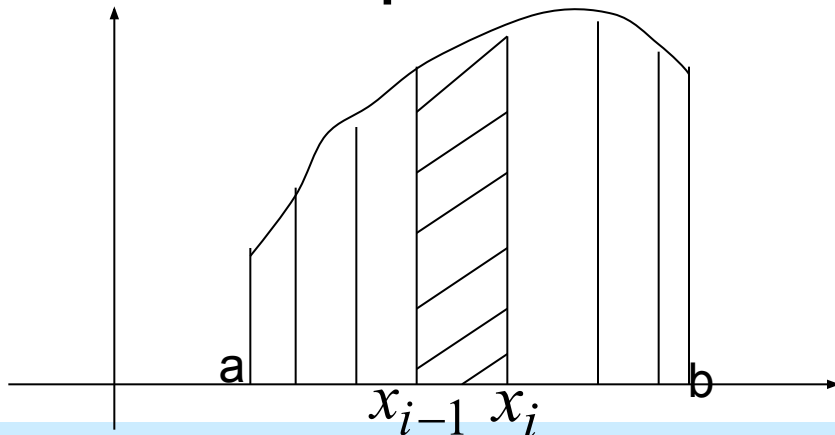


# *Определенный интеграл*

# Задача о вычислении площади плоской фигуры

Решим задачу о вычислении площади фигуры, ограниченной графиком функции  $y = f(x)$  отрезками прямых  $x = a$ ,  $x = b$  и осью  $Ox$ . Такую фигуру называют криволинейной трапецией



# Задача о вычислении площади плоской фигуры

Разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $n$  частей точками  $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n = b$ . При этом криволинейная трапеция разобьется на  $n$  элементарных криволинейных трапеций. Заменяем каждую такую криволинейную трапецию прямоугольником с основанием  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$  и высотой  $h = f(\bar{x}_i)$ , где  $\bar{x}_i$  - произвольно выбранная внутри отрезка  $[x_{i-1}, x_i]$  точка.

# Задача о вычислении площади плоской фигуры

Площадь прямоугольника будет равна  $\Delta S_i = f(\bar{x}_i) \Delta x_i$ , а площадь всей криволинейной фигуры приблизительно будет равна сумме площадей всех прямоугольников:

$$S \approx \sum_{i=1}^n \Delta S_i = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i .$$

# Определенный интеграл

## **Определение.**

Выражение  $\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$ , где

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ , называется

интегральной суммой функции  $f(x)$   
на отрезке  $[a, b]$ .

# Определенный интеграл

## Определение.

Если существует конечный  $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$ , не

зависящий ни от способа разбиения отрезка  $[a, b]$  на части, ни от выбора точек  $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , то этот предел называется определенным интегралом функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  и

обозначается  $\int_a^b f(x) dx$ .

# Определенный интеграл

## **Замечание.**

С геометрической точки зрения

при  $f(x) \geq 0$   $\int_a^b f(x)dx$  равен

площади криволинейной  
трапеции

# Теорема о существовании определенного интеграла

## **Теорема.**

Если функция  $f(x)$  непрерывна на

отрезке  $[a, b]$ , то  $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$

существует и конечен, т.е.

существует и конечен  $\int_a^b f(x) dx$ .



