8}\right) \geq 0 \rightarrow \frac{25}{32} - \frac{25}{16} - 1 - a \geq 0 \rightarrow -\frac{57}{32} - a \geq 0 \rightarrow a \leq -\frac{57}{32}.$$

$$2) x \in \left(-\frac{1}{2}; 2\right) \quad f(x) = \frac{11}{2}x + 1 - a$$

График функции $f(x)$ – возрастающая прямая, таким образом, для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы $f(-0,5) \geq 0$

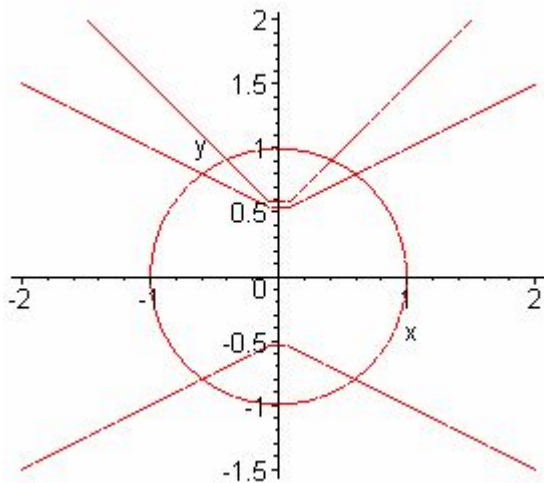
$$-\frac{11}{4} + 1 - a \geq 0 \rightarrow a \leq -\frac{7}{4}.$$

$$\text{Ответ: } a \leq -\frac{57}{32}.$$

Задача 6. Найдите все значения p , при каждом из которых для любого q система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = q|x| + p \end{cases}$ имеет решения.

Решение.

График функции, заданной первым уравнением – окружность радиуса 1 с центром в начале координат. График функции, заданной вторым уравнением должен пересекать эту окружность при любом q , т.е. при любом угле наклона прямых этой ломаной.



Нетрудно видеть, что это условие для любого угла наклона выполняется при сдвиге вершины ломаной по оси y не более чем на единицу вниз или вверх .

Ответ $-1 \leq p \leq 1.$
:

Задачи для самостоятельного решения:

1. Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x|-9)^2 + (y-5)^2 = 9, \\ (x+3)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное значение

2. При каких a уравнение $\cos(\sqrt{a^2 - x^2}) = 1$ имеет ровно 8 корней?

Ответ: $a \in (-8\pi; -6\pi) \cup (6\pi; 8\pi)$.

3. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$3x + |2x + |a-x|| = 7|x+2|$ имеет хотя бы один корень.

Ответ: $a \in (-\infty; -12] \cup [8; \infty)$.

4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $4x -$

$|3x - |x + a|| = 9|x - 3|$ имеет два корня.

Для успешного решения задач типа С5 необходимо:

- Уметь решать уравнения и неравенства
- Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы
- Решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя свойства функций и их графиков; использовать для приближенного решения уравнений и неравенств графический метод
- Решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы

ИСТОЧНИКИ:

1. <http://alexlarin.narod.ru>
2. <http://www.akipkro.ru/>
3. <http://4ege.ru/matematika/>
4. <http://www.ctege.info/content/>
5. <http://seklib.ru/>
6. <http://mathege.info/category/zadaniya-ege/c5-zadanie-ege/>
7. ЕГЭ 2011. Математика. Типовые тестовые задания. Под ред. Семенова А.Л., Ященко И.В., М.: Экзамен, 2011.(сборник 1)
8. ЕГЭ 2011. Математика. Типовые тестовые задания. Под ред. Семенова А.Л., Ященко И.В., М.: Экзамен, 2011.(сборник 2)
9. ЕГЭ 2011. Математика. Типовые тестовые задания. Под ред. Семенова А.Л., Ященко И.В., М.: Экзамен, 2011.(сборник 3)
11. Математика. Диагностические работы в формате ЕГЭ., М.: МЦНМО, 2011 - 36 с.