
Решение алгебраических уравнений

Выполнил: Нелюбин Алексей
9 «В» класс
Школа №3
г. Свирск

Определение алгебраического уравнения

$P_n(x) = 0$, где

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ – некоторые _ числа

x – переменная.

n – натуральное _ число.

Кубические уравнения.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (1)$$

$$x^3 + px + q = 0 \quad (2)$$

Формула Кардано

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Пример:

$$x^3 + 3x - 4 = 0$$

$$x = 1$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} + \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} - \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{3}\right)^3}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$$

Способы и методы решения уравнений.


* Разложение на множители.


Вынесение общего множителя за скобку 

Применение формул сокращённого умножения 

Способ группировки 

* Замена переменной

Биквадратное уравнение 

Понижение степени уравнения 

Уравнение вида $(x + \alpha)^4 + (x + \beta)^4 = \gamma$

Возвратное уравнение 

* Метод деления на многочлен, содержащий переменную

* Метод выделения полного квадрата

Задачи с параметрами



Пример1



Пример2

Заключение

Рассмотрев в своей работе достаточно примеров уравнений, я пришёл к выводу, что предпочтительней решать некоторые уравнения нетрадиционным способом, так как вычисления при этом получаются намного проще.

Все эти способы я описал выше, применяя их можно решить большинство алгебраических уравнений.

$$9x^3 - 27x^2 = 0$$

$$9x^2(x - 3) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 3$$



$$x^6 - 1 = 0$$

$$(x^3 - 1)(x^3 + 1) = 0$$

$$x^3 - 1 = 0, \quad x^3 + 1 = 0$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1$$



$$x^3 - 3x^2 + 5x - 15 = 0$$

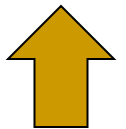
$$(x^3 - 3x^2) + (5x - 15) = 0$$

$$x^2(x - 3) + 5(x - 3) = 0$$

$$(x - 3)(x^2 + 5) = 0$$

$$x - 3 = 0, x^2 + 5 = 0$$

$x_1 = 3$, нет корней.



$$4x^4 + 7x^2 - 2 = 0$$

Замена $x^2 = y$

$$y^2 + 7y - 2 = 0$$

$$D = 49 - 4 * 2$$

$$D = 41$$

$$y_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{41}}{2}, \quad y_{1,2} > 0 \Rightarrow$$

вернемся к переменной x

$$x^2 = \frac{7 \pm \sqrt{41}}{2},$$

$$x = \sqrt{\frac{7 \pm \sqrt{41}}{2}}.$$



$$(x-1)(x-7)(x-4)(x+2) = 40$$

*перемножим _первую_ и _третью_ _скобки,
затем _вторую_ и _четвертую_ :*

$$(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x - 14) = 40$$

замена : $x^2 - 5x + 4 = y$

$$y(y-18) = 40$$

$$y^2 - 18y - 40 = 0$$

$y_1 = 20, y_2 = -2, _тогда$

$$x^2 - 5x + 4 = 20, x^2 - 5x + 4 = -2$$

$$x^2 - 5x - 16 = 0, x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{69}}{2}, x_3 = -2, x_4 = -3.$$



$$\lambda = -1,$$

$$2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$2x^2 + 3x - 3 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$$

Замена $x - \frac{1}{x} = y, x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$

$$2(y^2 + 2) + 3y - 3 = 0$$

$$2y^2 + 3y + 1 = 0$$

$$y_1 = -1, y_2 = -0,5$$

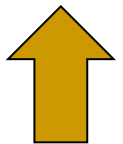
$$x - \frac{1}{x} = -1, x - \frac{1}{x} = -0,5$$

$$x^2 + x - 1 = 0, x^2 + 0,5x - 1 = 0$$

$$D = 5 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 2x^2 + x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad D = 17$$

$$\underline{\hspace{2cm}} \quad x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$



$$(2x-1)^2 + (2x-1)(x+2) = 2(x+2)^2$$

$$\frac{(2x-1)^2 + (2x-1)(x+2) - 2(x+2)^2}{(x+2)^2} = 0$$

$$\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^2 + \frac{2x-1}{x+2} - 2 = 0$$

$$\frac{2x-1}{x+2} = y$$

$$y^2 + y - 2 = 0$$

$$y_1 = 1, y_2 = -2$$

$$\frac{2x-1}{x+2} = 1, \frac{2x-1}{x+2} = -2. \quad \text{ОДЗ} \quad x \neq -2$$

$$x_1 = 3, x_2 = 1\frac{1}{4}.$$



$$x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 8$$

$$x^2 + \frac{2x^2}{x-1} + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - \frac{2x^2}{x-1} = 8$$

$$\left(x + \frac{x}{x-1}\right)^2 - \frac{2x^2}{x-1} = 8$$

$$\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2 - 2 * \frac{x^2}{x-1} - 8 = 0$$

замена $\frac{x^2}{x-1} = y$

$$y^2 - 2y - 8 = 0$$

$$y_1 = 4, y_2 = -2$$

$$\frac{x^2}{x-1} = 4, \frac{x^2}{x-1} = -2, \text{--- ОДЗ --- } x \neq 1$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0, x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0, \text{--- } D = 2\sqrt{3}$$

$$x_1 = 2, x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}$$



Найти значение c , при котором корнем уравнения $3(x-4)-5(x+2)=cx-6$ является число 6.

Решение:

$3x-12-5x-10-cx+6=0$ Сгруппируем слагаемые относительно x

$-2x-cx-16=0$ Подставим $x=6$

$-12-6c-16=0$

$-6c=28$

$c=-14/3$

Ответ: При $c=-14/3$ корнем данного уравнения является число 6.



Для каждого значения параметра a решить уравнение: $x^4 + (a^2 - a + 1)x^2 - a^3 - a = 0$.

замена $x^2 = y$

$$y^2 + (a^2 - a + 1)y - a(a^2 + 1) = 0$$

замена $u = a^2 + 1$

$$y^2 + (u - a)y - au = 0$$

$$D = u^2 - 2au + a^2 + 4au$$

$$D = (u + a)^2$$

$$y_{1,2} = \frac{-(u - a) \pm (u + a)}{2}$$

$$y_1 = a, y_2 = -u$$

вернёмся к переменной x .

$$1) x^2 = a$$

$$\text{при } a > 0 \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$$

$$\text{при } a = 0 \quad x = 0$$

при $a < 0$ нет корней.

$$\text{Ответ: } a > 0, x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$$

$$\text{_____ } a = 0, x = 0$$

$$\text{_____ } a < 0, \text{ нет решений.}$$

$$2) x^2 = -u \text{ то есть}$$

$$x^2 = -(a^2 + 1)$$

нет корней.