# Свойства определенного интеграла

$$1. \int_a^a f(x) dx = 0 ;$$

$$2. \int_a^b dx = b - a ;$$

$$3. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx ;$$

$$4. \int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx ;$$

# Свойства определенного интеграла

$$5. \int_a^b Kf(x)dx = K \int_a^b f(x)dx ;$$

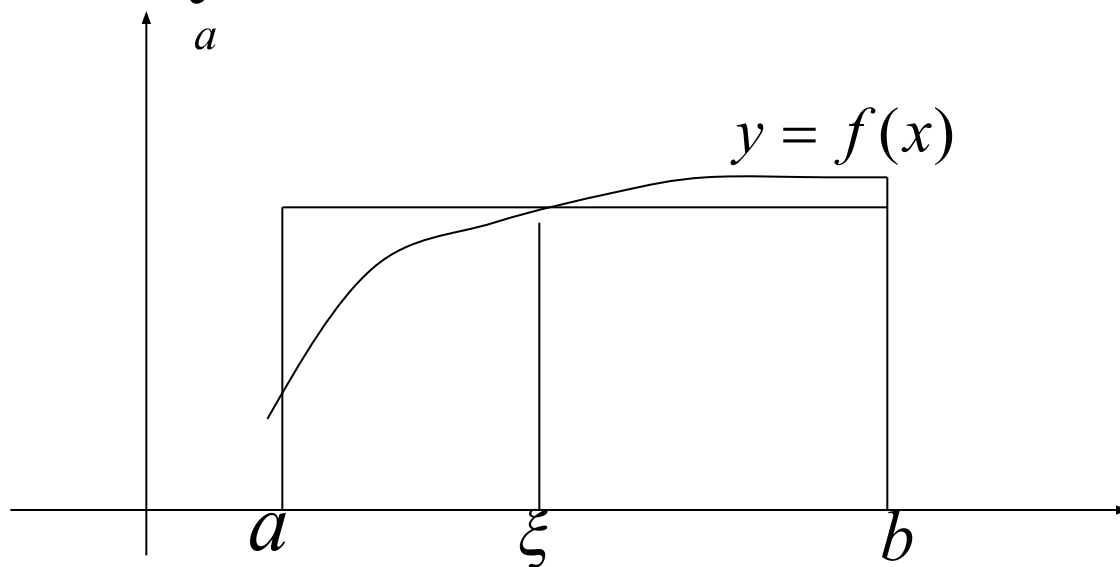
$$6. \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx ;$$

$$7. \int_a^b f(x)dx \geq 0 , \text{ если } f(x) \geq 0 .$$

# Теорема о среднем

Если функция непрерывна на  $[a, b]$ , то существует такая точка  $\xi \in [a, b]$ ,

что  $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$ .



# Вычисление определенного интеграла

## **Теорема.**

Пусть  $F(x)$  - первообразная функции  $f(x)$ .

$$\text{Тогда } \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Эту формулу называют формулой Ньютона-Лейбница, из которой следует, что для вычисления определенного интеграла необходимо найти первообразную подынтегральной функции.

## Пример

Вычислить  $\int_0^3 e^{-\frac{x}{3}} dx$  .

$$\int_0^3 e^{-\frac{x}{3}} dx = \int_0^3 e^{-\frac{1}{3} \cdot x} dx = -3e^{-\frac{1}{3} \cdot x} \Big|_0^3 = -3 \left( e^{-\frac{1}{3} \cdot 3} - e^{-\frac{1}{3} \cdot 0} \right) =$$

$$= -3(e^{-1} - 1) = -3 \left( \frac{1}{e} - 1 \right) = -3 \frac{1-e}{e}$$

# Вычисление интеграла

**Теорема (Замена переменной в определенном интеграле).**

Пусть  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , а функция  $x = \varphi(t)$  непрерывна вместе со своей производной  $\varphi'(t)$  на отрезке  $[\alpha, \beta]$ , причем  $a = \varphi(\alpha)$ ,  $b = \varphi(\beta)$ . Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$$

# Пример

$$\int_0^3 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}} = \left. \begin{array}{l} \sqrt{x+1} = t \\ x+1 = t^2 \\ x = t^2 - 1, dx = 2t dt \\ x = 0, t = 1 \\ x = 3, t = 2 \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{t^2 - 1}{t} 2t dt =$$
$$= \int_1^2 2(t^2 - 1) dt = 2 \int_1^2 (t^2 - 1) dt = 2 \left( \frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_1^2 = 2 \left[ \left( \frac{8}{3} - 2 \right) - \left( \frac{1}{3} - 1 \right) \right] =$$
$$= 2 \left( \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1 \right) = 2 \left( \frac{7}{3} - 1 \right) = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

**Теорема (Интегрирование по частям в определенном интеграле).**

Если функции  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  и их производные  $u'(x)$  и  $v'(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$ , то

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du .$$



## Пример

$$\int_1^e \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{array} \right| = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \frac{dx}{x} =$$
$$= x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = e \ln e - \ln 1 - x \Big|_1^e = e - e + 1 = 1$$

# Несобственный интеграл

**Замечание.**

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$  не является определенным интегралом.

Считается по определению, что

$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$ . Если этот предел

конечен, то  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ , называемый

несобственным, сходится.

Если же этот предел не является конечным, то интеграл расходится.

# Пример

. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 + 4}$$

(или установить его расходимость)

$$\begin{aligned} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 + 4} &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{d(x^2 + 4)}{x^2 + 4} = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 4) \Big|_0^b = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln(b^2 + 4) - \ln 4) = \infty \end{aligned}$$

Этот несобственный интеграл расходится.

# Пример

Несобственный интеграл

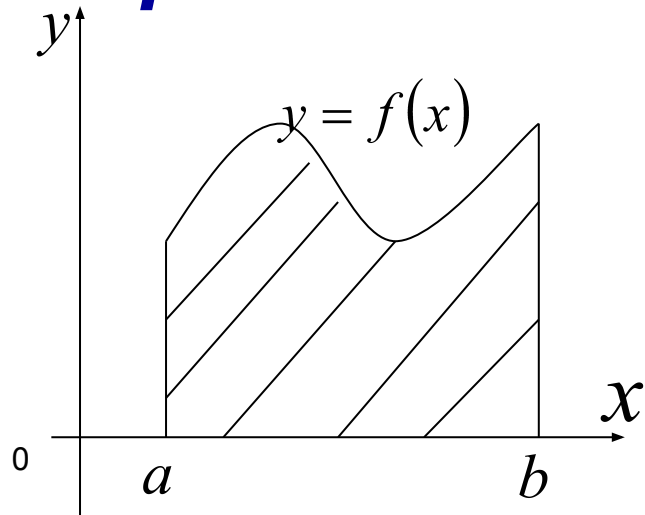
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4} =$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2 \cdot 2} = \frac{\pi}{4}$$

***Геометрические  
приложения определенного  
интеграла***

# Вычисление площадей

## Площадь фигуры в декартовых координатах.

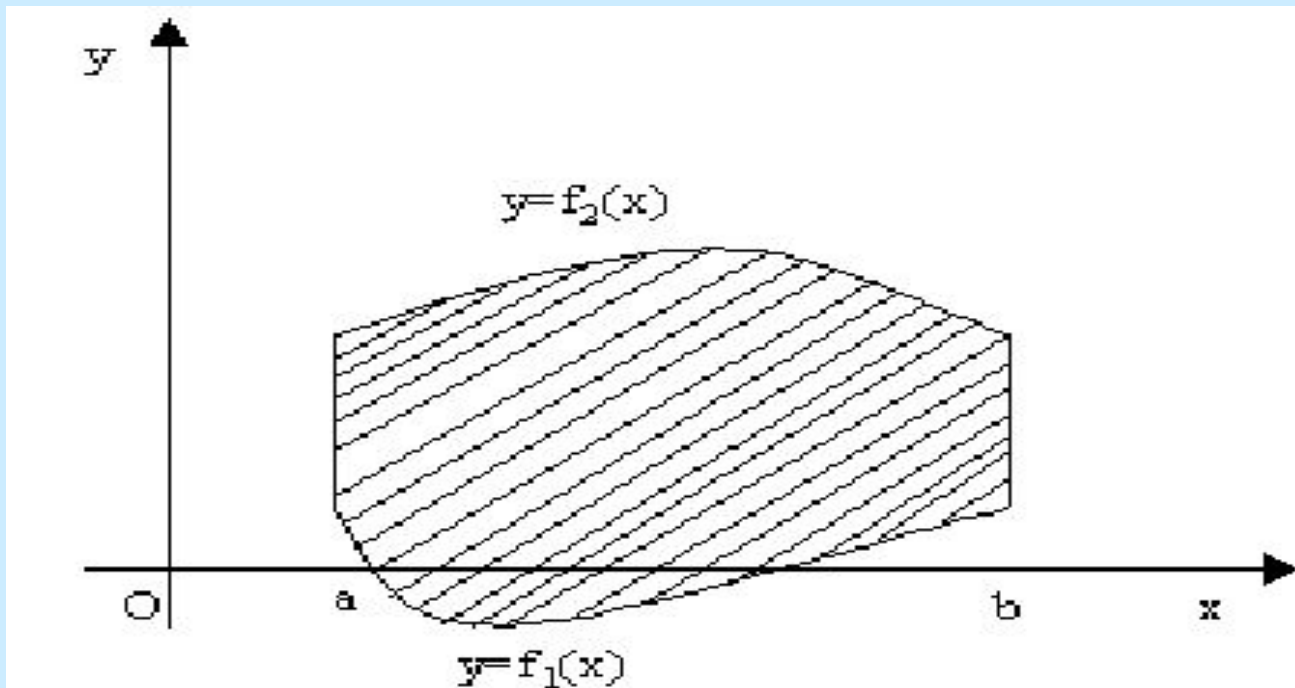


Площадь такой фигуры, называемой криволинейной трапецией, вычисляют по

формуле 
$$S = \int_a^b f(x) dx .$$

# Вычисление площадей

Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$ ,  $f_1(x) \leq f_2(x)$  и двумя прямыми  $x = a$  и  $x = b$  определяется по формуле  $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$



# Вычисление площадей

В случае **параметрического задания кривой**, площадь фигуры, ограниченной прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ , осью  $Ox$  и кривой

$x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ , вычисляют по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi'(t) dt,$$

где пределы интегрирования определяют из

уравнений

$$a = \varphi(t_1), b = \varphi(t_2).$$



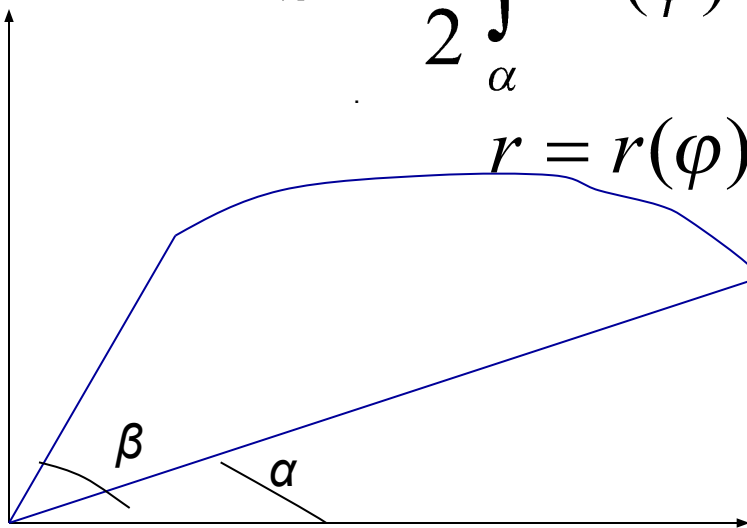
# Вычисление площадей

## Площадь полярного сектора

вычисляют по формуле

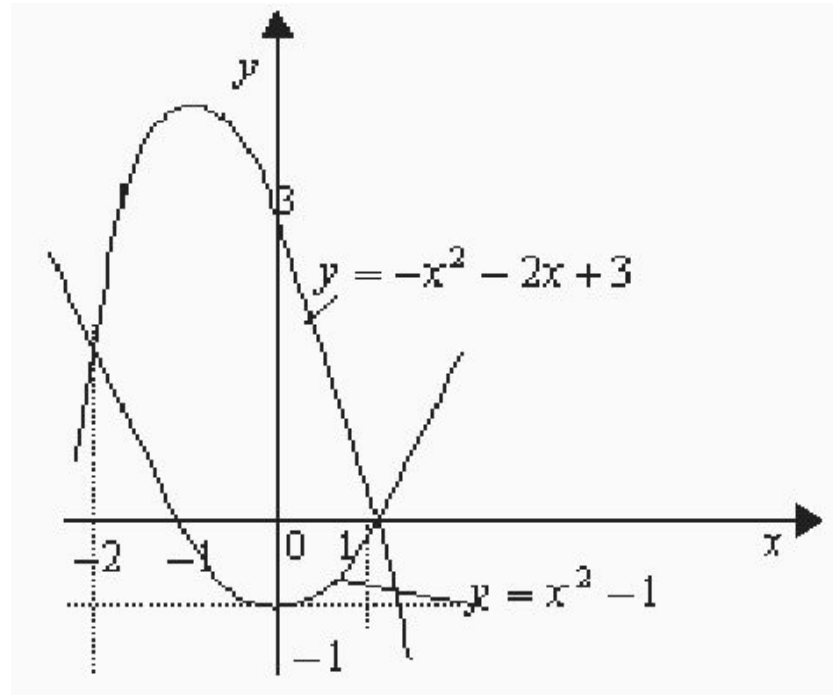
$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$$

$$r = r(\varphi)$$



# Примеры

Вычислить площадь фигуры,  
ограниченной линиями  $y = -x^2 - 2x + 3$  и  
 $y = x^2 - 1$



## Продолжение

Получим

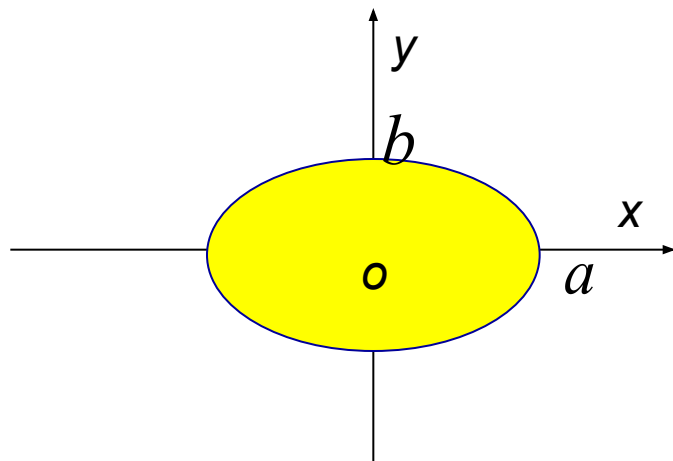
$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 [(-x^2 - 2x + 3) - (x^2 - 1)] dx = \int_{-2}^1 (-2x^2 - 2x + 4) dx = \\ &= -2 \int_{-2}^1 (x^2 + x - 2) dx = -2 \left( \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_{-2}^1 = \\ &= -2 \left[ \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) - \left( -\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 \right) \right] = -2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + \frac{8}{3} - 6 \right) = \\ &= -2 \left( 3 - 8 + \frac{1}{2} \right) = -2 \left( -\frac{9}{2} \right) = 9 \end{aligned}$$

# Примеры

Найти площадь эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Параметрические уравнения эллипса

$$x = a \cos t, y = b \sin t.$$



$$\begin{aligned} S &= 4 \int_{\pi/2}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \\ &= \frac{1}{2} 4ab \left( t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = 2ab \frac{\pi}{2} = \pi ab. \end{aligned}$$

## Пример

Площадь фигуры, ограниченной лемнискатою Бернулли  $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$  и лежащей вне круга радиуса  $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} a^2 \cos 2\varphi d\varphi - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} \frac{a^2}{2} d\varphi &= \left( \frac{1}{4} a^2 \sin 2\varphi - \frac{1}{4} a^2 \varphi \right) \Big|_0^{\pi/6} = \\ &= \frac{1}{4} a^2 \left( \sin \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{a^2}{4} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{a^2}{8} \left( \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) \\ S &= \frac{a^2}{2} \left( \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

## Вычисление длины дуги

Если кривая задана параметрическими уравнениями  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ , то длина ее дуги

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt ,$$

где  $t_1, t_2$  — значения параметра, соответствующие концам дуги .

## Длина дуги в декартовых координатах

Если кривая задана уравнением  $y = f(x)$ , то  $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ , где  $a, b$ —абсциссы начала и конца дуги ( $a < b$ ).

Если кривая задана уравнением

$x = g(y)$ , то  $l = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy$ , где  $c, d$ —ординаты начала и конца дуги ( $c < d$ ).

# Длина дуги в полярных координатах

Если кривая задана уравнением в полярных координатах  $\rho = \rho(\varphi)$ , то

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi ,$$

где  $\alpha, \beta$  – значения полярного угла, соответствующие концам дуги .



## Примеры

Вычислить длину дуги кривой  $y = \sqrt{x^3}$   
от точки  $O(0,0)$  до  $B(4,8)$ .

$$y' = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}, \text{ тогда}$$

$$\begin{aligned} l &= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} d\left(1 + \frac{9}{4}x\right) = \\ &= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1) \end{aligned}$$

# Вычисление объема тела вращения.

Объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, ограниченной кривой  $y = f(x)$ , отрезком оси абсцисс  $a \leq x \leq b$  и прямыми  $x = a, x = b$ , вычисляется по формуле  $V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$  .

# Вычисление объема тела вращения

Объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной кривой  $x = g(y)$ , отрезком оси ординат  $c \leq y \leq d$  и прямыми  $y = c, y = d$ , вычисляется по формуле

$$V_y = \pi \int_c^d (g(y))^2 dy .$$

# Вычисление объема тела вращения

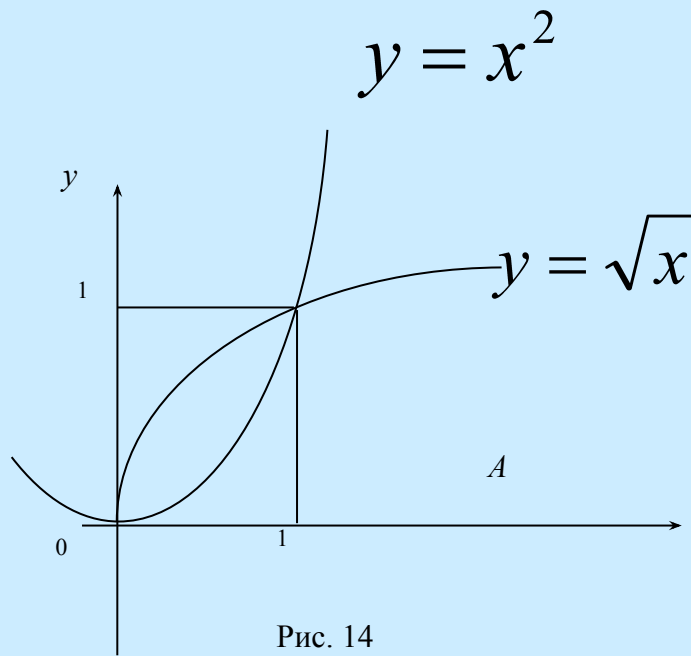


Рис. 14

Искомый объем можно найти как разность объемов, полученных вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейных трапеций, ограниченных линиями  $y = \sqrt{x}$  и  $y = x^2$

## Решение

Тогда

$$V_x = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx =$$
$$= \pi \int_0^1 x dx - \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \pi \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 =$$
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$$